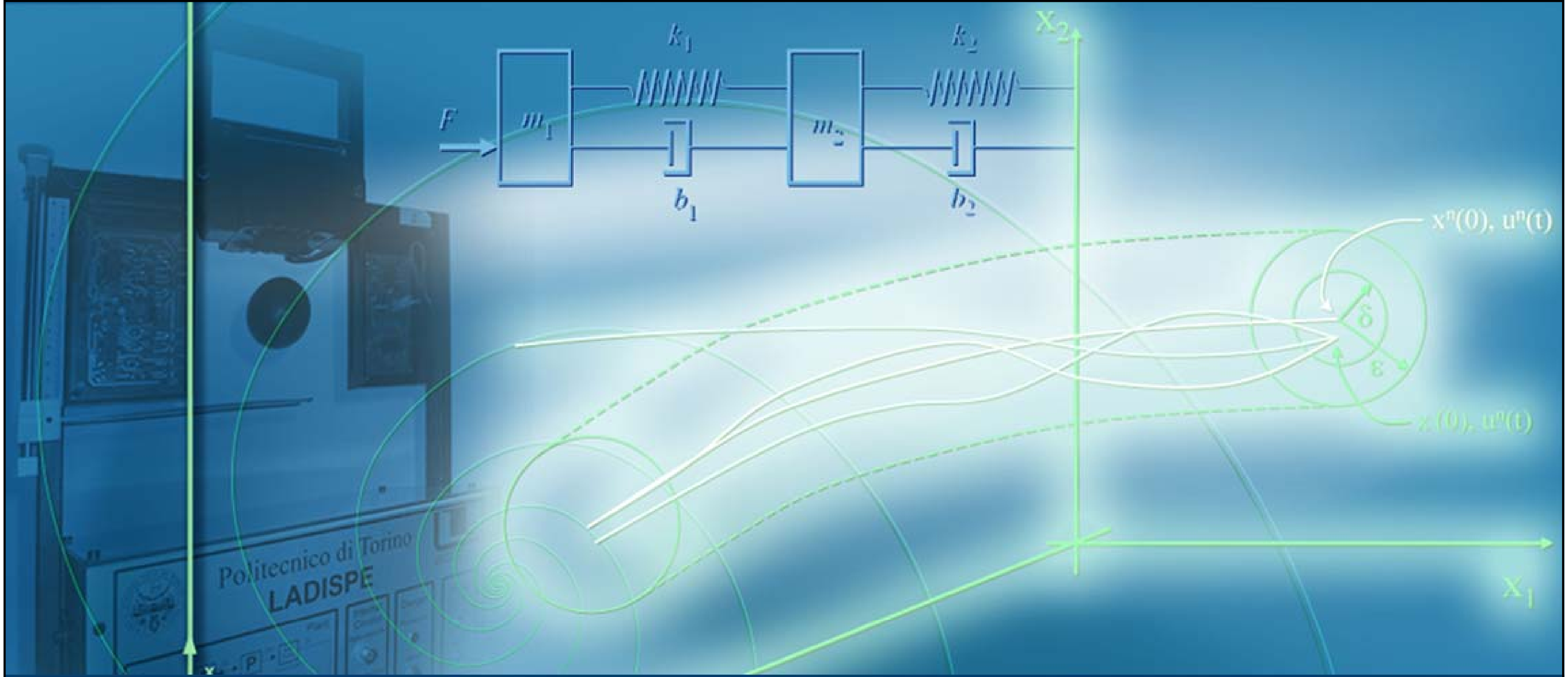
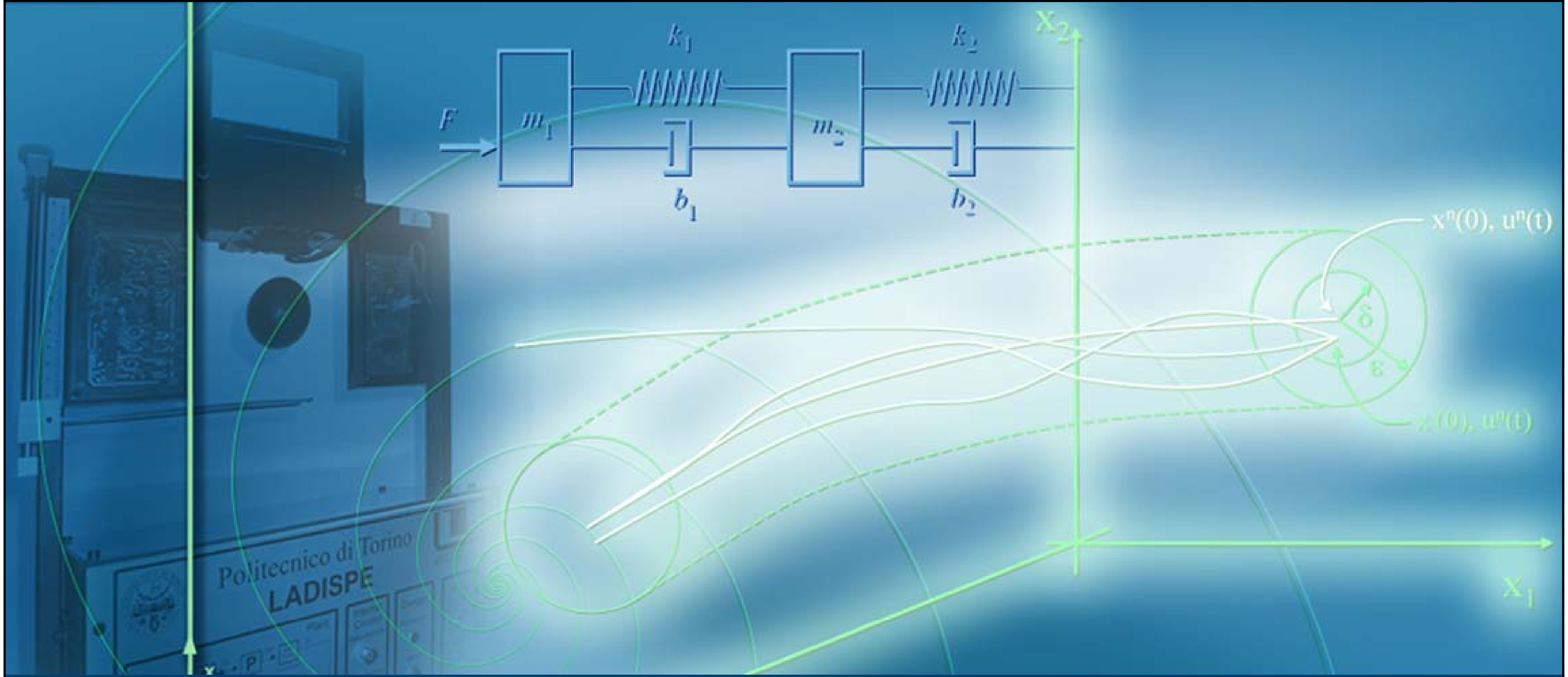



# Introduzione e modellistica dei sistemi

## Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

- Sistemi meccanici in traslazione: elementi base
- Sistemi in traslazione: equazioni del moto
- Sistemi in traslazione: rappresentazione di stato
- Sistemi in traslazione: esempi di rappresentazione
- Sistemi meccanici in rotazione: elementi base
- Sistemi in rotazione: equazioni del moto
- Sistemi in rotazione: rappresentazione di stato
- Sistemi in rotazione: esempi di rappresentazione

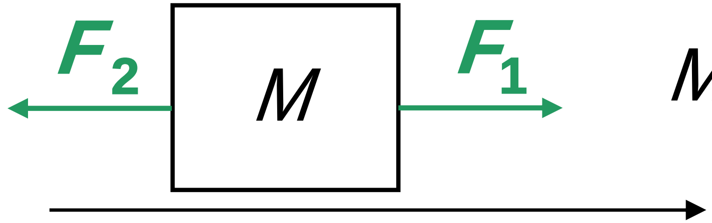



# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

## Sistemi meccanici in traslazione: elementi base

# Corpo puntiforme in traslazione

- **Corpo puntiforme in traslazione** di massa $M$




$$M\ddot{p}(t) = F_1(t) - F_2(t)$$

La II legge di Newton dà l'equazione del moto:

$$\boxed{M\ddot{p}(t) = M\frac{d^2p(t)}{dt^2} = F(t) = \sum_i F_i(t)}$$

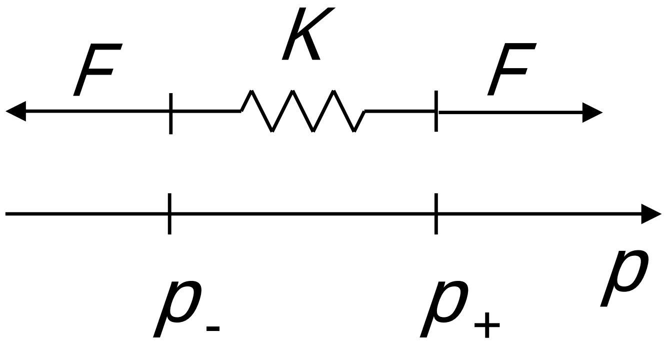
in cui $F_i(t)$ sono le forze esterne agenti sul corpo:

- Positive se concordi con il sistema di riferimento
- Negative altrimenti

Unità di misura: $[F]$ = N , $[p]$ = m, $[M]$ = kg

## Molla ideale

- **Molla ideale** di coefficiente di elasticità $K$




La forza elastica della molla è data da:

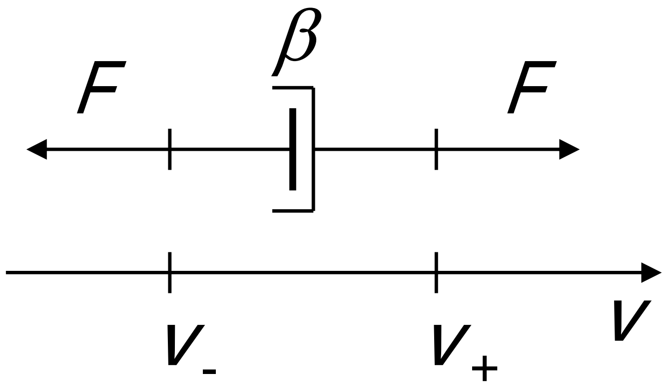
$$\boxed{F(t) = K\left[p_+(t) - p_-(t)\right]}$$

$\Rightarrow$ è proporzionale allo spostamento relativo delle due estremità della molla ($p_+$ e $p_-$ sono le posizioni delle due estremità rispetto alla posizione di riposo)

Unità di misura: [$F$] = N , [$p$] = m , [$K$] = N/m

# Smorzatore ideale

- **Smorzatore ideale** di smorzamento $\beta$

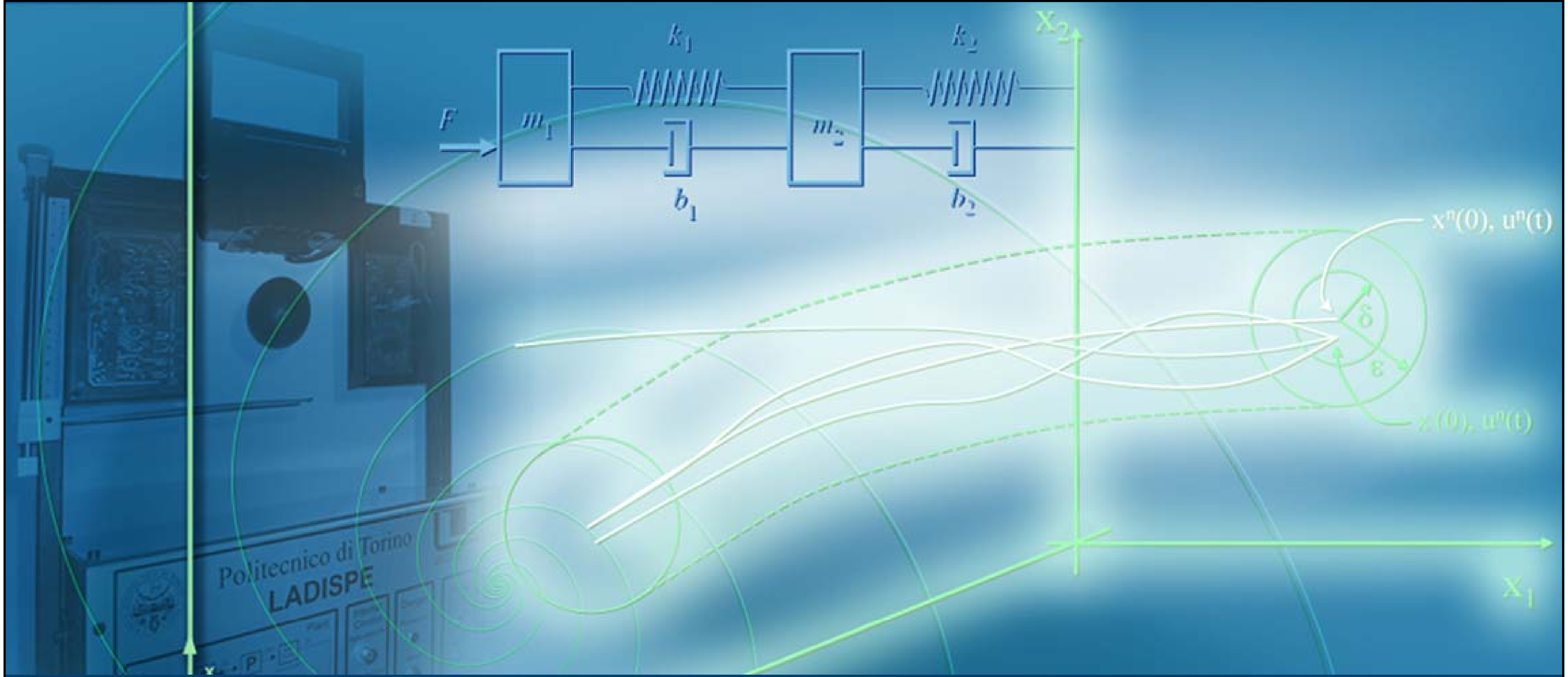



La forza di attrito dovuta allo smorzatore vale:

$$\boxed{F(t) = \beta\left[v_+(t) - v_-(t)\right] = \beta\left[\dot{p}_+(t) - \dot{p}_-(t)\right]}$$

$\Rightarrow$ è proporzionale alla velocità relativa dei due elementi che compongono lo smorzatore stesso

Unità di misura: $[F]$ = N , $[\dot{p}]$ = m/s , $[\beta]$ = Ns/m




# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

## Sistemi in traslazione: equazioni del moto

# Equazioni del moto per sistemi in traslazione

- Si introducono assi di riferimento concordi fra loro per indicare le posizioni di ogni corpo in traslazione
- Per ogni massa $M_i$ (o punto materiale in traslazione avente $M_i = 0$), con posizione $p_i$ e velocità $v_i = \dot{p}_i$ , vale la seconda legge di Newton espressa come:

$$\boxed{M_i \ddot{p}_i(t) = \sum_k F_k^{est}(t) - \sum_j^{j \neq i} F_{ij}^{int}(t)}$$

  - Le **forze esterne** $\boldsymbol{F_k^{est}}$ tengono conto dell'azione del mondo esterno sull'elemento $M_i$ e compaiono con
    - Segno positivo se concordi con gli assi di riferimento
    - Segno negativo altrimenti

# Equazioni del moto per sistemi in traslazione

- Si introducono assi di riferimento concordi fra loro per indicare le posizioni di ogni corpo in traslazione
- Per ogni massa $M_i$ (o punto materiale in traslazione avente $M_i = 0$), con posizione $p_i$ e velocità $v_i = \dot{p}_i$ , vale la seconda legge di Newton espressa come:

$$\boxed{M_i \ddot{p}_i(t) = \sum_k F_k^{est}(t) - \sum_j^{j \neq i} F_{ij}^{int}(t)}$$

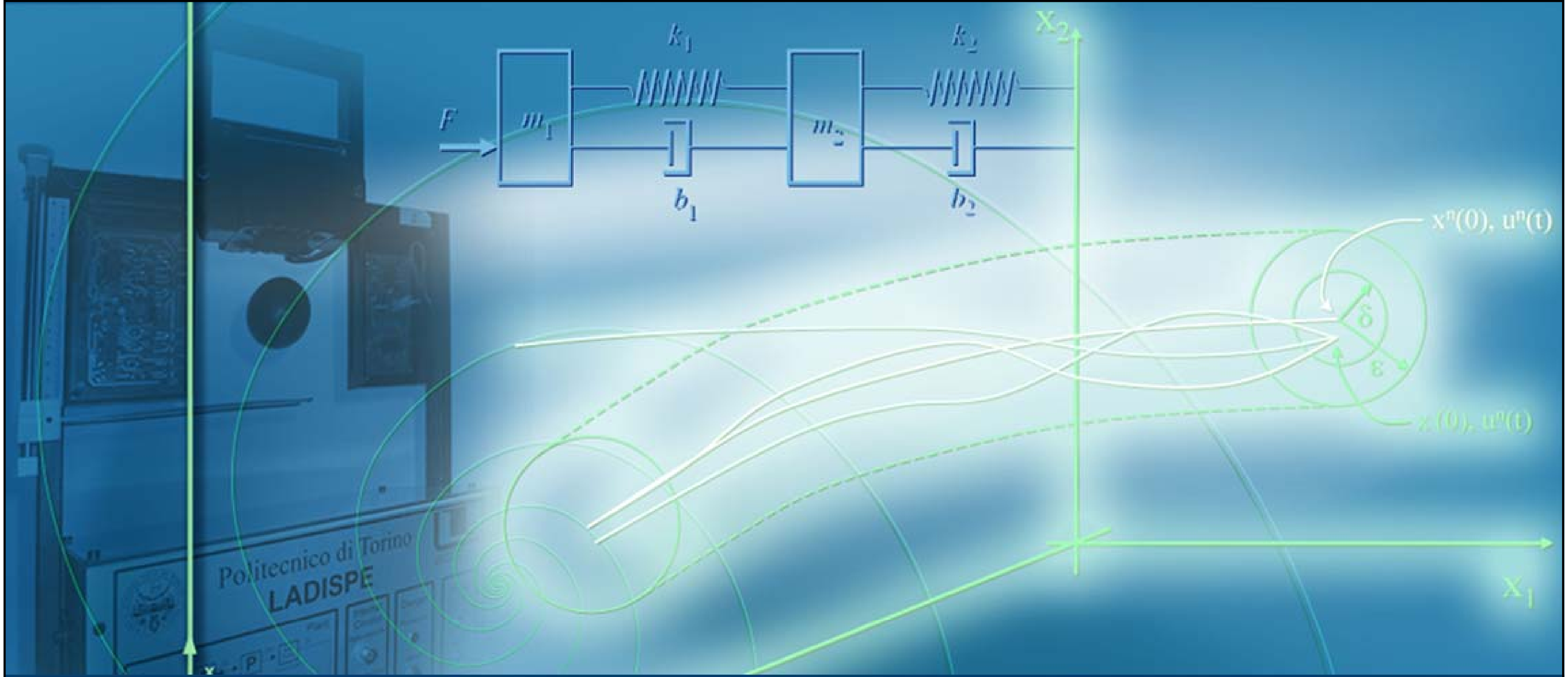
  - Le **forze interne** $\boldsymbol{F_{ij}^{int}}$ tengono conto dell'interazione tra l'elemento $M_i$ considerato e gli altri corpi $M_j$ tramite:
    - **Molle** ideali $K_{ij}$ $\Rightarrow$ $F_{ij}^{int}(t) = \boldsymbol{K_{ij}\left[p_i(t) - p_j(t)\right]}$
    - **Smorzatori** ideali $\beta_{ij}$ $\Rightarrow$ $F_{ij}^{int}(t) = \boldsymbol{\beta_{ij}\left[\dot{p}_i(t) - \dot{p}_j(t)\right]}$

# Interpretazione delle equazioni del moto

- Nell'equazione del moto dell'elemento $M_i$

$$\boxed{M_i \ddot{p}_i(t) = \sum_k F_k^{est}(t) - \sum_j^{j \neq i} F_{ij}^{int}(t)}$$

  - Le forze esterne $F_k^{est}$ trasmettono direttamente il moto a $M_i \Rightarrow$ ne incrementano o riducono la forza d'inerzia, a seconda del loro verso di applicazione
  - Le forze interne $F_{ij}^{int}$ trasmettono invece il moto agli altri corpi $M_j$ tramite molle o smorzatori $\Rightarrow$ riducono la forza d'inerzia di $M_i$




# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

## Sistemi in traslazione: rappresentazione di stato

# Rappresentazione in variabili di stato (1/2)

- Si scrivono le **equazioni del moto** per ogni corpo puntiforme di massa $M_i$ (eventualmente nulla) in traslazione, avente posizione $p_i$ e velocità $v_i = \dot{p}_i$
- Si introducono due **variabili di stato** per ogni elemento $M_i$ in traslazione, scegliendo in particolare
  - La posizione $p_i$
  - La velocità $\dot{p}_i$

  Tale scelta permette di trasformare ogni equazione del moto (equazione differenziale del II ordine) in una coppia di equazioni differenziali del I ordine
- Si associa una **variabile di ingresso** ad ogni forza esterna applicata al sistema meccanico in traslazione

# Rappresentazione in variabili di stato (2/2)

- Si ricavano le **equazioni di stato** del tipo

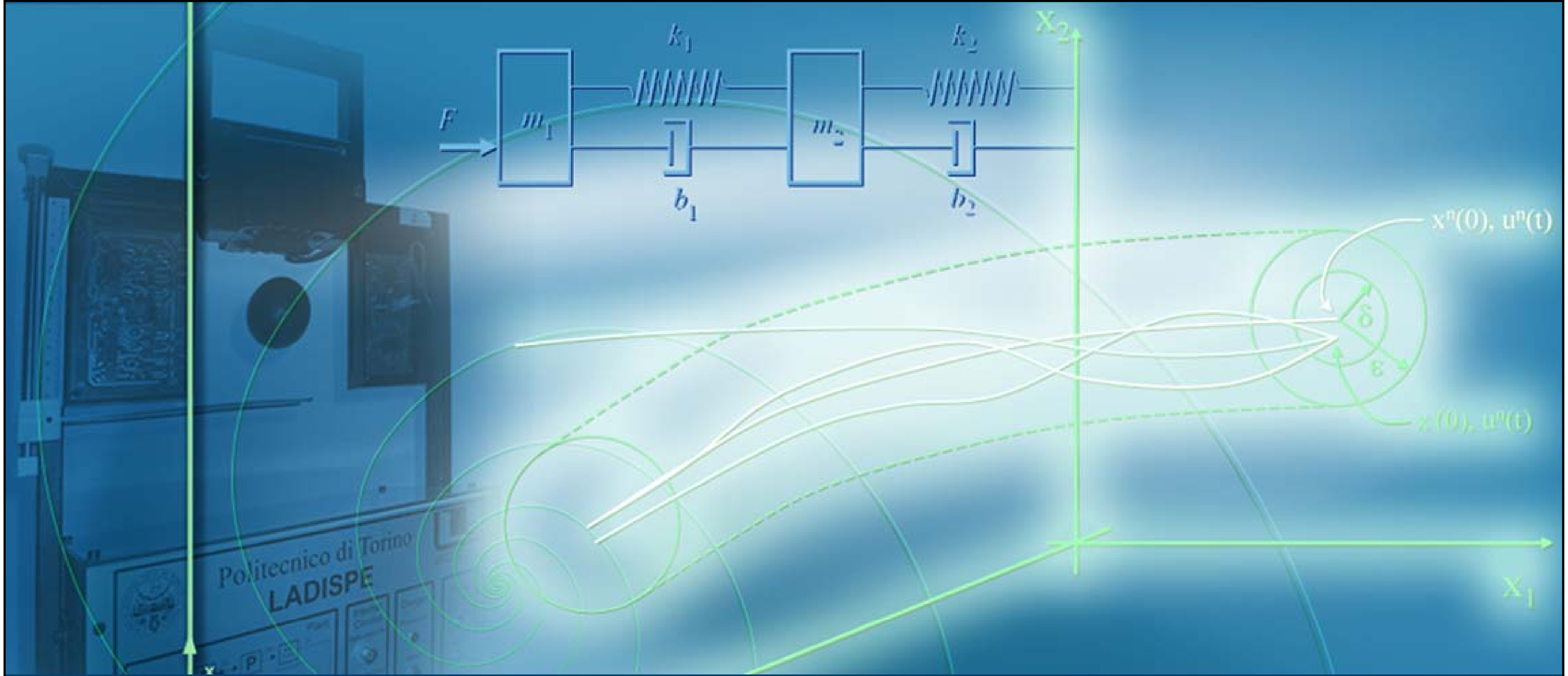
$$\boxed{\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i\big(t, x(t), u(t)\big)}$$

a partire dalle precedenti equazioni del moto, esprimendo $\dot{x}_i$ soltanto in funzione di variabili di stato e di ingresso, se necessario esplicitando il legame di derivazione temporale fra variabili di stato

- Si ricavano le **equazioni di uscita** del tipo

$$\boxed{y_k(t) = g_k\big(t, x(t), u(t)\big)}$$

esprimendo ogni variabile di interesse $y_k$ soltanto in funzione di variabili di stato e di ingresso

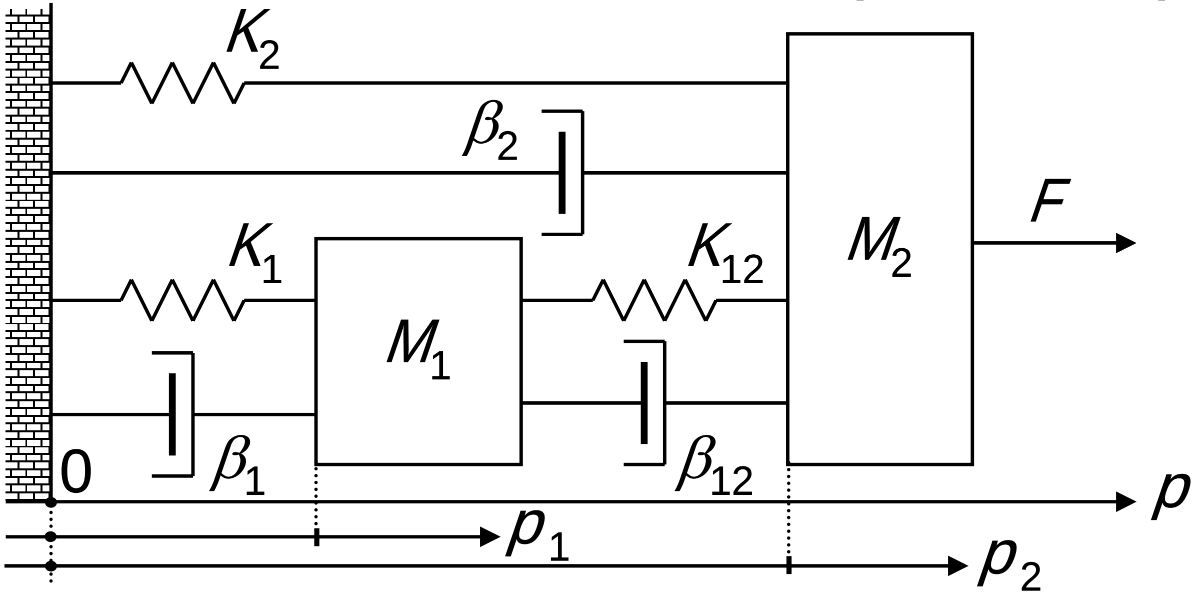



# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

## Sistemi in traslazione: esempi di rappresentazione

# Esempio #1 di rappresentazione (1/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico in traslazione, in cui le variabili di interesse sono le posizioni $p_1$ e $p_2$



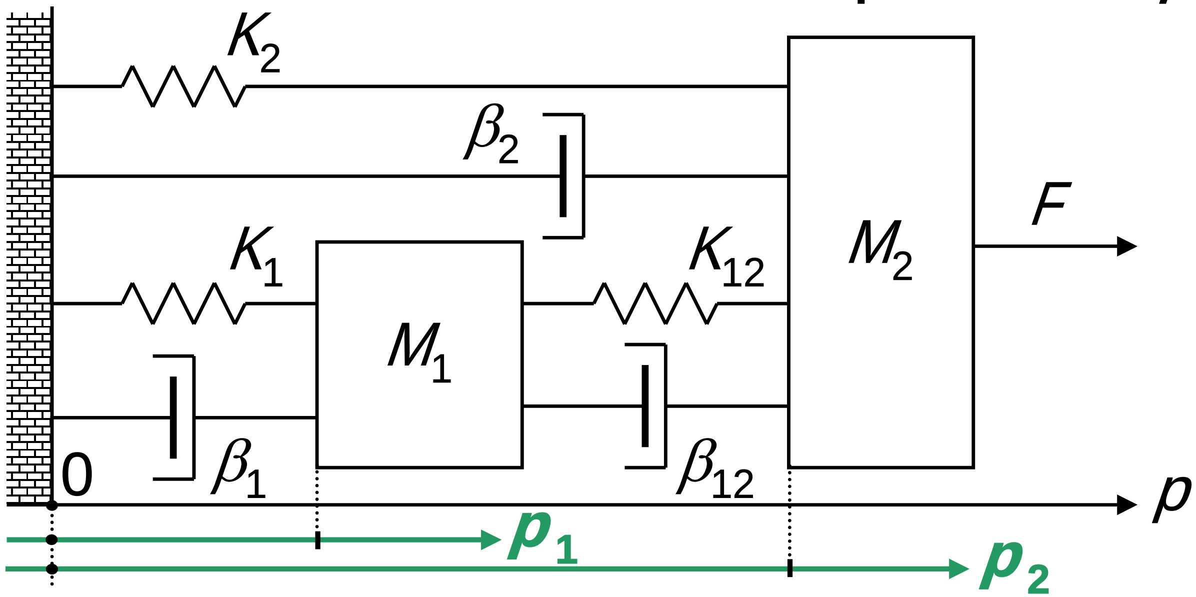

- Equazioni del moto:

1) $M_1\ddot{p}_1 = 0 - \left[K_1(p_1 - 0) + \beta_1(\dot{p}_1 - 0) + K_{12}(p_1 - p_2) + \beta_{12}(\dot{p}_1 - \dot{p}_2)\right]$

2) $M_2\ddot{p}_2 = F - \left[K_2(p_2 - 0) + \beta_2(\dot{p}_2 - 0) + K_{12}(p_2 - p_1) + \beta_{12}(\dot{p}_2 - \dot{p}_1)\right]$

# Esempio #1 di rappresentazione (2/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico in traslazione, in cui le variabili di interesse sono le posizioni $p_1$ e $p_2$

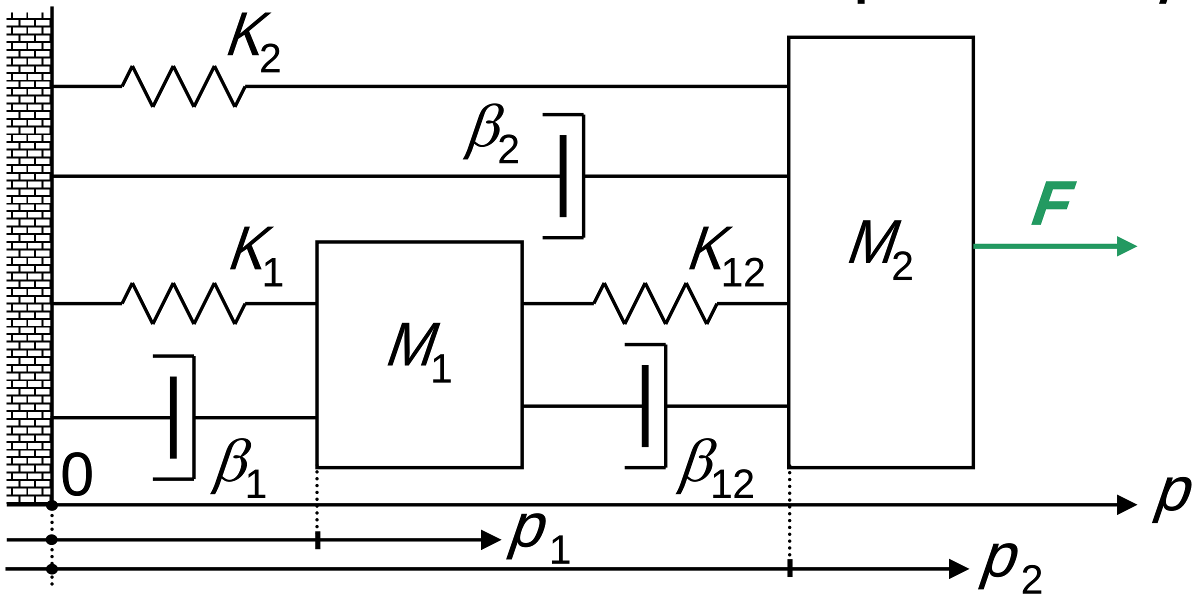



- Variabili di stato:

$$x(t) = \left[p_1(t) \;\; p_2(t) \;\; \dot{p}_1(t) \;\; \dot{p}_2(t)\right]^T = \left[x_1(t) \;\; x_2(t) \;\; x_3(t) \;\; x_4(t)\right]^T$$

# Esempio #1 di rappresentazione (3/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico in traslazione, in cui le variabili di interesse sono le posizioni $p_1$ e $p_2$




- Variabile di ingresso:

$$u(t) = [F(t)]$$

# Esempio #1 di rappresentazione (4/10)

- Equazioni del moto:

  1) $M_1\ddot{p}_1 = 0 - \left[K_1(p_1-0)+\beta_1(\dot{p}_1-0)+K_{12}(p_1-p_2)+\beta_{12}(\dot{p}_1-\dot{p}_2)\right]$

  2) $M_2\ddot{p}_2 = F - \left[K_2(p_2-0)+\beta_2(\dot{p}_2-0)+K_{12}(p_2-p_1)+\beta_{12}(\dot{p}_2-\dot{p}_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = [F(t)]$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = dp_1/dt = \dot{p}_1 = x_3 = f_1(t,x,u)$$

$$\dot{x}_2 = dp_2/dt = \dot{p}_2 = x_4 = f_2(t,x,u)$$

# Esempio #1 di rappresentazione (5/10)

- Equazioni del moto:

  1) $M_1\ddot{p}_1 = 0 - \left[K_1(p_1-0)+\beta_1(\dot{p}_1-0)+K_{12}(p_1-p_2)+\beta_{12}(\dot{p}_1-\dot{p}_2)\right]$

  2) $M_2\ddot{p}_2 = F - \left[K_2(p_2-0)+\beta_2(\dot{p}_2-0)+K_{12}(p_2-p_1)+\beta_{12}(\dot{p}_2-\dot{p}_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \left[F(t)\right]$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_3 = d\dot{p}_1 \big/ dt = \ddot{p}_1 = -\frac{1}{M_1}\left[K_1 p_1+\beta_1\dot{p}_1+K_{12}(p_1-p_2)+\beta_{12}(\dot{p}_1-\dot{p}_2)\right] =$$

$$= -\frac{K_1+K_{12}}{M_1}x_1 + \frac{K_{12}}{M_1}x_2 - \frac{\beta_1+\beta_{12}}{M_1}x_3 + \frac{\beta_{12}}{M_1}x_4 = f_3(t,x,u)$$

# Esempio #1 di rappresentazione (6/10)

- Equazioni del moto:

$$1)\ M_1\ddot{p}_1 = 0 - \left[K_1(p_1-0)+\beta_1(\dot{p}_1-0)+K_{12}(p_1-p_2)+\beta_{12}(\dot{p}_1-\dot{p}_2)\right]$$

$$2)\ M_2\ddot{p}_2 = F - \left[K_2(p_2-0)+\beta_2(\dot{p}_2-0)+K_{12}(p_2-p_1)+\beta_{12}(\dot{p}_2-\dot{p}_1)\right]$$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = [F(t)]$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_4 = d\dot{p}_2 / dt = \ddot{p}_2 = \frac{F}{M_2} - \frac{1}{M_2}\left[K_2 p_2 + \beta_2\dot{p}_2 + K_{12}(p_2-p_1)+\beta_{12}(\dot{p}_2-\dot{p}_1)\right] =$$

$$= \frac{K_{12}}{M_2}x_1 - \frac{K_2+K_{12}}{M_2}x_2 + \frac{\beta_{12}}{M_2}x_3 - \frac{\beta_2+\beta_{12}}{M_2}x_4 + \frac{1}{M_2}u = f_4(t,x,u)$$

# Esempio #1 di rappresentazione (7/10)

- Equazioni del moto:

  1) $M_1\ddot{p}_1 = 0 - \left[K_1(p_1 - 0) + \beta_1(\dot{p}_1 - 0) + K_{12}(p_1 - p_2) + \beta_{12}(\dot{p}_1 - \dot{p}_2)\right]$

  2) $M_2\ddot{p}_2 = F - \left[K_2(p_2 - 0) + \beta_2(\dot{p}_2 - 0) + K_{12}(p_2 - p_1) + \beta_{12}(\dot{p}_2 - \dot{p}_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \left[F(t)\right]$$

- Equazioni di uscita:

$$y_1 = p_1 = x_1 = g_1(t, x, u)$$
$$y_2 = p_2 = x_2 = g_2(t, x, u)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

# Esempio #1 di rappresentazione (8/10)

- Equaz. di stato: $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_1+K_{12}}{M_1}x_1 + \frac{K_{12}}{M_1}x_2 - \frac{\beta_1+\beta_{12}}{M_1}x_3 + \frac{\beta_{12}}{M_1}x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{K_{12}}{M_2}x_1 - \frac{K_2+K_{12}}{M_2}x_2 + \frac{\beta_{12}}{M_2}x_3 - \frac{\beta_2+\beta_{12}}{M_2}x_4 + \frac{1}{M_2}u \end{cases}$$
- Equaz. di uscita: $$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$
- Se $M_1, M_2, K_1, K_2, K_{12}, \beta_1, \beta_2$ e $\beta_{12}$ sono costanti $\Rightarrow$ il sistema è LTI e ha rappresentazione di stato
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

# Esempio #1 di rappresentazione (9/10)

- Se $M_1, M_2, K_1, K_2, K_{12}, \beta_1, \beta_2$ e $\beta_{12}$ sono costanti $\Rightarrow$ il sistema è LTI e ha rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

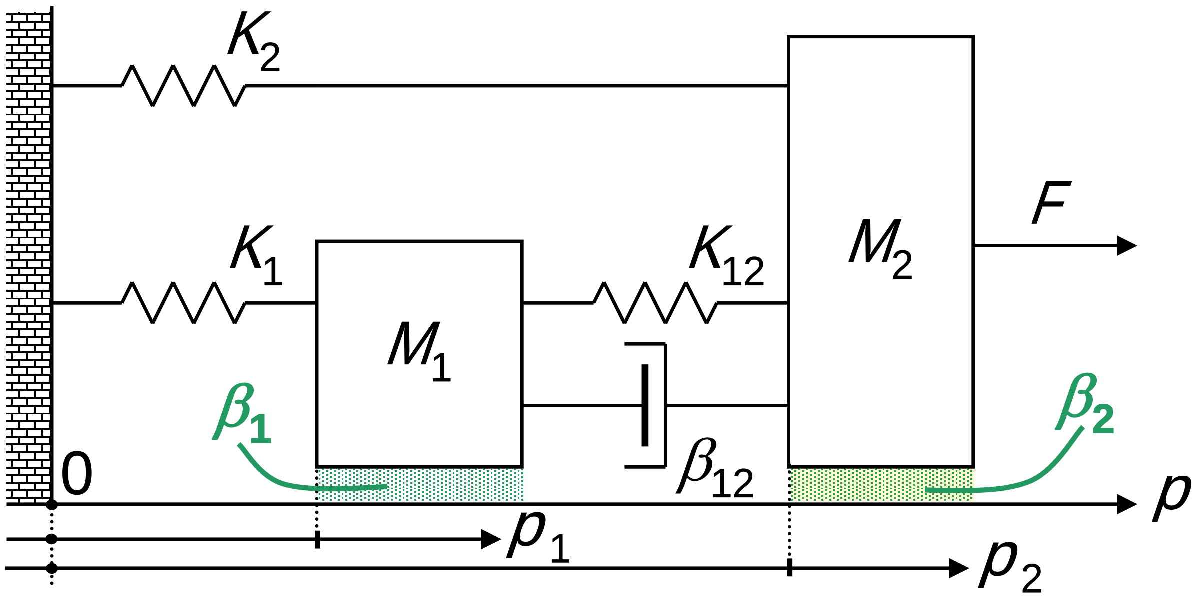
$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1+K_{12}}{M_1} & \frac{K_{12}}{M_1} & -\frac{\beta_1+\beta_{12}}{M_1} & \frac{\beta_{12}}{M_1} \\ \frac{K_{12}}{M_2} & -\frac{K_2+K_{12}}{M_2} & \frac{\beta_{12}}{M_2} & -\frac{\beta_2+\beta_{12}}{M_2} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

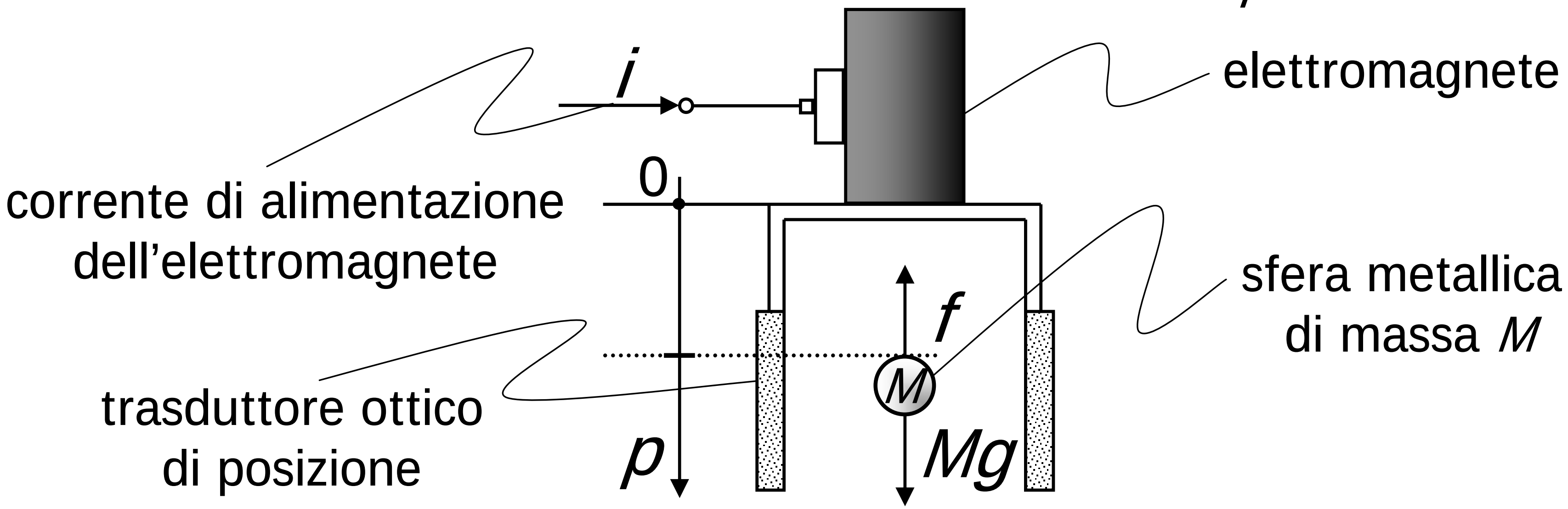
# Esempio #1 di rappresentazione (10/10)

- Nota: si può modellizzare il fenomeno dell’attrito mediante uno **smorzatore equivalente** avente un’estremità fissa e lo smorzamento $\beta_i$ uguale al coefficiente d’attrito viscoso; il sistema considerato in quest’esempio è infatti equivalente al seguente:



# Esempio #2 di rappresentazione (1/5)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **levitatore magnetico**, in cui $y(t) = p(t)$ e l'elettromagnete genera la forza $f(t) = k_i i^2(t) / p^2(t)$

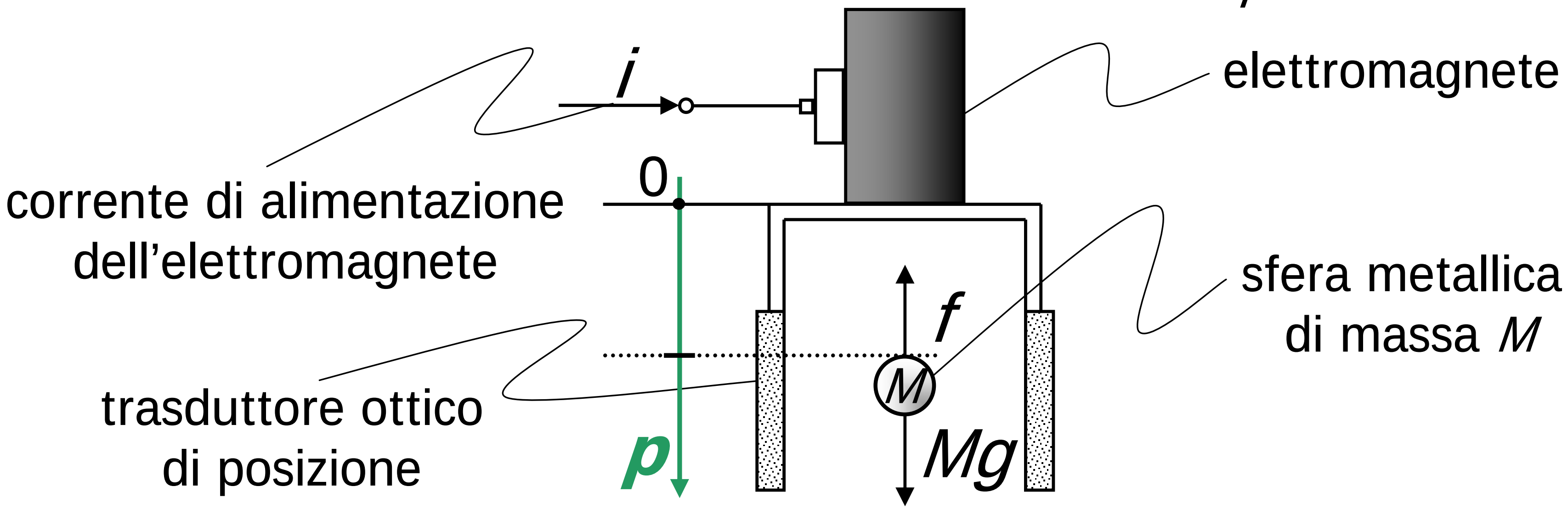



- Equazione del moto:

$$M\ddot{p}(t) = Mg - f(t) = Mg - k_i\, i^2(t) / p^2(t)$$

# Esempio #2 di rappresentazione (2/5)

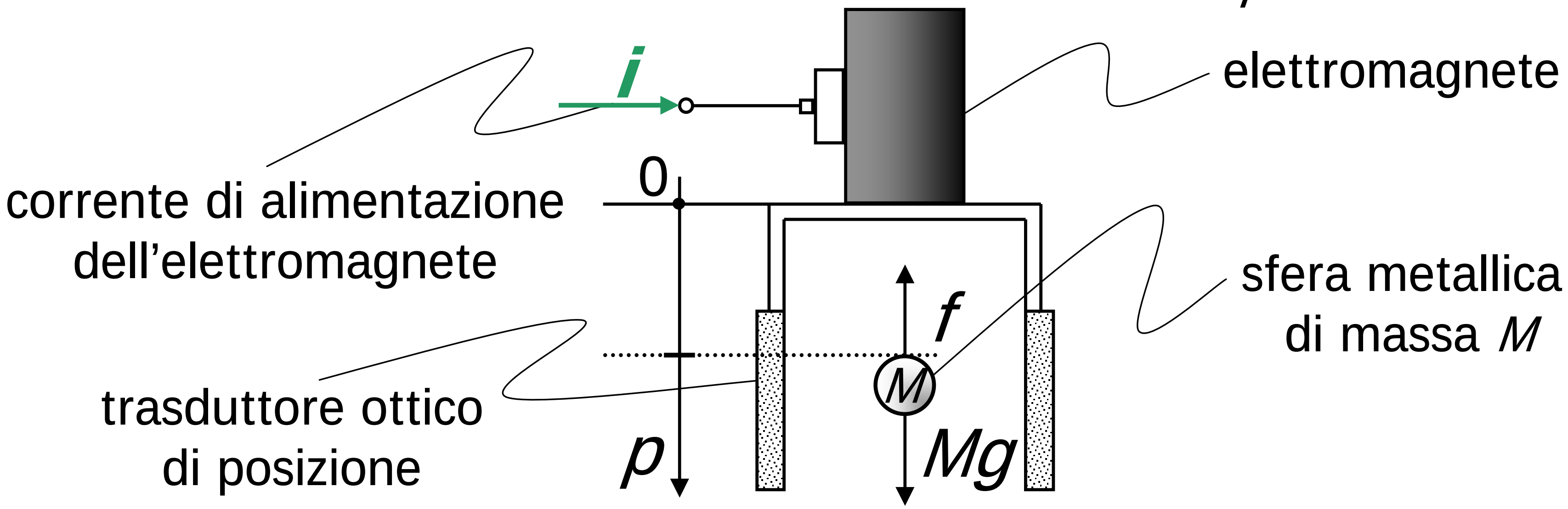
- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **levitatore magnetico**, in cui $y(t) = p(t)$ e l'elettromagnete genera la forza $f(t) = k_i i^2(t) / p^2(t)$




- Variabili di stato: $x(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

# Esempio #2 di rappresentazione (3/5)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **levitatore magnetico**, in cui $y(t) = p(t)$ e l'elettromagnete genera la forza $f(t) = k_i i^2(t) / p^2(t)$




- Variabile di ingresso: $u(t) = \left[ i(t) \right]$

# Esempio #2 di rappresentazione (4/5)

- Equazione del moto:

$$M\ddot{p}(t) = Mg - k_i\, i^2(t) \big/ p^2(t)$$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \left[\, i(t) \,\right]$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = dp\big/dt = \dot{p} = x_2 = f_1(t, x, u)$$

$$\dot{x}_2 = d\dot{p}\big/dt = \ddot{p} = g - \frac{k_i}{M}\frac{i^2}{p^2} = g - \frac{k_i}{M}\frac{u^2}{x_1^2} = f_2(t, x, u)$$

- Equazione di uscita:

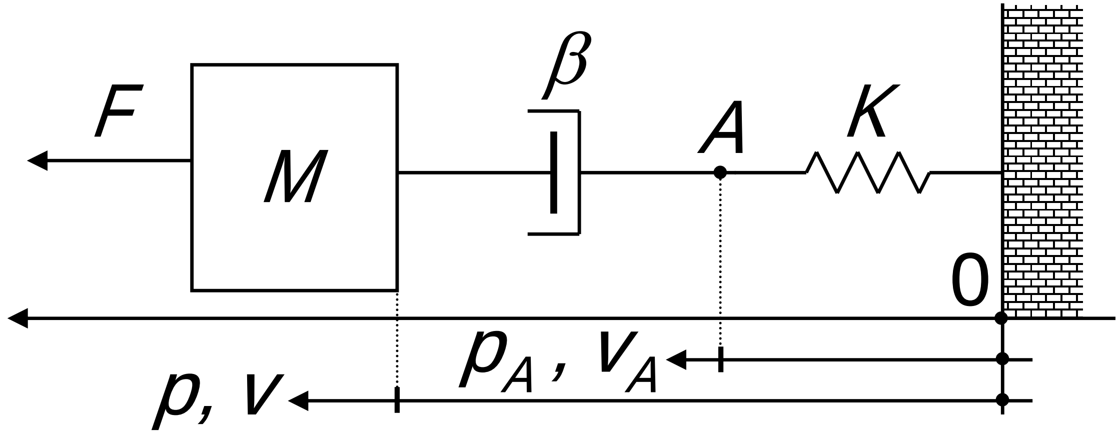
$$y = p = x_1 = g(t, x, u)$$

# Esempio #2 di rappresentazione (5/5)

- Equazioni di stato: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - (k_i/M)\, u^2/x_1^2 \end{cases}$
- Equazione di uscita: $y = x_1$
- Il sistema risulta non lineare, a causa della forza di attrazione $f$ dell'elettromagnete di tipo non lineare
- Il sistema è inoltre dinamico, a tempo continuo, a dimensione finita ($n = 2$), SISO ($p = q = 1$), proprio, stazionario nel caso $k_i$ e $M$ siano costanti
- La forza peso $Mg$ è esterna al sistema ma costante $\Rightarrow$ non compare nel vettore di ingresso $u$ ma solo con il termine costante $g$ nelle equazioni di stato

# Esempio #3 di rappresentazione (1/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico, in cui $y(t) = v(t) = \dot{p}(t)$



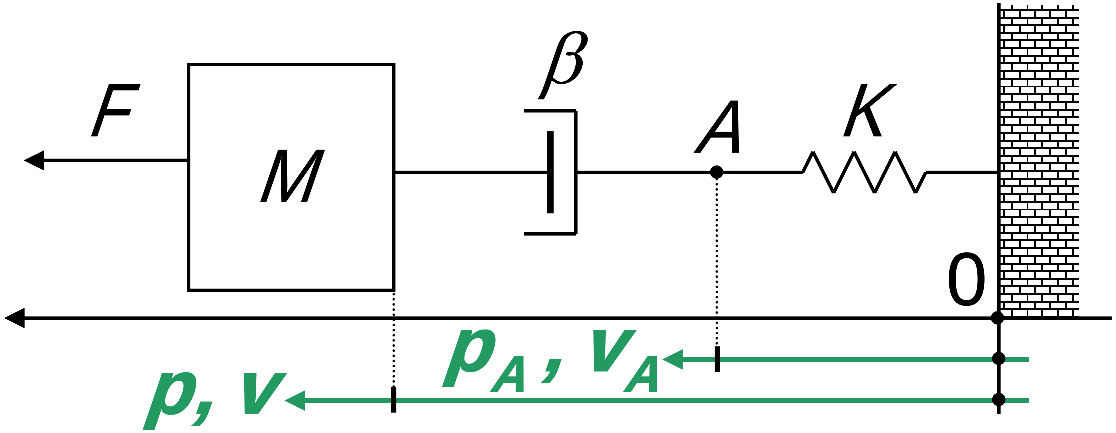

- Equazioni del moto:

  1) $M_A \ddot{p}_A = 0 \cdot \ddot{p}_A = 0 - \left[ \beta(\dot{p}_A - \dot{p}) + K(p_A - 0) \right]$

  2) $M\ddot{p} = F - \left[ \beta(\dot{p} - \dot{p}_A) \right]$

# Esempio #3 di rappresentazione (2/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico, in cui $y(t) = v(t) = \dot{p}(t)$

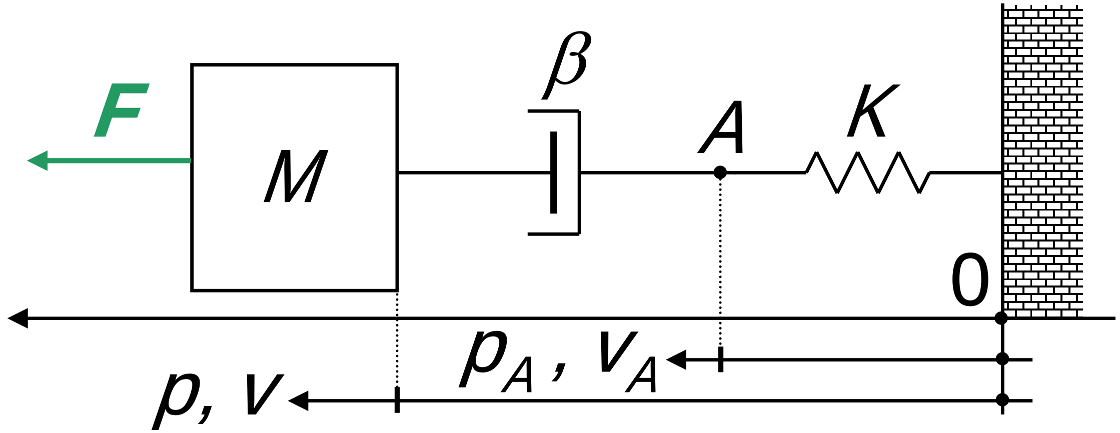



- Variabili di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \dot{p}_A(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

# Esempio #3 di rappresentazione (3/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico, in cui $y(t) = v(t) = \dot{p}(t)$




- Variabile di ingresso:

$$u(t) = \left[ F(t) \right]$$

# Esempio #3 di rappresentazione (4/10)

- Equazioni del moto:

  1) $0 = -\beta(\dot{p}_A - \dot{p}) - K p_A$ 2) $M\ddot{p} = F - \beta(\dot{p} - \dot{p}_A)$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \dot{p}_A(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = [F(t)]$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = dp_A/dt = \dot{p}_A = x_3 = f_1(t, x, u)$$
$$\dot{x}_2 = dp/dt = \dot{p} = x_4 = f_2(t, x, u)$$
$$\dot{x}_3 = d\dot{p}_A/dt = \ddot{p}_A = ?$$ (conseguenza di $M_A = 0$ nell'equaz. 1)

$\Rightarrow \dot{p}_A$ **non** è una variabile di stato e non compare in $x$

# Esempio #3 di rappresentazione (5/10)

- Equazioni del moto:

  1) $0 = -\beta(\dot{p}_A - \dot{p}) - K p_A$ 2) $M\ddot{p} = F - \beta(\dot{p} - \dot{p}_A)$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \cancel{\dot{p}_A(t)} \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = [F(t)]$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = dp_A / dt = \dot{p}_A = \dot{p} - \frac{K}{\beta} p_A = -\frac{K}{\beta} x_1 + x_3 = f_1(t, x, u)$$

$$\dot{x}_2 = dp / dt = \dot{p} = x_3 = f_2(t, x, u)$$

# Esempio #3 di rappresentazione (6/10)

- Equazioni del moto:

  1) $0 = -\beta(\dot{p}_A - \dot{p}) - Kp_A$ 2) $M\ddot{p} = F - \beta(\dot{p} - \dot{p}_A)$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \cancel{\dot{p}_A(t)} \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = [F(t)]$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_3 = d\dot{p}/dt = \ddot{p} = \frac{F}{M} - \frac{\beta}{M}(\dot{p} - \dot{p}_A) = \frac{1}{M}u - \frac{\beta}{M}(x_3 - \dot{x}_1) =$$

$$= \frac{1}{M}u - \frac{\beta}{M}\left[x_3 - \left(-\frac{K}{\beta}x_1 + x_3\right)\right] = -\frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u = f_3(t, x, u)$$

# Esempio #3 di rappresentazione (7/10)

- Equazioni del moto:

  1) $0 = -\beta(\dot{p}_A - \dot{p}) - K p_A$  2) $M\ddot{p} = F - \beta(\dot{p} - \dot{p}_A)$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \cancel{\dot{p}_A(t)} \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = [F(t)]$$

- Equazione di uscita:

$$y = \dot{p} = x_3 = g(t, x, u)$$

# Esempio #3 di rappresentazione (8/10)

- Equazioni di stato: $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{K}{\beta}x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{K}{M}x_1 + \dfrac{1}{M}u \end{cases}$$
- Equazione di uscita: $y = x_3$
- Poiché $x_2 = p$ non compare nelle equazioni di stato o di uscita $\Rightarrow$ si può semplificare il vettore di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ \cancel{p(t)} \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{K}{\beta}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{M}x_1 + \dfrac{1}{M}u \end{cases} \\ y = x_2$$

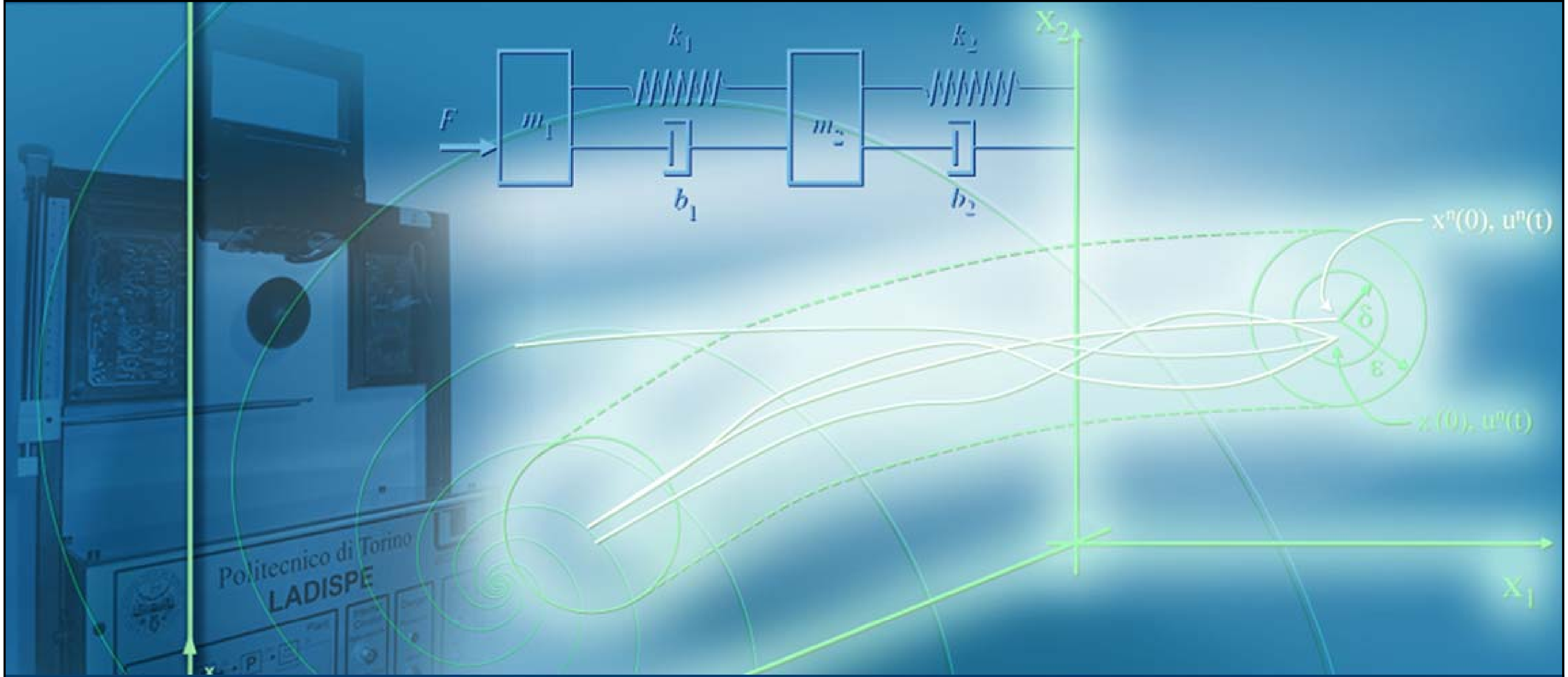
# Esempio #3 di rappresentazione (9/10)

- Equazioni di stato:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{K}{\beta}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{M}x_1 + \dfrac{1}{M}u \end{cases}$$
- Equazione di uscita: $y = x_2$
- Se $M$, $K$ e $\beta$ sono costanti, il sistema è LTI $\Rightarrow$ ha come rappresentazione in variabili di stato
$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$
$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{K}{\beta} & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

# Esempio #3 di rappresentazione (10/10)

- Le due semplificazioni in $x$ sono di natura diversa
  - $\dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{A}}$ non è una variabile di stato indipendente, poiché l'equazione del moto del punto materiale $A$ di massa nulla lega $\dot{p}_A$ ad altre due variabili di stato
    $$0 = -\beta(\dot{p}_A - \dot{p}) - K p_A \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_A = \dot{p} - \frac{K}{\beta} p_A = x_2 - \frac{K}{\beta} x_1$$
    (in analogia col caso delle reti elettriche degeneri)
  - $\boldsymbol{p}$ non compare nelle equazioni di stato o di uscita, per cui la rappresentazione minima in variabili di stato non ne richiede la presenza (diverso sarebbe stato ad esempio il caso in cui $y(t) = p(t)$ … )

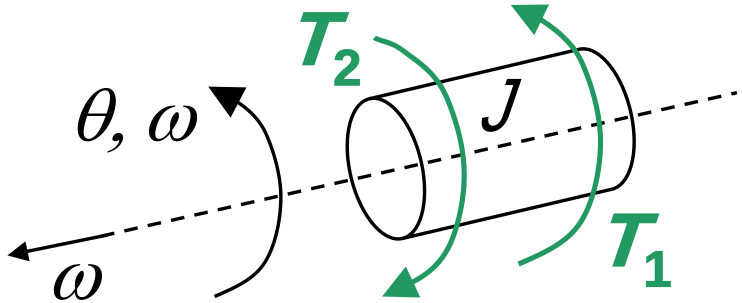



# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

## Sistemi meccanici in rotazione: elementi base

# Corpo puntiforme in rotazione

- **Corpo puntiforme in rotazione** di inerzia $J$




$$J\ddot{\theta}(t) = T_1(t) - T_2(t)$$

La II legge di Newton dà l'equazione del moto:

$$\boxed{J\ddot{\theta}(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = T(t) = \sum_i T_i(t)}$$

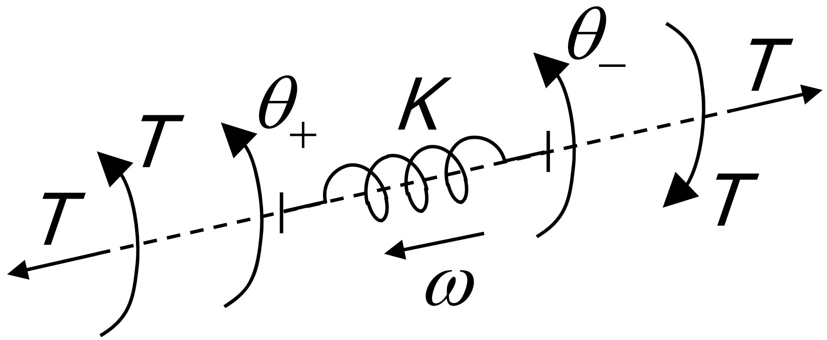
in cui $T_i(t)$ sono le coppie esterne agenti sul corpo:

- Positive se concordi con il sistema di riferimento
- Negative altrimenti

Unità di misura: $[T]$ = N m , $[\theta]$ = rad, $[J]$ = kg m$^2$

# Molla ideale

- **Molla ideale** di coefficiente di elasticità torsionale $K$




La coppia elastica della molla è data da:

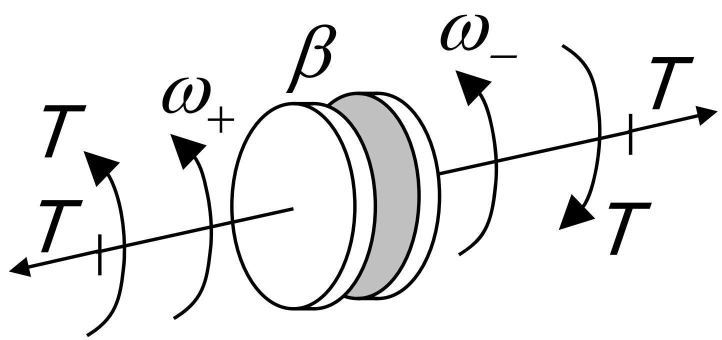
$$\boxed{T(t) = K\left[\theta_+(t) - \theta_-(t)\right]}$$

$\Rightarrow$ è proporzionale alla rotazione relativa delle due estremità della molla ($\theta_+, \theta_-$ sono le posizioni angolari delle due estremità rispetto alla posizione di riposo)

Unità di misura: $[T] = \mathrm{N\,m}$, $[\theta] = \mathrm{rad}$, $[K] = \mathrm{N\,m/rad}$

## Smorzatore ideale

- **Smorzatore ideale** di smorzamento $\beta$

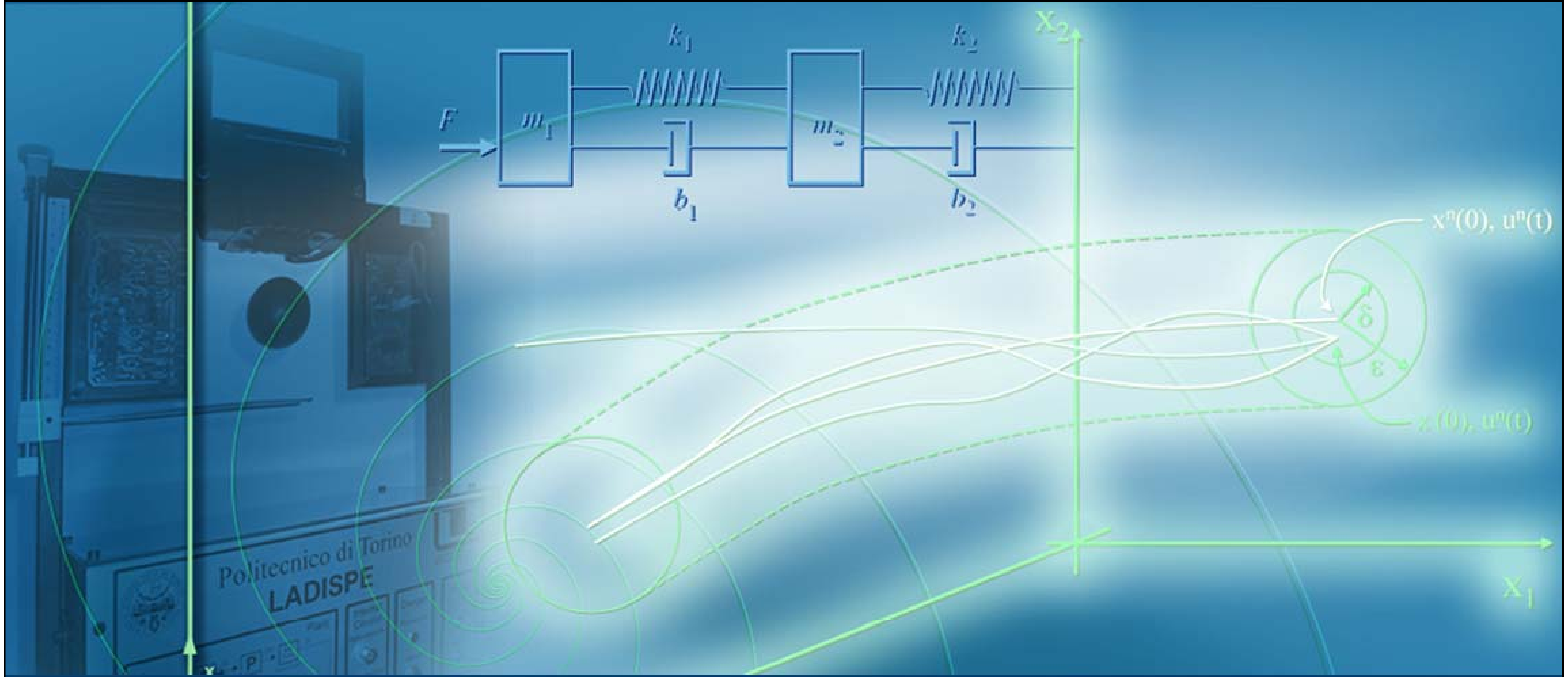



La coppia di attrito dovuta allo smorzatore vale:

$$\boxed{T(t) = \beta\left[\omega_+(t) - \omega_-(t)\right] = \beta\left[\dot{\theta}_+(t) - \dot{\theta}_-(t)\right]}$$

$\Rightarrow$ è proporzionale alla velocità angolare relativa dei due elementi che compongono lo smorzatore

Unità di misura: $[T] = \mathrm{N\,m}, [\dot{\theta}] = \mathrm{rad/s}, [\beta] = \mathrm{N\,m\,s/rad}$




# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

## Sistemi in rotazione: equazioni del moto

# Equazioni del moto per sistemi in rotazione

- Si introducono sistemi di riferimento (e quindi versi di rotazione) concordi fra loro per indicare le posizioni angolari di ogni corpo in rotazione
- Per ogni corpo $J_i$ (o punto materiale in rotazione con $J_i = 0$), con posizione angolare $\theta_i$ e velocità angolare $\omega_i = \dot{\theta}_i$, vale la seconda legge di Newton nella forma:

$$\boxed{J_i \ddot{\theta}_i(t) = \sum_k T_k^{est}(t) - \sum_l^{l \neq i} T_{il}^{int}(t)}$$

  - Le **coppie esterne** $\boldsymbol{T_k^{est}}$ tengono conto dell'azione del mondo esterno sull'elemento $J_i$ e compaiono con
    - Segno positivo se concordi con i sistemi di riferimento
    - Segno negativo altrimenti

# Equazioni del moto per sistemi in rotazione

- Si introducono sistemi di riferimento (e quindi versi di rotazione) concordi fra loro per indicare le posizioni angolari di ogni corpo in rotazione
- Per ogni corpo $J_i$ (o punto materiale in rotazione con $J_i = 0$), con posizione angolare $\theta_i$ e velocità angolare $\omega_i = \dot{\theta}_i$, vale la seconda legge di Newton nella forma:

$$\boxed{J_i \ddot{\theta}_i(t) = \sum_k T_k^{est}(t) - \sum_l^{l \neq i} T_{il}^{int}(t)}$$

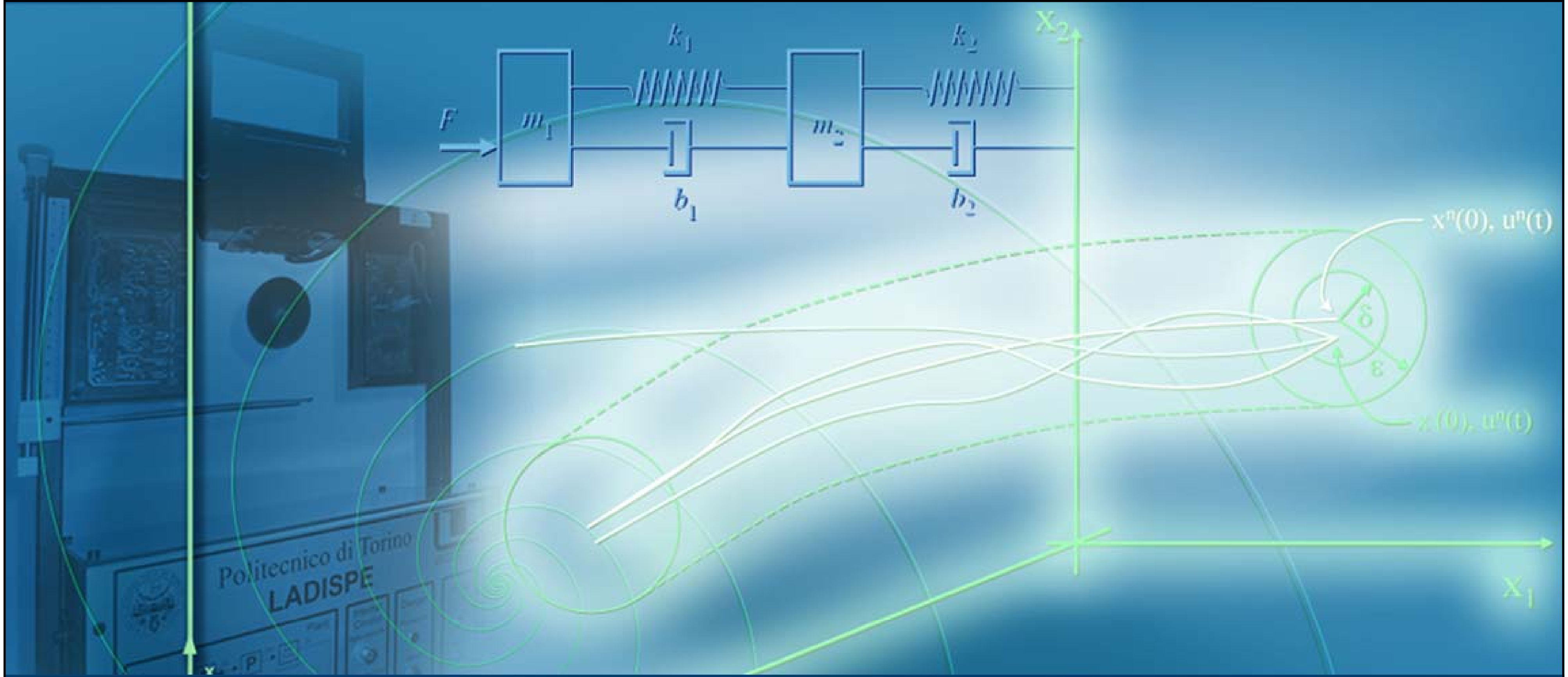
  - Le **coppie interne $T_{il}^{int}$** tengono conto dell'interazione tra l'elemento $J_i$ considerato e gli altri corpi $J_l$ tramite:
    - **Molle** ideali $K_{il}$ $\Rightarrow$ $T_{il}^{int}(t) = K_{il}[\theta_i(t) - \theta_l(t)]$
    - **Smorzatori** ideali $\beta_{il}$ $\Rightarrow$ $T_{il}^{int}(t) = \beta_{il}[\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_l(t)]$

# Interpretazione delle equazioni del moto

- Nell'equazione del moto dell'elemento $J_i$

$$\boxed{J_i \ddot{\theta}_i(t) = \sum_k T_k^{est}(t) - \sum_l^{l \neq i} T_{il}^{int}(t)}$$

  - Le coppie esterne $T_k^{est}$ trasmettono direttamente il moto a $J_i \Rightarrow$ ne incrementano o riducono la coppia d'inerzia, a seconda del loro senso di rotazione
  - Le coppie interne $T_{il}^{int}$ trasmettono invece il moto agli altri corpi $J_l$ tramite molle o smorzatori $\Rightarrow$ riducono la coppia d'inerzia di $J_i$




# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

## Sistemi in rotazione: rappresentazione di stato

## Rappresentazione in variabili di stato (1/2)

- Si scrivono le **equazioni del moto** per ogni corpo in rotazione di inerzia $J_i$ (eventualmente nulla), con posizione angolare $\theta_i$ e velocità angolare $\omega_i = \dot{\theta}_i$
- Si introducono due **variabili di stato** per ogni elemento $J_i$ in rotazione, scegliendo in particolare
  - La posizione angolare $\theta_i$
  - La velocità angolare $\dot{\theta}_i$

  Tale scelta permette di trasformare ogni equazione del moto (equazione differenziale del II ordine) in una coppia di equazioni differenziali del I ordine
- Si associa una **variabile di ingresso** a ogni coppia esterna applicata al sistema meccanico in rotazione

# Rappresentazione in variabili di stato (2/2)

- Si ricavano le **equazioni di stato** del tipo

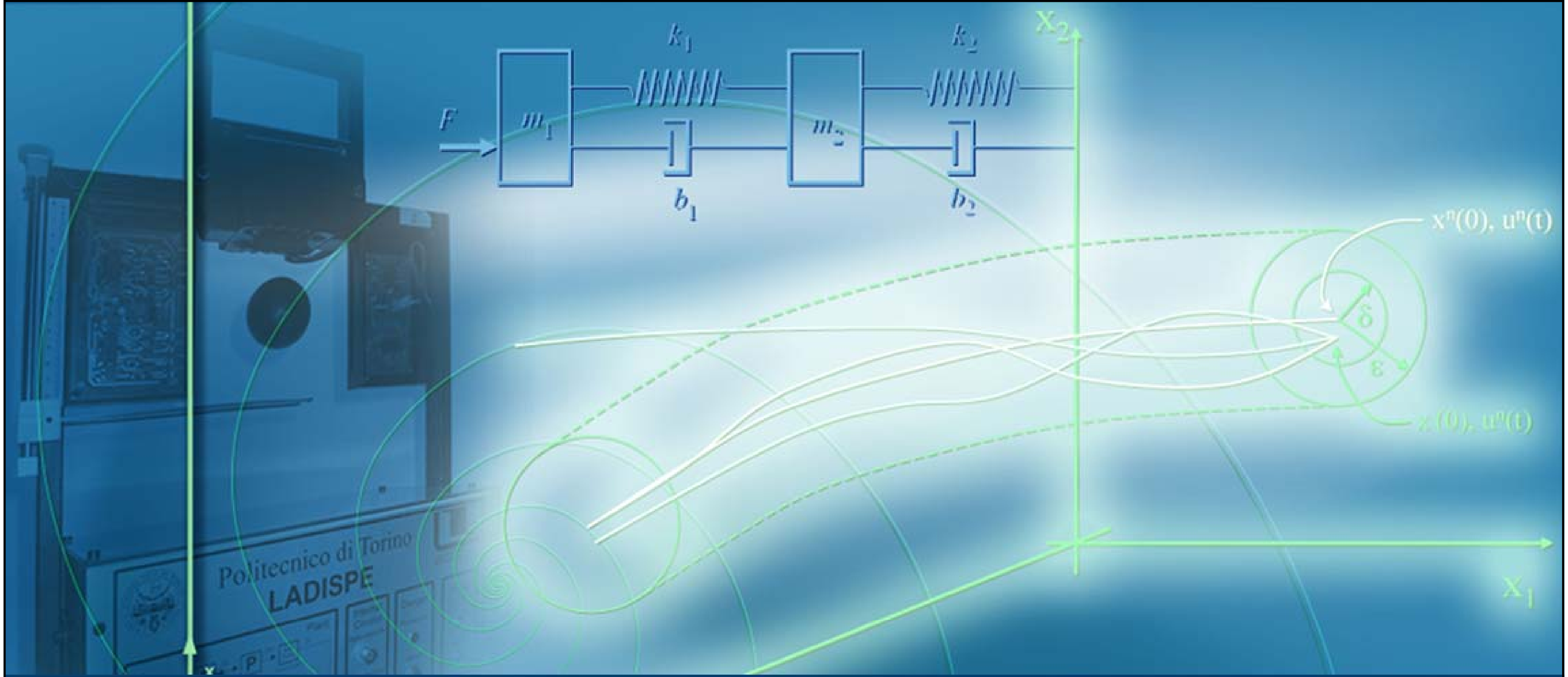
$$\boxed{\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i\big(t, x(t), u(t)\big)}$$

a partire dalle precedenti equazioni del moto, esprimendo $\dot{x}_i$ soltanto in funzione di variabili di stato e di ingresso, se necessario esplicitando il legame di derivazione temporale fra variabili di stato

- Si ricavano le **equazioni di uscita** del tipo

$$\boxed{y_k(t) = g_k\big(t, x(t), u(t)\big)}$$

esprimendo ogni variabile di interesse $y_k$ soltanto in funzione di variabili di stato e di ingresso

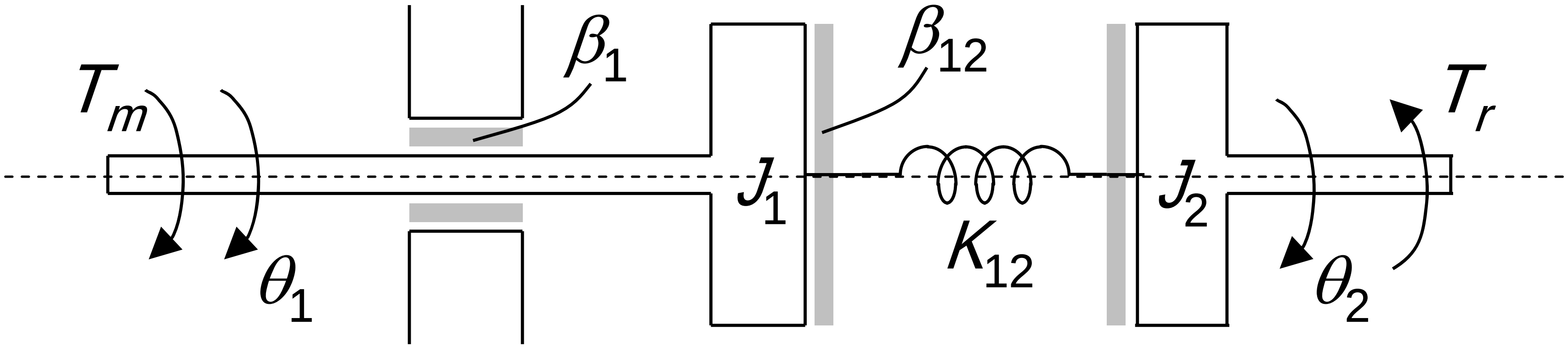



# Modellistica dei sistemi dinamici meccanici

## Sistemi in rotazione: esempi di rappresentazione

# Esempio #1 di rappresentazione (1/9)

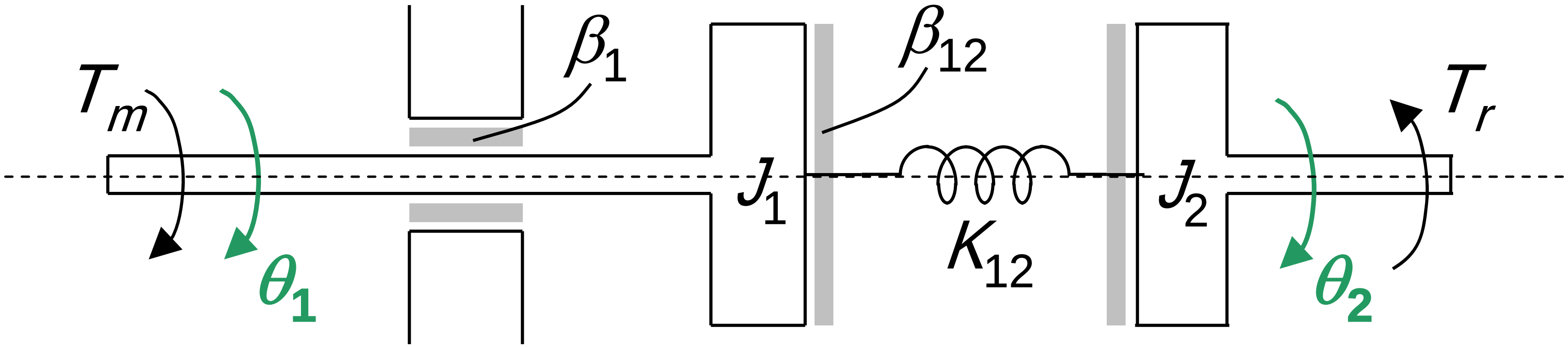
- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico in rotazione, in cui le variabili di interesse sono $\theta_2$ e $\omega_2 = \dot{\theta}_2$




- Equazioni del moto:
  1) $J_1\ddot{\theta}_1 = T_m - \left[\beta_1(\dot{\theta}_1 - 0) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\right]$
  2) $J_2\ddot{\theta}_2 = -T_r - \left[K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\right]$

# Esempio #1 di rappresentazione (2/9)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico in rotazione, in cui le variabili di interesse sono $\theta_2$ e $\omega_2 = \dot{\theta}_2$

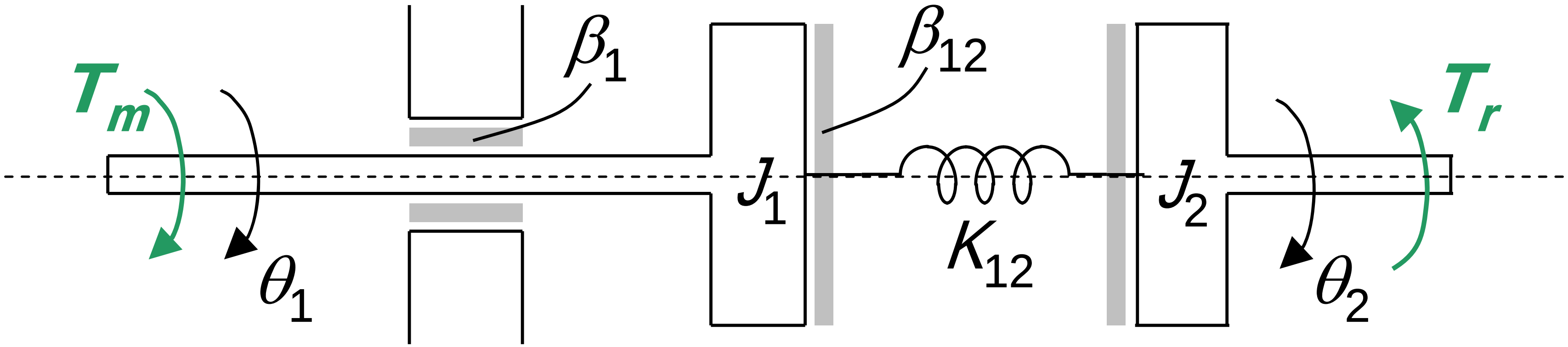



- Variabili di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

# Esempio #1 di rappresentazione (3/9)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema meccanico in rotazione, in cui le variabili di interesse sono $\theta_2$ e $\omega_2 = \dot{\theta}_2$




- Variabili di ingresso:

$$u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

# Esempio #1 di rappresentazione (4/9)

- Equazioni del moto:

  1) $J_1\ddot{\theta}_1 = T_m - \left[\beta_1(\dot{\theta}_1 - 0) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\right]$

  2) $J_2\ddot{\theta}_2 = -T_r - \left[K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = d\theta_1/dt = \dot{\theta}_1 = x_3 = f_1(t, x, u)$$

$$\dot{x}_2 = d\theta_2/dt = \dot{\theta}_2 = x_4 = f_2(t, x, u)$$

# Esempio #1 di rappresentazione (5/9)

- Equazioni del moto:

  1) $J_1\ddot{\theta}_1 = T_m - \left[\beta_1(\dot{\theta}_1 - 0) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\right]$

  2) $J_2\ddot{\theta}_2 = -T_r - \left[K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_3 = d\dot{\theta}_1 / dt = \ddot{\theta}_1 = T_m / J_1 - \left[\beta_1\dot{\theta}_1 + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\right] / J_1 =$$

$$= -\frac{K_{12}}{J_1}x_1 + \frac{K_{12}}{J_1}x_2 - \frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1}x_3 + \frac{\beta_{12}}{J_1}x_4 + \frac{u_1}{J_1} = f_3(t, x, u)$$

# Esempio #1 di rappresentazione (6/9)

- Equazioni del moto:

  1) $J_1\ddot{\theta}_1 = T_m - \left[\beta_1(\dot{\theta}_1 - 0) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\right]$

  2) $J_2\ddot{\theta}_2 = -T_r - \left[K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_4 = d\dot{\theta}_2 / dt = \ddot{\theta}_2 = -T_r / J_2 - \left[K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\right] / J_2 =$$

$$= \frac{K_{12}}{J_2} x_1 - \frac{K_{12}}{J_2} x_2 + \frac{\beta_{12}}{J_2} x_3 - \frac{\beta_{12}}{J_2} x_4 - \frac{u_2}{J_2} = f_4(t, x, u)$$

# Esempio #1 di rappresentazione (7/9)

- Equazioni del moto:

  1) $J_1\ddot{\theta}_1 = T_m - \left[\beta_1(\dot{\theta}_1 - 0) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\right]$

  2) $J_2\ddot{\theta}_2 = -T_r - \left[K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

- Equazioni di uscita:

$$y_1 = \theta_2 = x_2 = g_1(t, x, u)$$
$$y_2 = \dot{\theta}_2 = x_4 = g_2(t, x, u)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

## Esempio #1 di rappresentazione (8 / 9)

- Equaz. di stato: $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_{12}}{J_1}x_1 + \frac{K_{12}}{J_1}x_2 - \frac{\beta_1+\beta_{12}}{J_1}x_3 + \frac{\beta_{12}}{J_1}x_4 + \frac{1}{J_1}u_1 \\ \dot{x}_4 = \frac{K_{12}}{J_2}x_1 - \frac{K_{12}}{J_2}x_2 + \frac{\beta_{12}}{J_2}x_3 - \frac{\beta_{12}}{J_2}x_4 - \frac{1}{J_2}u_2 \end{cases}$$
- Equaz. di uscita: $$\begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = x_4 \end{cases}$$
- Se $J_1, J_2, K_{12}, \beta_1$ e $\beta_{12}$ sono costanti, il sistema è LTI $\Rightarrow$ ha come rappresentazione in variabili di stato
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

# Esempio #1 di rappresentazione (9/9)

- Se $J_1, J_2, K_{12}, \beta_1$ e $\beta_{12}$ sono costanti, il sistema è LTI $\Rightarrow$ ha come rappresentazione in variabili di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

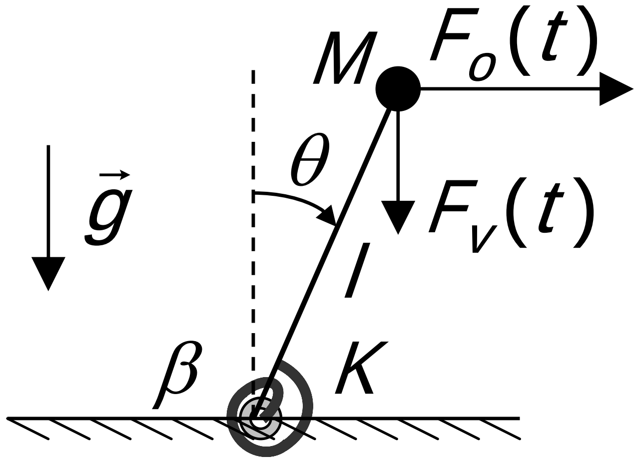
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_{12}}{J_1} & \frac{K_{12}}{J_1} & -\frac{\beta_1+\beta_{12}}{J_1} & \frac{\beta_{12}}{J_1} \\ \frac{K_{12}}{J_2} & -\frac{K_{12}}{J_2} & \frac{\beta_{12}}{J_2} & -\frac{\beta_{12}}{J_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Esempio #2 di rappresentazione (1/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **pendolo inverso** di lunghezza $l$ e massa $M$, in cui le variabili di interesse sono $\theta$ e $\omega = \dot{\theta}$

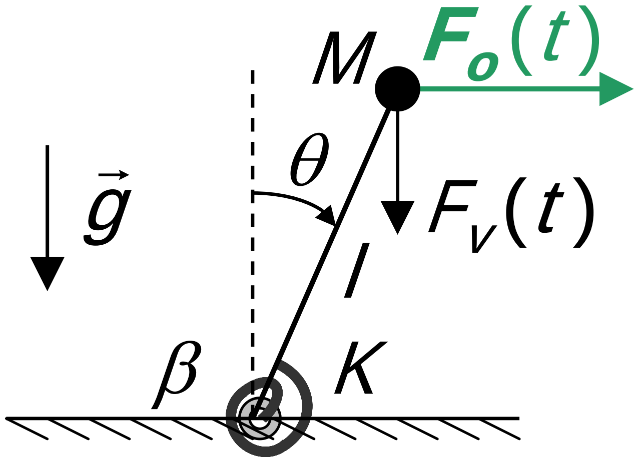


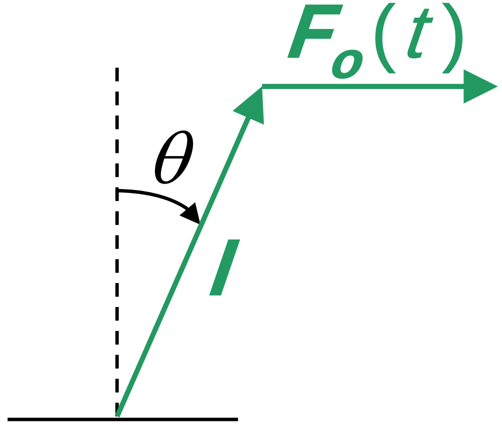

- Ipotesi: l'asta è rigida e di massa trascurabile $\Rightarrow$ il pendolo ha momento d'inerzia pari a quello di una massa puntiforme $M$ su un'orbita circolare di raggio $l$

$$J = Ml^2$$

# Esempio #2 di rappresentazione (2/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **pendolo inverso** di lunghezza $l$ e massa $M$, in cui le variabili di interesse sono $\theta$ e $\omega = \dot{\theta}$




$$\vec{T}_{F_o} = \vec{l} \wedge \vec{F}_o$$

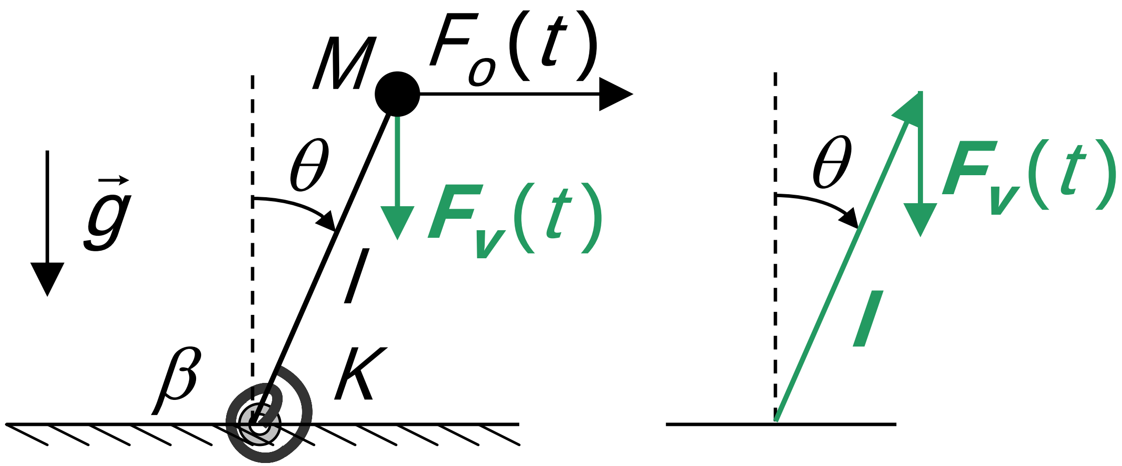
$$T_{F_o} = l\,F_o \sin(\pi/2 - \theta)$$
$$= l\,F_o \cos\theta$$

- Equazione del moto:

$$J\ddot{\theta} = T_{F_o} + \ldots =$$
$$= lF_o \cos\theta + \ldots$$

# Esempio #2 di rappresentazione (3/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **pendolo inverso** di lunghezza $l$ e massa $M$, in cui le variabili di interesse sono $\theta$ e $\omega = \dot{\theta}$




$$\vec{T}_{F_V} = \vec{l} \wedge \vec{F}_V$$

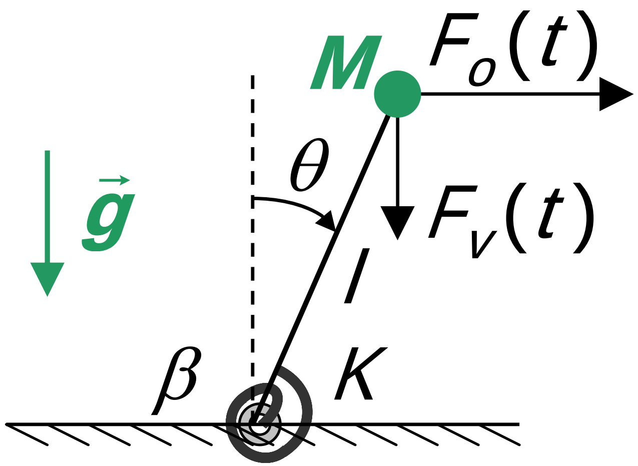
$$T_{F_V} = l F_V \sin(\pi - \theta) = l F_V \sin\theta$$

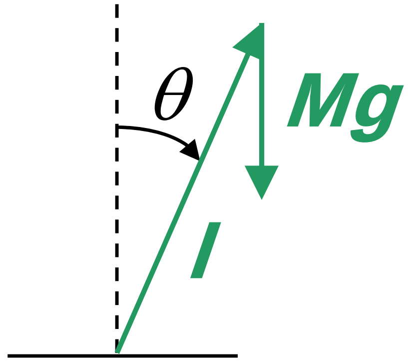
- Equazione del moto:

$$J\ddot{\theta} = T_{F_o} + T_{F_V} + \ldots = \\ = lF_o \cos\theta + lF_V \sin\theta + \ldots$$

# Esempio #2 di rappresentazione (4/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **pendolo inverso** di lunghezza $l$ e massa $M$, in cui le variabili di interesse sono $\theta$ e $\omega = \dot{\theta}$




$$\vec{T}_{Mg} = \vec{l} \wedge M\vec{g}$$

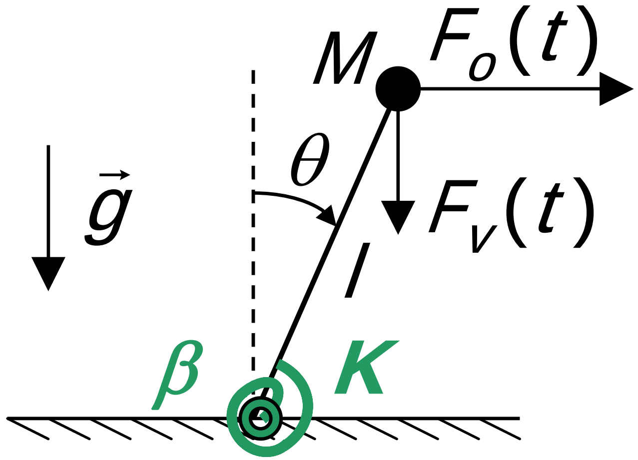
$$T_{Mg} = l\,Mg\sin(\pi - \theta)$$
$$= l\,Mg\sin\theta$$

- Equazione del moto:

$$J\ddot{\theta} = T_{F_o} + T_{F_v} + T_{Mg} - [\ \ldots =$$
$$= lF_o\cos\theta + lF_v\sin\theta + lMg\sin\theta - \ldots$$

# Esempio #2 di rappresentazione (5/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **pendolo inverso** di lunghezza $l$ e massa $M$, in cui le variabili di interesse sono $\theta$ e $\omega = \dot{\theta}$

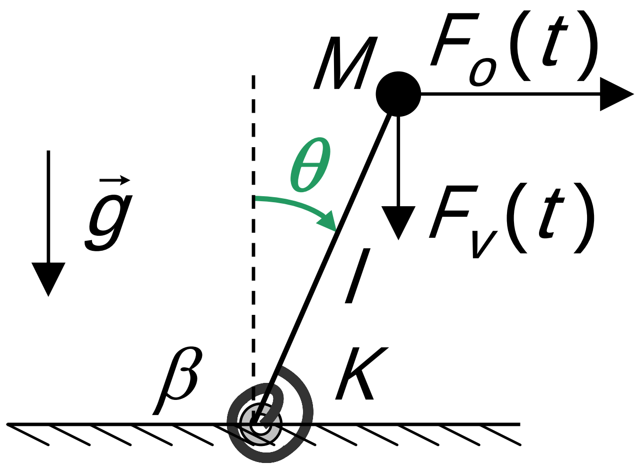



- Equazione del moto:

$$J\ddot{\theta} = T_{F_o} + T_{F_v} + T_{Mg} - \left[K(\theta - 0) + \beta(\dot{\theta} - 0)\right] =$$
$$= lF_o\cos\theta + lF_v\sin\theta + lMg\sin\theta - K\theta - \beta\dot{\theta}$$

# Esempio #2 di rappresentazione (6/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **pendolo inverso** di lunghezza $l$ e massa $M$, in cui le variabili di interesse sono $\theta$ e $\omega = \dot{\theta}$

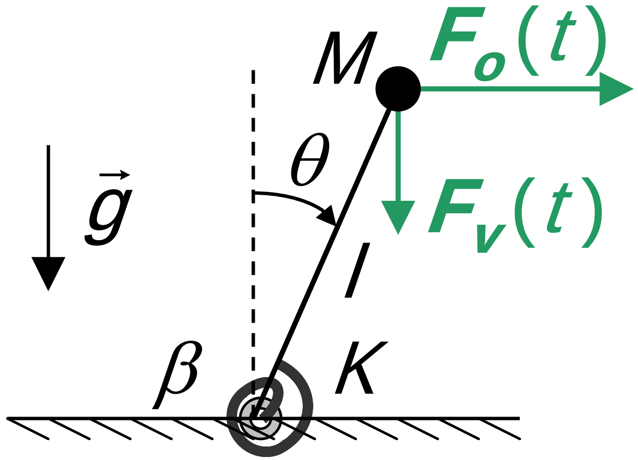



- Variabili di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

# Esempio #2 di rappresentazione (7/10)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente **pendolo inverso** di lunghezza *l* e massa *M*, in cui le variabili di interesse sono $\theta$ e $\omega = \dot{\theta}$




- Variabili di ingresso:

$$u(t) = \begin{bmatrix} F_o(t) \\ F_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

# Esempio #2 di rappresentazione (8/10)

- Equazione del moto:

$$J\ddot{\theta} = lF_o\cos\theta + lF_v\sin\theta + lMg\sin\theta - K\theta - \beta\dot{\theta},\; J = Ml^2$$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix}\theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix}F_o(t)\\ F_v(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = d\theta/dt = \dot{\theta} = x_2 = f_1(t, x, u)$$

$$\dot{x}_2 = d\dot{\theta}/dt = \ddot{\theta} = \frac{1}{Ml^2}\left[lF_o\cos\theta + lF_v\sin\theta + lMg\sin\theta - K\theta - \beta\dot{\theta}\right] =$$

$$= \frac{1}{Ml}u_1\cos x_1 + \frac{1}{Ml}u_2\sin x_1 + \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{K}{Ml^2}x_1 - \frac{\beta}{Ml^2}x_2 = f_2(t, x, u)$$

# Esempio #2 di rappresentazione (9/10)

- Equazione del moto:

$$J\ddot{\theta} = lF_o \cos\theta + lF_v \sin\theta + lMg\sin\theta - K\theta - \beta\dot{\theta}, \; J = Ml^2$$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} F_o(t) \\ F_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

- Equazioni di uscita:

$$y_1 = \theta = x_1 = g_1(t, x, u)$$

$$y_2 = \dot{\theta} = x_2 = g_2(t, x, u)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

# Esempio #2 di rappresentazione (10/10)

- Equaz. di stato: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u_1 \cos x_1}{Ml} + \dfrac{u_2 \sin x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l} \sin x_1 - \dfrac{K x_1}{Ml^2} - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} \end{cases}$
- Equaz. di uscita: $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$
- Il sistema è non lineare, a causa dei vari termini trigonometrici e dei prodotti incrociati stati-ingressi
- Il sistema è inoltre dinamico, a tempo continuo, a dimensione finita ($n = 2$), MIMO ($p = q = 2$), proprio, stazionario se $M$, $l$, $K$, $\beta$ e $g$ sono costanti
- La forza peso $Mg$ è esterna al sistema ma costante $\Rightarrow$ non compare nel vettore di ingresso $u$