

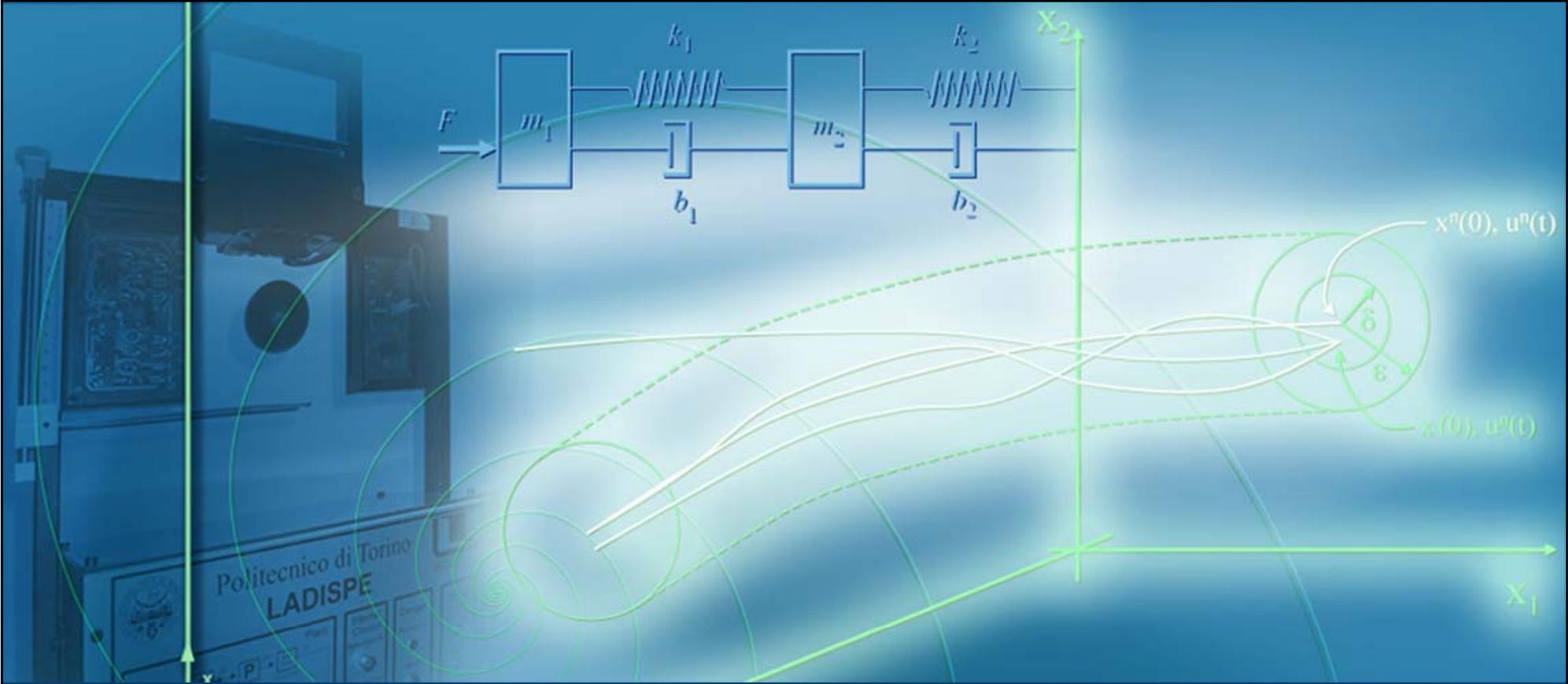
Proprietà strutturali e leggi di controllo

Retroazione statica dallo stato

$$y(t) = Cx(t)$$

Retroazione statica dallo stato

- La legge di controllo
- Esempi di calcolo di leggi di controllo
- Il problema della regolazione



Retroazione statica dallo stato

La legge di controllo

$$y(t) = Cx(t)$$

Introduzione (1/2)

- Consideriamo un sistema dinamico LTI TC a un ingresso ($u(t) \in \mathbb{R}^p \rightarrow p = 1 \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) descritto dalle equazioni di stato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- Ricordiamo che:
 - Il comportamento dinamico del sistema dipende dagli autovalori della matrice A
 - La possibilità di modificare tale comportamento dinamico tramite l'ingresso è descritta dalla proprietà di raggiungibilità
 - Le caratteristiche di raggiungibilità dipendono dalla coppia (A, B)

$$y(t) = Cx(t)$$

Introduzione (2/2)

- Vogliamo studiare come si può agire sull'ingresso, in modo da modificare il comportamento dinamico del sistema al fine di:
 - Rendere asintoticamente stabile un sistema instabile
 - Cambiare le caratteristiche del movimento di un sistema (asintoticamente) stabile tramite l'imposizione di modi naturali convergenti che ne migliorino le proprietà di:
 - Smorzamento
 - Rapidità di convergenza
 - Portare lo stato del sistema in un dato stato di equilibrio

$$y(t) = Cx(t)$$

Legge di controllo

- Per modificare il comportamento dinamico del sistema, l'ingresso $u(t)$ deve poter agire in modo da cambiare gli autovalori della matrice A
- Questo può avvenire se $u(t)$ dipende dallo stato $x(t)$ secondo la seguente **legge di controllo**

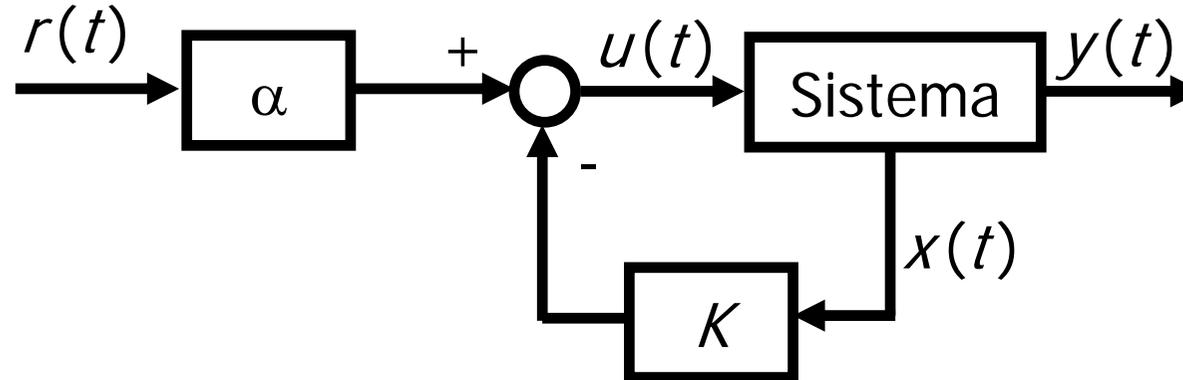
$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}$
- $K \in \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow$ vettore o matrice dei guadagni
- $r(t) \rightarrow$ ingresso esterno (riferimento)
- $\alpha \in \mathbb{R}$

$$y(t) = Cx(t)$$

Retroazione statica dallo stato

- Consideriamo lo schema:



- L'ingresso $u(t)$ è la somma di due contributi:
- $\alpha r(t) \rightarrow$ azione diretta o feedforward (serve per imporre un dato movimento ad es. un equilibrio)
 - $K x(t) \rightarrow$ **retroazione dallo stato** (state feedback)
- L'ingresso $u(t) = -K x(t) + \alpha r(t)$ rappresenta quindi una **legge di controllo per retroazione statica dallo stato**

$$y(t) = Cx(t)$$

Equazioni del sistema controllato

- Sostituendo l'espressione della legge di controllo:

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$$

nelle equazioni di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- Si ottengono le equazioni di stato del sistema controllato complessivo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \underset{\substack{\uparrow \\ u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}}{=} Ax(t) + B[-Kx(t) + \alpha r(t)] = \\ &= (A - BK)x(t) + B\alpha r(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Il problema di assegnazione degli autovalori

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B\alpha r(t)$$

- Vogliamo studiare sotto quali condizioni, tramite un'opportuna scelta della matrice K , è possibile fare in modo che gli n autovalori della matrice $A - BK$ coincidano con n numeri fissati arbitrariamente
- Tale problema va sotto il nome di:
assegnazione degli autovalori mediante retroazione statica dallo stato

$$y(t) = Cx(t)$$

Il teorema di assegnazione degli autovalori

- Al proposito, vale il seguente

Teorema di assegnazione degli autovalori

- Il problema di assegnazione degli autovalori mediante retroazione statica dallo stato ammette soluzione se e soltanto se la coppia di matrici (A, B) soddisfa la condizione di completa raggiungibilità:

$$\rho(M_R) = \rho\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Commenti

- ▶ Pertanto, se un sistema dinamico risulta **completamente raggiungibile**, è sempre possibile determinare la matrice dei guadagni K di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo $u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$ in modo da assegnare arbitrariamente tutti gli n autovalori della matrice $A - BK$
- ▶ Nel caso in cui il sistema non risulti completamente raggiungibile, la legge di controllo può modificare solo gli r autovalori corrispondenti alla sua parte raggiungibile

$$y(t) = Cx(t)$$

Sistemi a più ingressi

- Il teorema di assegnazione degli autovalori vale anche nel caso di sistemi a più ingressi
($u(t) \in \mathbb{R}^p \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n \times p}$)

- La legge di controllo ha la medesima forma:

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$$

ma:

- $K \in \mathbb{R}^{p \times n} \rightarrow$ matrice dei guadagni
- In generale anche l'ingresso $r(t)$ può avere più componenti (tipicamente pari alla dimensione q dell'uscita $y(t) \rightarrow r(t) \in \mathbb{R}^q$). In tal caso:
 - $\alpha \in \mathbb{R}^{p \times q}$

$$y(t) = Cx(t)$$

Equazioni di ingresso – stato – uscita (1/2)

- Vogliamo ricavare le equazioni di ingresso – stato – uscita quando al sistema dinamico LTI TC:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

viene applicata **legge di controllo per retroazione statica dallo stato**

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Equazioni di ingresso – stato – uscita (2/2)

► Si ha:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \underset{\substack{\uparrow \\ u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}}{=} Ax(t) + B[-Kx(t) + \alpha r(t)] =$$

$$= (A - BK)x(t) + B\alpha r(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \underset{\substack{\uparrow \\ u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}}{=} Cx(t) + D[-Kx(t) + \alpha r(t)] =$$

$$= (C - DK)x(t) + D\alpha r(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Matrice di trasferimento

► Quindi:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B\alpha r(t)$$

$$y(t) = (C - DK)x(t) + D\alpha r(t)$$

► La matrice di trasferimento $H(s)$ tra l'ingresso $r(t)$ (riferimento) e l'uscita $y(t)$ si calcola come:

$$H(s) = \left\{ (C - DK) \left[sI - (A - BK) \right]^{-1} B + D \right\} \alpha$$



Il caso di sistemi dinamici LTI TD

- Il teorema di assegnazione degli autovalori vale anche per i sistemi LTI TD del tipo:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

nei quali la **legge di controllo per retroazione statica dallo stato** assume la forma:

$$u(k) = -Kx(k) + ar(k)$$

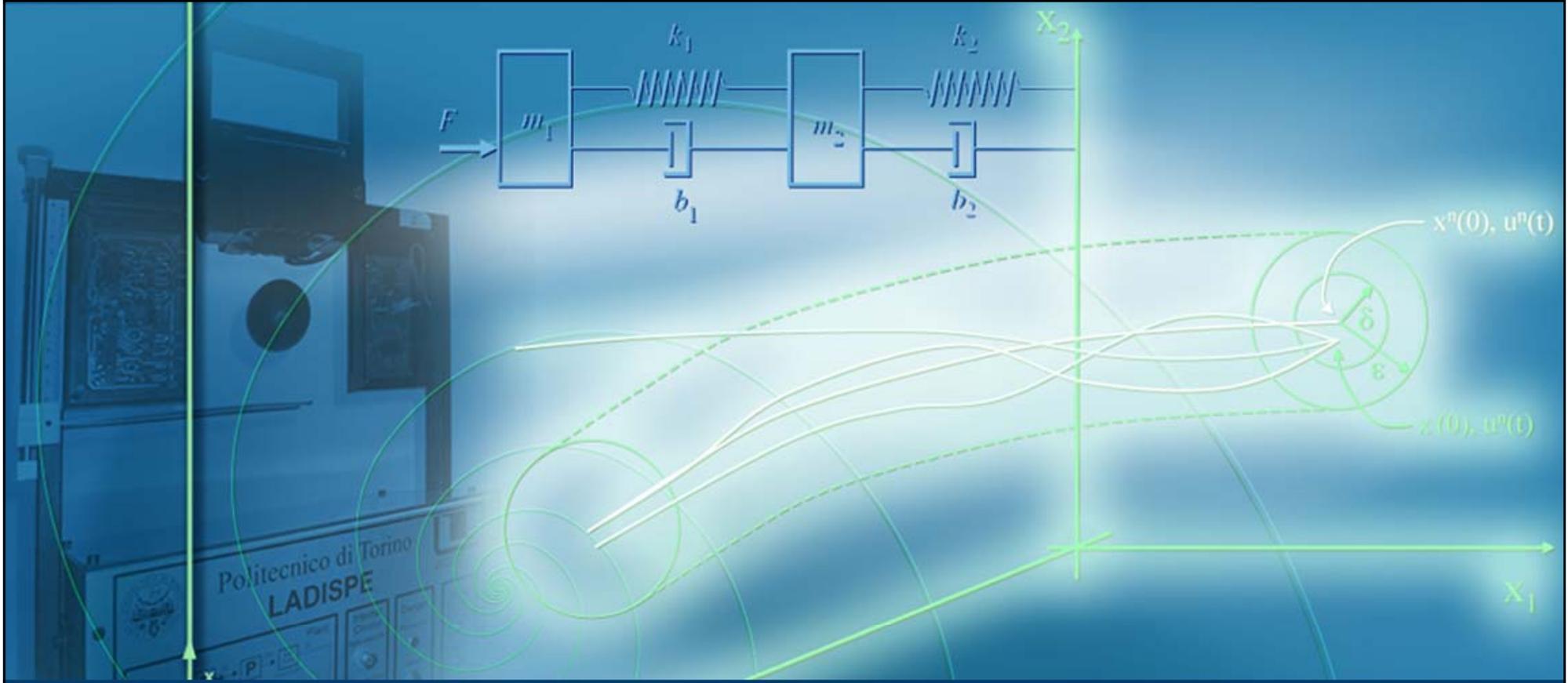
Il caso di sistemi dinamici LTI TD

- Le equazioni di ingresso – stato – uscita del sistema controllato mediante retroazione statica dallo stato sono:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= (A - BK)x(k) + B\alpha r(k) \\ y(k) &= (C - DK)x(k) + D\alpha r(k)\end{aligned}$$

- La matrice di trasferimento $H(z)$ tra l'ingresso $r(k)$ (riferimento) e l'uscita $y(k)$ è data da:

$$H(z) = \left\{ (C - DK) \left[zI - (A - BK) \right]^{-1} B + D \right\} \alpha$$



Retroazione statica dallo stato

Esempi di calcolo di leggi di controllo



Esempio 1: formulazione del problema

- Dato il seguente sistema dinamico LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

trovare, se possibile, i coefficienti della matrice dei guadagni K di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo:

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$$

che permette di assegnare gli autovalori del sistema retroazionato in: $\lambda_{1,des} = -2$ e $\lambda_{2,des} = -3$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: procedimento di soluzione

- Per determinare gli elementi della matrice K occorre procedere come segue:
 - Verificare la completa raggiungibilità del sistema (in caso contrario non è possibile calcolare K)
 - Dato l'insieme degli autovalori da assegnare $\{\lambda_{1,des}, \dots, \lambda_{n,des}\}$, si calcola il polinomio caratteristico desiderato $p_{des}(\lambda)$
 - Si calcola in funzione degli elementi incogniti di K il polinomio caratteristico della matrice $A - BK$: $p_{A-BK}(\lambda)$
 - Si determinano gli elementi incogniti di K applicando il principio di identità dei polinomi:

$$p_{A-BK}(\lambda) = p_{des}(\lambda)$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: verifica della raggiungibilità

- Le matrici A e B del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Poiché il sistema è di ordine $n = 2$, la matrice di raggiungibilità è della forma:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$

- Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_R) = 2$$

- Per cui il sistema è **completamente raggiungibile**



Esempio 1: determinazione di $p_{des}(\lambda)$

- Gli autovalori desiderati da assegnare sono:

$$\lambda_{1,des} = -2, \lambda_{2,des} = -3$$

- Il corrispondente polinomio caratteristico desiderato è quindi:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_{i,des}) = \\ &= (\lambda - \lambda_{1,des})(\lambda - \lambda_{2,des}) = \\ &= (\lambda - (-2))(\lambda - (-3)) = \\ &= \lambda^2 + 5\lambda + 6 \end{aligned}$$



Esempio 1: determinazione di $p_{A-BK}(\lambda)$

- Poiché $n = 2$, la matrice dei guadagni K è della forma:

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

si ha

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + k_1 & 3 + k_2 \\ 4 - 2k_1 & 2 - 2k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Esempio 1: calcolo di $p_{A-BK}(\lambda)$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 1 + k_1 & 3 + k_2 \\ 4 - 2k_1 & 2 - 2k_2 \end{bmatrix}$$

► Per cui:

$$\begin{aligned} p_{A-BK}(\lambda) &= \det(\lambda I - (A - BK)) = \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda - (1 + k_1) & -(3 + k_2) \\ -(4 - 2k_1) & \lambda - (2 - 2k_2) \end{bmatrix} = \\ &= [\lambda - (1 + k_1)][\lambda - (2 - 2k_2)] - (3 + k_2)(4 - 2k_1) = \\ &= \lambda^2 + (-3 - k_1 + 2k_2)\lambda + 8k_1 - 6k_2 - 10 \end{aligned}$$



Esempio 1: calcolo di K

► Affinché i polinomi:

$$p_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

e

$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^2 + (-3 - k_1 + 2k_2)\lambda + 8k_1 - 6k_2 - 10$$

abbiano le stesse radici, per il principio di identità dei polinomi, deve risultare:

$$\begin{cases} -3 - k_1 + 2k_2 = 5 \\ 8k_1 - 6k_2 - 10 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 8 \\ k_2 = 8 \end{cases}$$

► Per cui:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix}$$



Esempio 2: formulazione del problema

► Dato il seguente sistema LTI TD:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.03 & -0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

trovare, se possibile, i coefficienti della matrice dei guadagni K di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo:

$$u(k) = -Kx(k) + \alpha r(k)$$

che permette di assegnare gli autovalori del sistema retroazionato in: $\lambda_{1,des} = \lambda_{2,des} = \lambda_{3,des} = 0.2$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 2: procedimento di soluzione

- Per determinare gli elementi della matrice K occorre procedere come segue:
 - Verificare la completa raggiungibilità del sistema (in caso contrario non è possibile calcolare K)
 - Dato l'insieme degli autovalori da assegnare $\{\lambda_{1,des}, \dots, \lambda_{n,des}\}$, si calcola il polinomio caratteristico desiderato $p_{des}(\lambda)$
 - Si calcola in funzione degli elementi incogniti di K il polinomio caratteristico della matrice $A - BK$: $p_{A-BK}(\lambda)$
 - Si determinano gli elementi incogniti di K applicando il principio di identità dei polinomi:

$$p_{A-BK}(\lambda) = p_{des}(\lambda)$$



Esempio 2: analisi della raggiungibilità

► Le matrici A e B del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.03 & -0.3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

► Notiamo che:

- La matrice A è in forma compagna inferiore
 - La matrice B ha tutti gli elementi nulli tranne l'ultimo
- → Il sistema dato è in forma canonica di raggiungibilità e pertanto risulta completamente raggiungibile

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 2: determinazione di $p_{des}(\lambda)$

- Gli autovalori desiderati da assegnare sono:

$$\lambda_{1,des} = \lambda_{2,des} = \lambda_{3,des} = 0.2$$

- Il corrispondente polinomio caratteristico desiderato è quindi:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda - 0.2)^3 = \lambda^3 - 0.6\lambda^2 + 0.12\lambda - 0.008$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 2: determinazione di $p_{A-BK}(\lambda)$

- Poiché $n = 3$, la matrice dei guadagni K è della forma:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

si ha

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.03 & -0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.03 & -0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 - k_1 & -0.03 - k_2 & -0.3 - k_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 2: calcolo di $p_{A-BK}(\lambda)$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 - k_1 & -0.03 - k_2 & -0.3 - k_3 \end{bmatrix}$$

- Poiché $A - BK$ è in forma compagna inferiore, si può direttamente determinare il polinomio caratteristico in base ai coefficienti dell'ultima riga:

$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^3 + (0.3 + k_3)\lambda^2 + (0.03 + k_2)\lambda + 0.001 + k_1$$



Esempio 2: calcolo di K

► Affinché i polinomi:

$$p_{des}(\lambda) = \lambda^3 - 0.6\lambda^2 + 0.12\lambda - 0.008$$

e

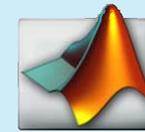
$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^3 + (0.3 + k_3)\lambda^2 + (0.03 + k_2)\lambda + 0.001 + k_1$$

abbiano le stesse radici, deve risultare:

$$\begin{cases} 0.3 + k_3 = -0.6 \\ 0.03 + k_2 = 0.12 \\ 0.001 + k_1 = -0.008 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_3 = -0.9 \\ k_2 = 0.09 \\ k_1 = -0.009 \end{cases}$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [-0.009 \quad 0.09 \quad -0.9]$$

$$y(t) = Cx(t)$$



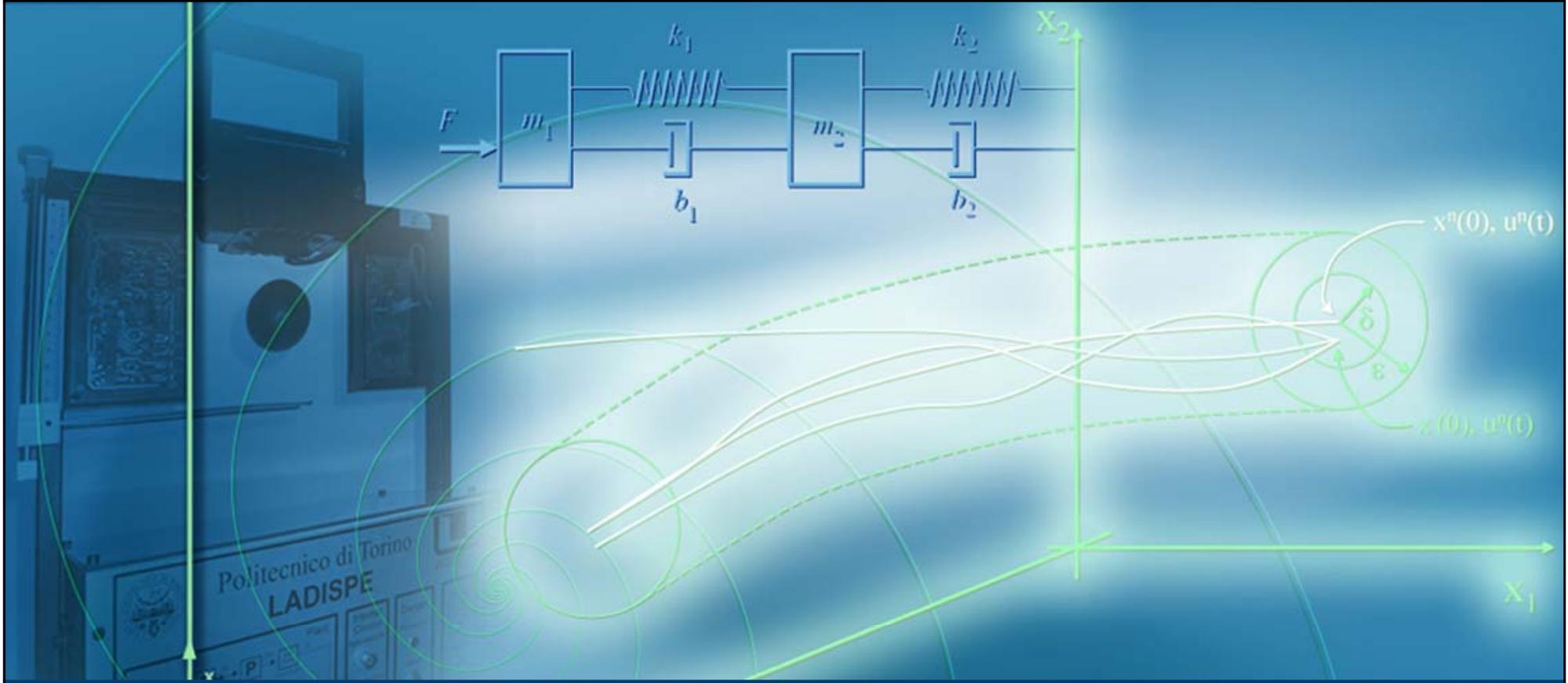
MatLab

- In MatLab, la matrice dei guadagni K può essere calcolata, nel caso di autovalori di molteplicità unitaria, mediante l'istruzione: $K = \text{place}(A, B, p)$

- A, B : matrici della rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

- p : vettore contenente gli autovalori da assegnare
- Se invece gli autovalori da assegnare non hanno molteplicità unitaria, bisogna usare l'istruzione:
 $K = \text{acker}(A, B, p)$
- Per maggiori dettagli sulle istruzioni, digitare `help place`, `help acker` al prompt di MatLab



Retroazione statica dallo stato

Il problema della regolazione

Stati ed uscita di equilibrio (1/2)

- Consideriamo il sistema dinamico LTI TC:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + B\alpha r(t) \\ y(t) &= (C - DK)x(t) + D\alpha r(t)\end{aligned}$$

- Supponiamo che:
 - La matrice K sia tale da rendere il sistema asintoticamente stabile
 - $r(t) \in \mathbb{R}, y(t) \in \mathbb{R} \rightarrow$ sistema SISO, $\alpha \in \mathbb{R}$
 - $r(t) = \bar{r} = \text{costante}, \forall t$
- Vogliamo calcolare lo stato \bar{x} e l'uscita \bar{y} di equilibrio corrispondenti all'ingresso $r(t) = \bar{r}$

Stati ed uscita di equilibrio (2/2)

- In base alla condizione di equilibrio per sistemi dinamici LTI TC, $r(t) = \bar{r}$, $x(t) = \bar{x}$, $y(t) = \bar{y}$, $\forall t$ si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= 0 = (A - BK)\bar{x} + B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} &= (C - DK)\bar{x} + D\alpha\bar{r}\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -(A - BK)^{-1} B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} &= \left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right] \alpha\bar{r}\end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

La regolazione dell'uscita

- Data l'asintotica stabilità del sistema considerato, applicando l'ingresso costante \bar{r} , i movimenti dello stato e dell'uscita tenderanno, per tempi sufficientemente grandi, ai loro rispettivi valori di equilibrio \bar{x} e \bar{y} per qualsiasi condizione iniziale
- Ci chiediamo se è possibile fare in modo che il valore di equilibrio dell'uscita \bar{y} coincida con \bar{r} :

$$\bar{y} = \bar{r}$$

- Tale problema è noto come:
regolazione dell'uscita

$$y(t) = Cx(t)$$

Condizione di regolazione (1/2)

$$\bar{y} = \left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right] \alpha \bar{r}$$

- Se $\bar{r} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \bar{r} = 0, \forall t, \forall \alpha$
- Più in generale, se $\bar{r} \neq 0$, allora per ottenere la condizione

$$\bar{y} = \bar{r}$$

deve risultare:

$$\left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right] \alpha = 1$$

Condizione di regolazione (2/2)

$$\left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right] \alpha = 1$$

- Si può agire sul parametro α
- Infatti, dal momento che risulta:

$$\alpha \in \mathbb{R}, -(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \in \mathbb{R}$$

per ottenere la condizione di regolazione si pone:

$$\alpha = \left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right]^{-1}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Sistemi LTI TD: equilibrio

- Per i sistemi dinamici LTI TD SISO controllati mediante retroazione statica dallo stato, le equazioni di ingresso – stato – uscita sono:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= (A - BK)x(k) + B\alpha r(k) \\y(k) &= (C - DK)x(k) + D\alpha r(k)\end{aligned}$$

- La condizione di equilibrio è:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (A - BK)\bar{x} + B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} &= (C - DK)\bar{x} + D\alpha\bar{r}\end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Sistemi LTI TD: condizione di regolazione

► Quindi

$$\bar{x} = \left[I - (A - BK) \right]^{-1} B \alpha \bar{r}$$

$$\bar{y} = \left\{ (C - DK) \left[I - (A - BK) \right]^{-1} B + D \right\} \alpha \bar{r}$$

► La regolazione dell'uscita

$$\bar{y} = \bar{r}$$

si ottiene ponendo:

$$\alpha = \left\{ (C - DK) \left[I - (A - BK) \right]^{-1} B + D \right\}^{-1}$$



Esempio: formulazione del problema

- Al seguente sistema dinamico LTI TC raggiungibile:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} x(t)$$

viene applicata una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo:

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$$

con $K = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$. Supponendo $r(t) = \bar{r} = 3\varepsilon(t)$, calcolare il valore di α in modo da ottenere la regolazione dell'uscita $\bar{y} = \bar{r}$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio: procedimento di soluzione

- Per determinare il valore di α occorre procedere come segue:
 - Verificare che la retroazione dallo stato ottenuta mediante la matrice K stabilizzi asintoticamente il sistema
 - Calcolare α in base alla condizione di regolazione



Esempio: verifica dell'asintotica stabilità

- Calcolando la matrice $A - BK$:

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Si nota che gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -4$
- Il sistema dato risulta quindi asintoticamente stabile



Esempio: calcolo di α

- Applicando la condizione per la regolazione di sistemi LTI TC

$$\alpha = \left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right]^{-1}$$

con i dati

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = [3 \quad 6], D = 0, K = [0.5 \quad 0.25]$$

si ottiene:

$$\alpha = - \left([3 \quad 6] \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = 0.\bar{1}$$