Stabilità esterna e risposta a regime
Esercizi risolti

1 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO (in forma minima) caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s+4}{(s+3)(s+8)}$$

calcolare analiticamente, se possibile, la risposta in regime permanente $y_{perm}(t)$ all'ingresso sinusoidale $u(t) = U \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$, con $U = 2$ e $\omega_0 = 5$ rad/s.

Soluzione

Tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale strettamente minore di 0, in quanto valgono -3 e -8, per cui il sistema è BIBO stabile nonché in forma minima e quindi è anche asintoticamente stabile. In tal caso, esiste la risposta in regime permanente all'ingresso sinusoidale applicato. In particolare:

$$y_{perm}(t) = \bar{y} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)\,\varepsilon(t) = \bar{y} \cdot \sin(5t + \varphi)\,\varepsilon(t)$$

$$\bar{y} = |\,H(j\omega_0)\,| \;\cdot U = 2\,|\,H(j5)\,|$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega_0)) + \theta_0 = \arg(H(j5))$$

$$|\,H(j5)\,| = \frac{|\,j5+4\,|}{|\,j5+3\,|\;\cdot\;|\,j5+8\,|} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{34}\;\cdot\;\sqrt{89}} = 0.1164$$

$$\begin{aligned}
\arg(H(j5)) &= \arg(j5+4) - [\arg(j5+3) + \arg(j5+8)] = \\
&= \arctan(5/4) - [\arctan(5/3) + \arctan(5/8)] = \\
&= 0.8961 - (1.0304 + 0.5586) = -0.6929\,\mathrm{rad}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$y_{perm}(t) = 0.2328 \cdot \sin(5t - 0.6929)\,\varepsilon(t)$$

2 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO (in forma minima) caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{(s-1)(s+5)}{(s+1)(s+2)}$$

calcolare analiticamente, se possibile, la risposta in regime permanente $y_{perm}(t)$ all'ingresso sinusoidale $u(t) = U \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$, con $U = 5$ e $\omega_0 = 1$ rad/s.

Soluzione

Tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale strettamente minore di 0, in quanto valgono -1 e -2, per cui il sistema è BIBO stabile nonché in forma minima e quindi è anche asintoticamente stabile. In tal caso, esiste la risposta in regime permanente all'ingresso sinusoidale applicato. In particolare:

$$y_{perm}(t) = \bar{y} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)\,\varepsilon(t) = \bar{y} \cdot \cos(t + \varphi)\,\varepsilon(t)$$

$$\bar{y} = |\,H(j\omega_0)\,| \cdot U = 5\,|\,H(j)\,|$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega_0)) + \theta_0 = \arg(H(j))$$

$$|\,H(j)\,| = \frac{|\,j-1\,| \cdot |\,j+5\,|}{|\,j+1\,| \cdot |\,j+2\,|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{26}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{5.2} = 2.2804$$

$$\begin{aligned} \arg(H(j)) &= \arg(j-1) + \arg(j+5) - [\arg(j+1) + \arg(j+2)] = \\ &= \arctan(1/(-1)) + \arctan(1/5) - [\arctan(1/1) + \arctan(1/2)] = \\ &= -0.7854 + \pi + 0.1974 - (0.7854 + 0.4636) = 1.3046\,\mathrm{rad} \end{aligned}$$

e quindi:

$$y_{perm}(t) = 11.4020 \cdot \cos(t + 1.3046)\,\varepsilon(t)$$

Si noti che $\arg(j-1) = \arctan(1/(-1)) = -0.7854 + \pi = 2.3562\,\mathrm{rad}$, in quanto $j-1$ si trova nel II quadrante del piano complesso.

3 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO (in forma minima) caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{(s-1)(s+5)}{(s+2)(s-5)}$$

calcolare analiticamente, se possibile, la risposta in regime permanente $y_{perm}(t)$ all'ingresso sinusoidale $u(t) = U \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$, con $U = 2$ e $\omega_0 = 5$ rad/s.

Soluzione

Non tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale strettamente minore di 0, in quanto valgono -2 e $+5$, per cui il sistema non è BIBO stabile. Essendo in forma minima, si vede che il sistema non solo non è asintoticamente stabile ma addirittura risulta (internamente) instabile, per cui non esiste alcuna risposta in regime permanente.

4 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO (in forma minima) caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{5(s+9)(s-2)}{(3s^2+2s+0.6)(5s^2+5s+2.5)}$$

calcolare, se possibile, il valore finale y_∞ della risposta all'ingresso a gradino di ampiezza 0.1, $u(t) = 0.1\varepsilon(t)$.

Soluzione

Il denominatore di $H(s)$ è dato dal prodotto di due polinomi di II grado. Applicando la regola di Cartesio ad entrambi i polinomi, i cui coefficienti sono tutti di segno concorde e non presentano quindi alcuna variazione di segno, si deduce che tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale strettamente minore di 0. Pertanto, il sistema è BIBO stabile nonché in forma minima, per cui è anche asintoticamente stabile. In tal caso, esiste la risposta in regime permanente all'ingresso a gradino applicato, il cui valore finale vale:

$$\begin{aligned} y_\infty &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{Y(s)}{U(s)}\,U(s) = \lim_{s\to 0} s\,H(s)\;U(s) = \\ &= \lim_{s\to 0} s\,H(s)\;\frac{0.1}{s} = 0.1\,H(0) = 0.1\,\cdot\,\frac{5\,\cdot\,9\,\cdot\,(-2)}{0.6\,\cdot\,2.5} = -6 \end{aligned}$$

5 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO (in forma minima) caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s-20}{s^4+s^3+15s^2+25s+10}$$

calcolare, se possibile, il valore finale y_∞ della risposta all'ingresso a gradino di ampiezza 4, $u(t) = 4\varepsilon(t)$.

Soluzione

Il denominatore $D(s)$ di $H(s)$ è un polinomio di IV grado. Per saper se il sistema è BIBO stabile, è in questo caso necessario ricorrere al criterio di Routh, in quanto il fatto che i coefficienti di $D(s)$ siano tutti di segno concorde e non presentino quindi alcuna variazione di segno costituisce solo una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché tutte le radici di $D(s)$ (che sono i poli di $H(s)$) abbiano parte reale strettamente minore di 0.

La tabella di Routh corrispondente è:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 15 & 10 \\ 3 & 1 & 25 & 0 \\ 2 & -10 & 10 & 0 \\ 1 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

Poiché non tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono di segno concorde (in particolare, nessun elemento è nullo e sono presenti due variazioni di segno), allora non tutte le radici di $D(s)$ hanno parte reale strettamente minore di 0 (in particolare, ci sono 2 radici a parte reale strettamente maggiore di 0 e 2 radici a parte reale strettamente minore di 0), per cui il sistema non è BIBO stabile. Essendo in forma minima, allora il sistema non solo non è asintoticamente stabile ma addirittura risulta (internamente) instabile, per cui non esiste alcuna risposta in regime permanente all'ingresso a gradino applicato.

6 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO (in forma minima) caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s^2 + 3.5s + 3}{s^4 + 4.5s^3 - 2s^2 + 3s + 2.5}$$

calcolare, se possibile, il valore finale y_∞ della risposta all'ingresso a gradino di ampiezza 5, $u(t) = 5\varepsilon(t)$.

Soluzione

Il denominatore $D(s)$ di $H(s)$ è un polinomio di IV grado i cui coefficienti non sono tutti di segno concorde, per cui non è soddisfatta la condizione necessaria affinché tutte le radici di $D(s)$ (che sono i poli di $H(s)$) abbiano parte reale strettamente minore di 0. Pertanto il sistema non è né BIBO stabile né asintoticamente stabile, essendo in forma minima, per cui non esiste alcuna risposta in regime permanente all'ingresso a gradino applicato.
Non si può determinare y_∞ perché il sistema non va a regime.

7 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO (in forma minima) caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$

calcolare, se possibile, il valore finale y_∞ della risposta all'ingresso a rampa di pendenza 4, $u(t) = 4t\,\varepsilon(t)$.

Soluzione

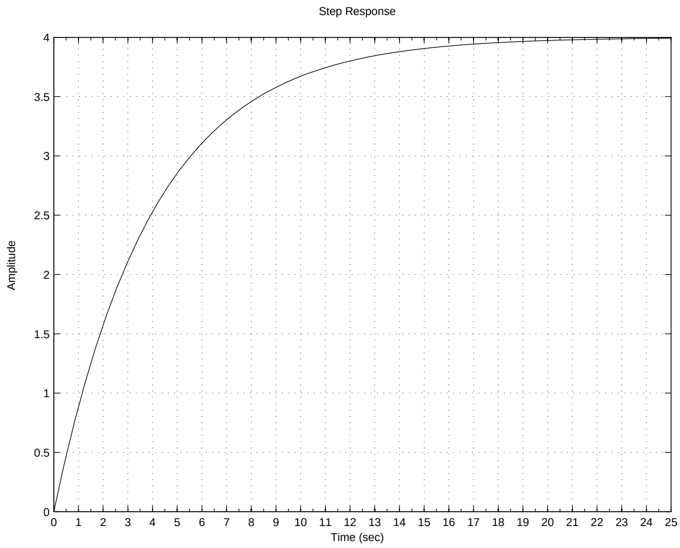
Tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale strettamente minore di 0, in quanto valgono -1 e -2, per cui il sistema è BIBO stabile nonché in forma minima e quindi è anche asintoticamente stabile. In tal caso, esiste la risposta in regime permanente all'ingresso a rampa applicato, il cui valore finale vale:

$$\begin{aligned} y_\infty &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{Y(s)}{U(s)}\,U(s) = \lim_{s\to 0} s\,H(s)\,U(s) = \\ &= \lim_{s\to 0} s\,\frac{s(s-5)}{(s+1)(s+2)}\,\frac{4}{s^2} = 4\cdot\frac{-5}{1\cdot 2} = -10 \end{aligned}$$

Risposte di sistemi del I e II ordine
Esercizi risolti

1 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO avente la seguente risposta $y(t)$ ad un gradino di ampiezza unitaria, $u(t) = \varepsilon(t)$:



determinare la funzione di trasferimento $H(s)$ di tale sistema.

Soluzione

L'andamento monotono crescente della risposta $y(t)$ illustrato in figura è tipico di un sistema del I ordine avente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau\, s}$$

Si tratta quindi di determinare il guadagno K della funzione di trasferimento e la costante di tempo τ del polo.

Per la determinazione del guadagno K è utile la seguente relazione che lo lega al valore a regime y_∞ della risposta $y(t)$ e all'ampiezza $\bar{u}$ del gradino in ingresso:

$$y_\infty = K\, \bar{u} \;\Rightarrow\; K = \frac{y_\infty}{\bar{u}}$$

Dai dati del problema si ha che $\bar{u} = 1$, mentre dal grafico si ricava che $y_\infty = 4$. Si ha pertanto:

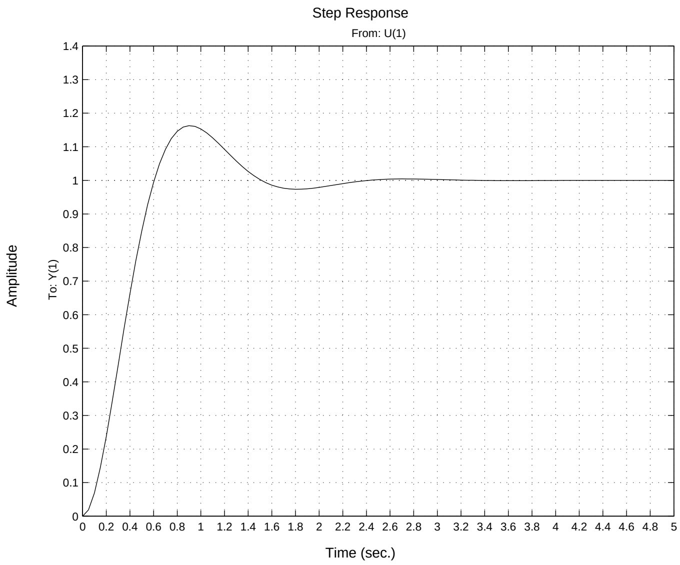
$$K = \frac{4}{1} = 4$$

Per la determinazione della costante di tempo τ si può ricordare la proprietà dei sistemi del I ordine per i quali la risposta al gradino raggiunge il 63% circa del valore a regime y_∞ dopo che è trascorso un tempo pari alla costante di tempo. Poiché dal grafico si è ricavato $y_\infty = 4$, il 63% di y_∞ è dato da $0.63 \cdot 4 = 2.52$. A questo punto, dal grafico si ricava che la risposta raggiunge il valore 2.52 al tempo $\tau \simeq 4$ s. La funzione di trasferimento richiesta quindi data da:

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau\, s} = \frac{4}{1 + 4\, s}$$

2 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO avente la seguente risposta $y(t)$ ad un gradino di ampiezza unitaria, $u(t) = \varepsilon(t)$:



determinare la funzione di trasferimento $H\,(s)$ di tale sistema.

Soluzione

L'andamento oscillante della risposta $y(t)$ illustrato in figura è tipico di un sistema del II ordine con poli complessi coniugati avente funzione di trasferimento:

$$H(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Si tratta di determinare il guadagno K della funzione di trasferimento, il coefficiente di smorzamento ζ e la pulsazione naturale ω_n della coppia di poli complessi coniugati.

Per la determinazione del guadagno K è utile la seguente relazione che lo lega al valore a regime y_∞ della risposta $y(t)$ e all'ampiezza $\bar{u}$ del gradino in ingresso:

$$y_\infty = K\,\bar{u} \;\Rightarrow\; K = \frac{y_\infty}{\bar{u}}$$

Dai dati del problema si ha che $\bar{u} = 1$, mentre dal grafico si ricava che $y_\infty = 1$. Si ha pertanto:

$$K = 1/1 = 1$$

Per la determinazione del coefficiente di smorzamento ζ si può utilizzare la relazione che lo lega alla sovraelongazione massima $\hat{s}$ della risposta al gradino:

$$\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \;\Rightarrow\; \zeta = \frac{|\ln(\hat{s})|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{s})}}$$

Inoltre, la sovraelongazione $\hat{s}$ dipende dal valore massimo $y_{\max}$ e dal valore a regime y_∞ della risposta secondo la formula:

$$\hat{s} = \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty}$$

Ricavando direttamente dal grafico i valori $y_{\max} = 1.16$ e $y_\infty = 1$, si ha quindi:

$$\hat{s} = \frac{1.16 - 1}{1} = 0.16 \;\Rightarrow\; \zeta = \frac{|\ln(0.16)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.16)}} = 0.5$$

Per determinare il valore della pulsazione naturale ω_n si può fare riferimento alla formula che esprime il tempo di picco $\hat{t}$ (cioè il tempo in cui la risposta raggiunge il valore massimo $y(\hat{t}) = y_{\max}$) in funzione di ζ e ω_n:

$$\hat{t} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \;\Rightarrow\; \omega_n = \frac{\pi}{\hat{t}\,\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Dal grafico si può ricavare il valore di $\hat{t} = 0.9$ s e pertanto:

$$\omega_n = \frac{\pi}{0.9\sqrt{1-0.5^2}} = 4 \text{ rad/s}$$

Riassumendo si ha: $K = 1$, $\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 4$ rad/s e quindi:

$$H(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{16}{s^2 + 4\,s + 16}$$

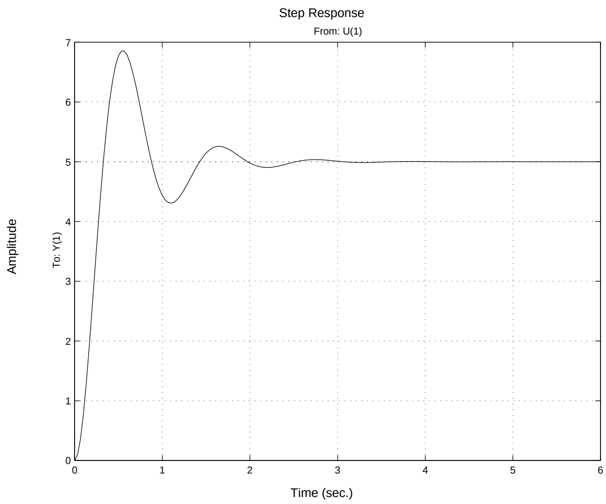
3 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

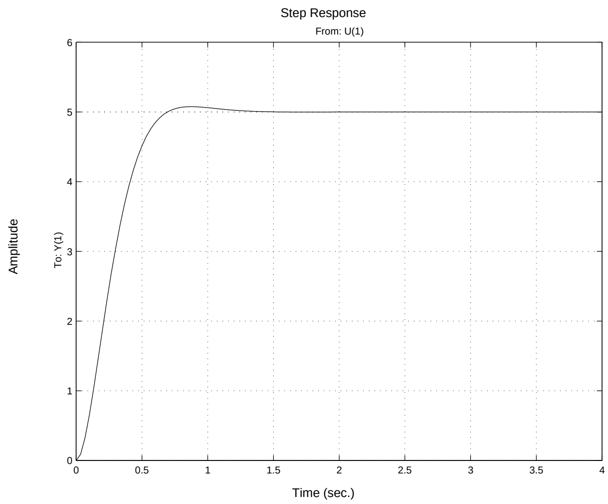
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{180}{s^2 + 3.6s + 36}$$

dire in quale dei seguenti grafici è riportato l'andamento della sua risposta $y(t)$ ad un gradino unitario ($u(t) = \varepsilon(t)$), a partire da condizioni iniziali nulle (si presti attenzione alle scale di entrambi gli assi):

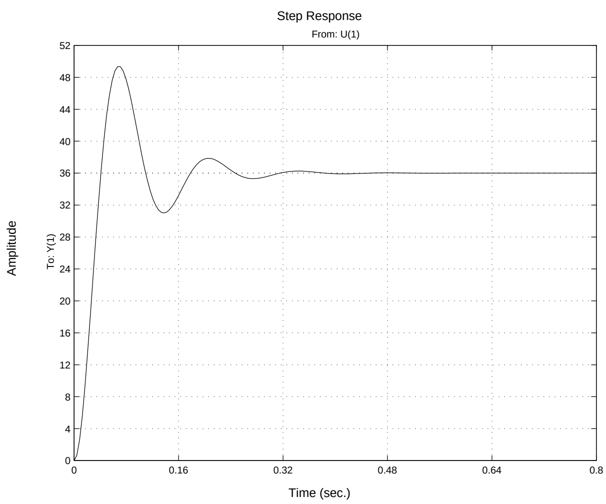
A)



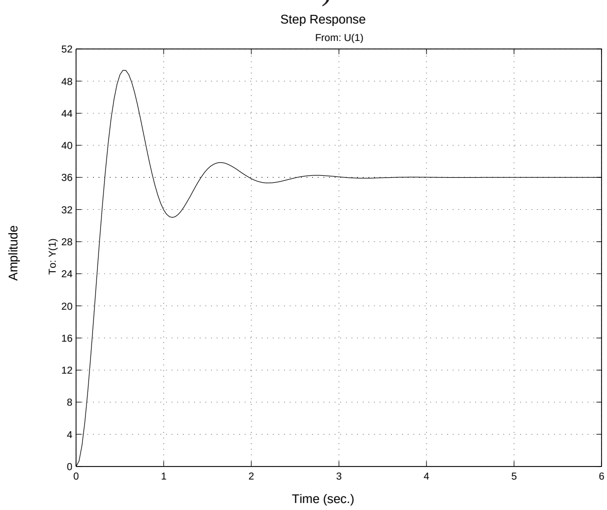
B)



C)



D)



Soluzione

Notiamo subito che la funzione di trasferimento data $H(s)$ può essere scritta come:

$$H(s) = \frac{180}{s^2 + 3.6s + 36} = 5\frac{36}{s^2 + 3.6s + 36}$$

e pertanto si può esprimere nella forma:

$$H(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con $K = 5$, $2\zeta\omega_n = 3.6$ e $\omega_n^2 = 36$, da cui si ricava $\zeta = 0.3$ e $\omega_n = 6$ rad/s.

Pertanto le caratteristiche della risposta al gradino unitario della funzione $H(s)$ data devono essere:

(1) valore a regime $y_\infty = K\,\bar{u} = 5 \cdot 1 = 5$

(2) sovraelongazione massima $\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\pi\,0.3}{\sqrt{1-0.3^2}}} \simeq 0.37$

(3) tempo di picco $\hat{t} = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{\pi}{6\sqrt{1-0.3^2}} \simeq 0.55$ s

In base alla caratteristica **(1)** possiamo escludere gli andamenti della risposta riportati nelle figure C) e D), in quanto sono caratterizzati da un valore a regime $y_\infty = 36$. Inoltre, in base alle caratteristiche **(2)** e **(3)** si può escludere l'andamento riportato nella figura B) in quanto esso presenta una sovraelongazione massima $\hat{s} \ll 0.37$ ed un tempo di picco tale che $\hat{t} > 0.55$ s. Possiamo quindi concludere che il grafico che riporta l'andamento della risposta al gradino unitario della funzione di trasferimento data è quello corrispondente alla figura A).