

## III esercitazione presso il LAIB

**Esercizio #1: risposta di sistemi del I ordine ad ingressi canonici**

Dati i sistemi dinamici SISO LTI a tempo continuo descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{10}{s-5}, \quad G_2(s) = \frac{10}{s}, \quad G_3(s) = \frac{10}{s+5}, \quad G_4(s) = \frac{10}{s+20}$$

- 1) se ne traccino mediante MATLAB i rispettivi grafici degli andamenti dell'evoluzione temporale delle risposte  $y(t)$  all'impulso unitario utilizzando i comandi `impulse` oppure `ltiview`;

ove possibile, si valutino per via grafica le costanti di tempo  $\tau$  (date dal piede della tangente alla risposta iniziale  $y_0 = y(t=0)$ ) e si verifichi che i valori ricavati sono in accordo con la relazione  $\tau = -1/p$ , essendo  $p$  il polo del sistema considerato;

ove possibile, si ricavino per via grafica i valori finali  $y_\infty$  delle risposte  $y(t)$  e se ne verifichi l'uguaglianza con i risultati forniti dal teorema del valore finale;

- 2) se ne traccino mediante MATLAB i rispettivi grafici degli andamenti dell'evoluzione temporale delle risposte  $y(t)$  al gradino unitario utilizzando i comandi `step` oppure `ltiview`;
- ove possibile, si valutino per via grafica le costanti di tempo  $\tau$  (date dall'intersezione della tangente alla risposta iniziale  $y_0$  con la retta orizzontale tangente alla risposta finale  $y_\infty$ ) e si verifichi che i valori ricavati sono in accordo con la relazione  $\tau = -1/p$ , essendo  $p$  il polo del sistema considerato;

ove possibile, si ricavino per via grafica i valori finali  $y_\infty$  delle risposte  $y(t)$  e se ne verifichi l'uguaglianza con i risultati forniti dal teorema del valore finale; si osservi che all'istante  $t = \tau$  ( $t = 2\tau$ ;  $t = 3\tau$ ) la risposta  $y(t)$  ha raggiunto circa il 63% (86%; 95%) del suo valore finale  $y_\infty$ ;

ove possibile, si determinino per via grafica i tempi di salita  $t_S$  (pari al tempo necessario affinché  $y(t)$  passi per la prima volta dal 10% al 90% del valore finale  $y_\infty$ ).

*Nota:* l'espressione "ove possibile" precedentemente usata sottintende che si debba valutare soprattutto dal punto di vista teorico se la richiesta effettuata abbia senso oppure no.

**Esercizio #2: risposta al gradino di sistemi del II ordine**

- 1) Dati i sistemi dinamici SISO LTI a tempo continuo descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento (caratterizzate da due poli reali e nessuno zero):

$$G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+10)}, \quad G_2(s) = \frac{2}{(s+1)^2}, \quad G_3(s) = \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)}$$

se ne confrontino mediante MATLAB i rispettivi grafici degli andamenti dell'evoluzione temporale delle risposte  $y(t)$  al gradino unitario, osservando l'effetto dei diversi valori del secondo polo;

si ricavino per via grafica i valori finali  $y_\infty$  delle risposte  $y(t)$  e se ne verifichi l'uguaglianza con i risultati forniti dal teorema del valore finale;

si determinino per via grafica i tempi di salita  $t_S$  (pari al tempo necessario affinché  $y(t)$  passi per la prima volta dal 10% al 90% del valore finale  $y_\infty$ ).

- 2) Dato il sistema dinamico SISO LTI a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento (caratterizzata da due poli reali ed uno zero in  $z$ ):

$$G_4(s) = \frac{5}{-z} \cdot \frac{s - z}{(s + 1)(s + 5)}$$

si confrontino mediante MATLAB i grafici delle risposte  $y(t)$  al gradino unitario corrispondenti alle seguenti scelte del valore dello zero:

- 2.a)  $z_1 = 100, z_2 = 10, z_3 = 1, z_4 = 0.5$  (compare una sottoelongazione);  
 2.b)  $z_5 = -0.9, z_6 = -0.5, z_7 = -0.1$  (compare una sovraelongazione, definita come  $\hat{s} = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$  ed espressa normalmente in percentuale);  
 2.c)  $z_8 = -100, z_9 = -10, z_{10} = -2$  (cambia la velocità di risposta);

si determinino per via grafica i tempi di salita  $t_S$  (pari al tempo necessario affinché  $y(t)$  passi per la prima volta dal 10% al 90% del valore finale  $y_\infty$ ).

- 3) Dato il sistema dinamico SISO LTI a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento (caratterizzata da nessuno zero e due poli complessi coniugati, purché  $\omega_n > 0$  e  $|\zeta| < 1$ ):

$$G_5(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

si confrontino mediante MATLAB i grafici delle risposte  $y(t)$  al gradino unitario corrispondenti alle seguenti scelte dei valori dei parametri  $\omega_n$  e  $\zeta$ :

- 3.a)  $\omega_n = 2, \zeta = 0.5$ ;  
 3.b)  $\omega_n = 2, \zeta = 0.25$ ;  
 3.c)  $\omega_n = 1, \zeta = 0.5$ ;

si valutino per via grafica le massime sovraelongazioni  $\hat{s} = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$  e si verifichi che i valori ricavati sono in accordo con la relazione

$$\hat{s} = \exp\left(-\pi\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}\right);$$

si valutino per via grafica i tempi di salita  $t_S$  (pari al tempo necessario perché  $y(t)$  raggiunga per la prima volta il valore  $y_\infty$  partendo dal valore iniziale  $y_0$ ) e si verifichi che i valori ricavati sono in accordo con la relazione:

$$t_S = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \left( \pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right);$$

si valutino per via grafica i tempi di assestamento al 5%  $t_{a,5\%}$  (pari al tempo necessario affinché  $y(t)$  differisca definitivamente dal valore finale  $y_\infty$  di non più del 5%).

### Esercizio #3: stabilità di sistemi dinamici LTI

- 1) Dati i sistemi dinamici LTI a tempo continuo aventi come rappresentazione in variabili di stato

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

in cui  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 3]$ ,  $D = [0]$  e la matrice di stato  $A$  assume uno dei seguenti valori:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

simulare l'evoluzione dello stato  $x(t)$  a partire da una arbitraria condizione iniziale  $x(t=0) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ed assumendo nullo l'ingresso:  $u(t) = \bar{u} = 0, \forall t > 0$ . Verificare che gli andamenti ottenuti siano in accordo con i risultati forniti dall'analisi di stabilità dei sistemi considerati.

- 2) Dati i sistemi dinamici LTI a tempo discreto aventi come rappresentazione in variabili di stato

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

in cui le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sono le stesse considerate al punto precedente, simulare l'evoluzione dello stato  $x(k)$  a partire da una arbitraria condizione iniziale  $x(k=0) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ed assumendo nullo l'ingresso:  $u(k) = \bar{u} = 0, \forall k > 0$ . Verificare che gli andamenti ottenuti siano in accordo con i risultati forniti dall'analisi di stabilità dei sistemi considerati.