Definizione di Trasformata unilatera di Laplace $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \doteq \int_{0_-}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}dt = F(s)\,, \quad s \in \mathbf{C}; \qquad \underset{\mathbf{R}\to\mathbf{R}}{f(t)} \;\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\; \underset{\mathbf{C}\to\mathbf{C}}{F(s)}$$

Proprietà fondamentali della Trasformata unilatera di Laplace

Proprietà	Tempo t	Frequenza s
Linearità	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$
Amplificazione	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Traslazione nel tempo	$f(t-\tau)$	$\mathrm{e}^{-\tau s} F(s)$
Traslazione nella frequenza	$\mathrm{e}^{at} f(t)$	$F(s-a)$
Derivazione	$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(t=0_-)$
Doppia derivazione	$\ddot{f}(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - s\,f(t=0_-) - \dot{f}(t=0_-)$
Integrazione	$\int_{0_-}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
Convoluzione	$f(t) * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
Teorema del valore iniziale	$f(t=0_+)$	$\lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$
Teorema del valore finale	$f(t\to\infty)$	$\lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$

Tabella delle principali Trasformate unilatere di Laplace

	$f(t)\,,\ t \geq 0_-$	$F(s)\,,\ s \in \mathbf{C}$
impulso unitario	$\delta(t)$	1
gradino unitario	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
segnale polinomiale o canonico	$\frac{t^k}{k!},\ k \geq 0$	$\frac{1}{s^{k+1}}$
esponenziale associato al polo semplice p di $F(s)$	$\mathrm{e}^{pt},\ p \in \mathbf{C}$	$\frac{1}{s-p}$
esponenziale associato al polo multiplo p di $F(s)$	$\frac{t^k}{k!}\mathrm{e}^{pt},\ k>0,\ p \in \mathbf{C}$	$\frac{1}{(s-p)^{k+1}}$
	$\sin(\omega_0 t)\,,\ \omega_0 \in \mathbf{R}$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
	$\cos(\omega_0 t)\,,\ \omega_0 \in \mathbf{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
esponenziale di matrice	$\mathrm{e}^{At},\ A \in \mathbf{R}^{n\times n}$	$(sI_n - A)^{-1}$

Decomposizione in fratti semplici di funzioni razionali fratte

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)/\,a_n}{D(s)/\,a_n} = \\ &= \frac{N'(s)}{D'(s)} = \frac{N'(s)}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a'_1 s + a'_0} = \frac{N'(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \frac{N'(s)}{\prod_{i=1}^{n'}(s-p_i)^{\mu_i}} = \sum_{i=1}^{n'}\sum_{k=1}^{\mu_i} \underbrace{\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k}}_{\text{fratto semplice}} \end{aligned}$$

$N(s)$, $D(s)$: polinomi in s, di grado m ed n rispettivamente ($m < n$)
n : numero di radici di $D(s)$ e $D'(s)$ = numero di poli di $F(s)$
n' : numero di radici distinte di $D(s)$ e $D'(s)$ = numero di poli non coincidenti di $F(s)$
p_i : i-esima radice di $D(s)$ e $D'(s)$ = i-esimo polo di $F(s)$
μ_i : molteplicità dell'i-esimo polo di $F(s)$
R_{ik} : k-esimo residuo associato a p_i mediante il fratto semplice $\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k}$, dato da

$$R_{ik} = \lim_{s\to p_i} \frac{1}{(\mu_i - k)!}\,\frac{\partial^{\mu_i - k}}{\partial s^{\mu_i - k}}\left[(s-p_i)^{\mu_i} F(s)\right], \quad 1 \leq k \leq \mu_i$$

Se p_i è un polo semplice ($\mu_i = 1$), allora ha associato soltanto il fratto semplice $\frac{R_i}{s-p_i}$, con $R_i = \lim_{s\to p_i}(s-p_i)\,F(s)$

Antitrasformata unilatera di Laplace di funzioni razionali fratte

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n'}\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k}\right\} = \sum_{i=1}^{n'}\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{R_{ik}}{(k-1)!}\,t^{k-1}\,\mathrm{e}^{p_i t}\,\varepsilon(t)$$

Se $F(s)$ ha un polo complesso $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ con molteplicità μ_i, allora $F(s)$ presenta anche il polo complesso $p_l = p_i^* = \sigma_i - j\omega_i$ con molteplicità $\mu_l = \mu_i$. In tal caso, è opportuno antitrasformare a coppie i fratti semplici di $F(s)$ associati a p_i e p_l, poiché $R_{lk} = R_{ik}^*$ e quindi:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k} + \frac{R_{lk}}{(s-p_l)^k}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k} + \frac{R_{ik}^*}{(s-p_i^*)^k}\right\} = \frac{2\,|R_{ik}|}{(k-1)!}\,t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma_i t}\,\sin\left(\omega_i t + \angle R_{ik} + \frac{\pi}{2}\right)\,\varepsilon(t)$$

con $\quad \angle R_{ik} = \arctan\left(\frac{\Im m\,(R_{ik})}{\Re e\,(R_{ik})}\right)$