Raggiungibilità e Controllabilità
Esercizi risolti

1 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto dalle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & -1+k \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

studiare le proprietà di raggiungibilità al variare del parametro reale k.

Soluzione

Affinché il sistema sia completamente raggiungibile, la matrice di raggiungibilità M_R deve avere rango pieno ($\rho(M_R) = n = 2$). La matrice di raggiungibilità M_R è data da:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2k \\ 1 & k-1 \end{bmatrix}$$

A tal fine occorre verificare che il suo determinante sia diverso da zero:

$$\det(M_R) = k(k-1) - 2k = k^2 - k - 2k = k(k-3)$$

$$\det(M_R) = 0 \left\langle \begin{array}{l} k = 0 \\ k = 3 \end{array} \right.$$

il sistema è quindi completamente raggiungibile $\forall k \in \mathbb{R}, k \neq \{0, 3\}$. Infatti:

- se $k = 0$
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_R) = 1 < n$$

- se $k = 3$
$$M_R = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_R) = 1 < n$$

Retroazione statica dallo stato
Esercizi risolti

1 Esercizio

Date le seguenti matrici A e B di un sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

progettare, se possibile, la matrice dei guadagni K di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo $u(t) = -Kx(t)$ in modo che gli autovalori del sistema controllato siano $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$.

Soluzione

La matrice di stato A è triangolare a blocchi e fra i suoi autovalori compare l'autovalore 5 che non rientra fra quelli richiesti per il sistema controllato. Affinché si possa progettare la legge di controllo richiesta, il sistema dato deve risultare completamente raggiungibile. La matrice di raggiungibilità è data da:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 63 \\ 6 & 24 & 102 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(M_R) = 2 < n = 3$$

Il sistema non è pertanto completamente raggiungibile e quindi non è possibile progettare la legge di controllo richiesta.

2 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

progettare, se possibile, la matrice dei guadagni K di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo $u(t) = -Kx(t)$ in modo che gli autovalori del sistema controllato siano $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Soluzione

Affinché si possa progettare la legge di controllo richiesta, il sistema dato deve risultare completamente raggiungibile. Poiché le equazioni di stato sono espresse in forma canonica di raggiungibilità, il sistema dato è completamente raggiungibile. Come verifica si calcola comunque la matrice di raggiungibilità:

$$M_R = \left[\begin{array}{ccc} B & AB & A^2B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 18 \end{array} \right] \rightarrow \rho(M_R) = 3 = n$$

Il polinomio caratteristico che si desidera imporre tramite la legge di controllo è:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

Tale polinomio dev'essere eguagliato al polinomio caratteristico $p_{A-BK}(\lambda)$ della matrice $A - BK$. La matrice $A - BK$ è data da:

$$A - BK = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{array} \right]}_{A} - \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]}_{B} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & k_3 \end{array} \right]}_{K} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 - k_1 & 2 - k_2 & 4 - k_3 \end{array} \right]$$

Si nota che la matrice $A-BK$ risulta essere in forma compagna inferiore, pertanto il polinomio caratteristico $p_{A-BK}(\lambda)$ può essere scritto direttamente sulla base degli elementi dell'ultima riga della matrice $A - BK$

$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^3 - (4 - k_3) \cdot \lambda^2 - (2 - k_2) \cdot \lambda + 1 + k_1$$

Applicando il principio di identità dei polinomi ai polinomi $p_{des}(\lambda)$ e $p_{A-BK}(\lambda)$ si ottiene il seguente sistema di tre equazioni disaccoppiate in tre incognite:

$$\left\{ \begin{array}{r} -(4 - k_3) = 3 \\ -(2 - k_2) = 3 \\ 1 + k_1 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_3 = 7 \\ k_2 = 5 \\ k_1 = 0 \end{array} \right.$$

La matrice dei guadagni K della legge di controllo è quindi data da

$$K = [\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \,] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 5 & 7 \end{array} \right]$$

3 Esercizio

Date le seguenti matrici A e B di un sistema dinamico LTI a tempo discreto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

progettare, se possibile, la matrice dei guadagni K di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo $u(k) = -Kx(k)$ in modo che gli autovalori del sistema controllato siano $\lambda_1 = 0.2$ e $\lambda_2 = 0.4$.

Soluzione

Affinché si possa progettare la legge di controllo richiesta, il sistema dato deve risultare completamente raggiungibile. La matrice di raggiungibilità è data da:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(M_R) = 2 = n$$

Pertanto il sistema è completamente raggiungibile.
Il polinomio caratteristico che si desidera imporre tramite la legge di controllo è:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda - 0.2)(\lambda - 0.4) = \lambda^2 - 0.6\lambda + 0.08$$

Tale polinomio dev'essere eguagliato al polinomio caratteristico $p_{A-BK}(\lambda)$ della matrice $A - BK$. La matrice $A - BK$ è data da:

$$A - BK = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{K} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2k_1 & 2k_2 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_1 & 1 - 2k_2 \\ -2 - 2k_1 & -3 - 2k_2 \end{bmatrix}$$

Si ricava quindi il polinomio caratteristico $p_{A-BK}(\lambda)$:

$$\lambda I - [A - BK] = \begin{bmatrix} \lambda + 2k_1 & 2k_2 - 1 \\ 2(k_1 + 1) & \lambda + 3 + 2k_2 \end{bmatrix}$$

$$p_{A-BK}(\lambda) = \det(\lambda I - [A - BK]) = (\lambda + 2k_1)(\lambda + 3 + 2k_2) - 2(k_1 + 1)(2k_2 - 1) =$$
$$= \lambda^2 + (3 + 2k_1 + 2k_2)\lambda + 8k_1 - 4k_2 + 2$$

Applicando il principio di identità dei polinomi ai polinomi $p_{des}(\lambda)$ e $p_{A-BK}(\lambda)$ si ottiene il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} 3 + 2k_1 + 2k_2 = -0.6 \\ 8k_1 - 4k_2 + 2 = 0.08 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -0.76 \\ k_2 = -1.04 \end{cases}$$

La matrice dei guadagni K della legge di controllo è quindi data da:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.76 & -1.04 \end{bmatrix}$$

4 Esercizio

Al seguente sistema dinamico LTI a tempo discreto raggiungibile:

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

viene applicata una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo $u(k) = -Kx(k) + \alpha r(k)$ con $K = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$. Supponendo $r(k) = \bar{r} = \varepsilon(k)$, calcolare, se possibile, il valore di α in modo da ottenere la regolazione dell'uscita $\bar{y} = \bar{r}$.

Soluzione

Prima di determinare il valore di α, occorre verificare che la retroazione dallo stato ottenuta mediante la matrice K stabilizzi asintoticamente il sistema dato. A tal fine, si procede con il calcolo della matrice $A - BK$:

$$A - BK = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}}_{K} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Si nota che la matrice $A - BK$ è diagonale e quindi i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 0.5$ e $\lambda_2 = -0.5$. Pertanto il sistema controllato dalla legge di controllo data risulta asintoticamente stabile. Si può quindi procedere con il calcolo del coefficiente α in base alla formula:

$$\alpha = \left[(C - DK)\left[I - (A - BK)\right]^{-1} B + D\right]^{-1} \underset{D=0}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{C} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}}_{A-BK} \right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B} \right)^{-1} = 0.1071$$

Osservabilità e Rilevabilità
Esercizi risolti

1 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto dalle matrici A e C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

studiare le proprietà di osservabilità al variare del parametro reale k.

Soluzione

Affinché il sistema sia completamente osservabile, la matrice di osservabilità M_O deve avere rango pieno ($\rho(M_O) = n = 2$). La matrice di osservabilità M_O è data da:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \det(M_O) = 0 \Rightarrow \rho(M_O) = 1 < n, \forall k$$

Quindi, il sistema dato non risulta completamente osservabile per alcun valore del parametro reale k.

Stima dello stato e regolatore dinamico
Esercizi risolti

1 Esercizio

Date le seguenti matrici A e C di un sistema dinamico LTI a tempo discreto:

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 39 & 51 \\ -52 & -59 & -49 \\ 8 & 7 & -7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 31 \end{bmatrix}$$

progettare, se possibile, la matrice dei guadagni L di uno stimatore asintotico dello stato in modo che le dinamiche dell'errore di stima siano governate dagli autovalori $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = -0.3$.

Soluzione

Affinché si possa progettare lo stimatore asintotico richiesto, il sistema dato deve risultare completamente osservabile. La matrice di osservabilità è data da:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 31 \\ -78 & -138 & -456 \\ 1188 & 1908 & 5976 \end{bmatrix}, \det(M_O) = 0 \Rightarrow \rho(M_O) = 2 < n = 3$$

Il sistema non è pertanto completamente osservabile e quindi non è possibile progettare lo stimatore asintotico richiesto.

2 Esercizio

Date le seguenti matrici A e C di un sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

progettare, se possibile, la matrice dei guadagni L di uno stimatore asintotico dello stato in modo che le dinamiche dell'errore di stima siano governate dagli autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Soluzione

Affinché si possa progettare lo stimatore asintotico richiesto, il sistema dato deve risultare completamente osservabile. Poiché le equazioni di stato sono espresse in forma canonica di osservabilità, il sistema dato è completamente osservabile. Come verifica si calcola comunque la matrice di osservabilità:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(M_O) = 3 = n$$

Il polinomio caratteristico che si desidera imporre allo stimatore è:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

Tale polinomio deve essere eguagliato al polinomio caratteristico $p_{A-LC}(\lambda)$ della matrice $A - LC$. La matrice $A - LC$ è data da:

$$A - LC = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-l_1 \\ 1 & 0 & -3-l_2 \\ 0 & 1 & 3-l_3 \end{bmatrix}$$

Si nota che la matrice $A - LC$ risulta essere in forma compagna destra, pertanto il polinomio caratteristico $p_{A-LC}(\lambda)$ può essere scritto direttamente sulla base degli elementi dell'ultima colonna della matrice $A - LC$:

$$p_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda I - [A - LC]) = \lambda^3 - (3-l_3)\lambda^2 - (-3-l_2)\lambda - (1-l_1)$$

Applicando il principio di identità dei polinomi ai polinomi $p_{des}(\lambda)$ e $p_{A-LC}(\lambda)$ si ottiene il seguente sistema di tre equazioni disaccoppiate in tre incognite:

$$\begin{cases} -(3-l_3) = 6 \\ -(-3-l_2) = 11 \\ -(1-l_1) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_3 = 9 \\ l_2 = 8 \\ l_1 = 7 \end{cases}$$

La matrice dei guadagni L dello stimatore asintotico è quindi data da:

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3 Esercizio

Date le seguenti matrici A e C di un sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$$

progettare, se possibile, la matrice dei guadagni L di uno stimatore asintotico dello stato in modo che le dinamiche dell'errore di stima siano governate dagli autovalori $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$.

Soluzione

Affinché si possa progettare lo stimatore asintotico richiesto, il sistema dato deve risultare completamente osservabile. La matrice di osservabilità è data da:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(M_O) = 2 = n$$

Il sistema risulta quindi completamente osservabile.

Il polinomio caratteristico che si desidera imporre allo stimatore è:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

Tale polinomio dev'essere eguagliato al polinomio caratteristico $p_{A-LC}(\lambda)$ della matrice $A - LC$. La matrice $A - LC$ è data da:

$$A-LC = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}}_{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -l_1 & 2l_1 \\ -l_2 & 2l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + l_1 & 4 - 2l_1 \\ 3 + l_2 & 2 - 2l_2 \end{bmatrix}$$

Si ricava quindi il polinomio caratteristico $p_{A-LC}(\lambda)$:

$$\lambda I - [A - LC] = \begin{bmatrix} \lambda - (1 + l_1) & 2l_1 - 4 \\ -(3 + l_2) & \lambda - (2 - 2l_2) \end{bmatrix}$$

$$p_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda I - [A - LC]) = (\lambda - (1 + l_1))(\lambda - (2 - 2l_2)) + (2l_1 - 4)(3 + l_2) =$$
$$= \lambda^2 + \lambda(-l_1 + 2l_2 - 3) + 8l_1 - 6l_2 - 10$$

Applicando il principio di identità dei polinomi ai polinomi $p_{des}(\lambda)$ e $p_{A-LC}(\lambda)$ si ottiene il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} -(l_1 - 2l_2 + 3) = 5 \\ 8l_1 - 6l_2 - 10 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 8 \\ l_2 = 8 \end{cases}$$

La matrice dei guadagni L dello stimatore asintotico è quindi data da:

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

4 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -1.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

progettare, se possibile, un regolatore dinamico tramite una legge di controllo del tipo:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t)$$

in modo da soddisfare i seguenti requisiti:

1. autovalori desiderati imposti dalla legge di controllo complessi coniugati e aventi $\omega_{n,des} = 5, \ \ \zeta_{des} = 0.4$;
2. autovalori desiderati dello stimatore asintotico dello stato in $\lambda_{L,1,des} = \lambda_{L,2,des} = -1$;
3. regolazione dell'uscita.

Soluzione

Affinché si possano progettare la matrice dei guadagni K della legge di controllo e la matrice dei guadagni L dello stimatore asintotico richiesti, il sistema dato deve risultare completamente raggiungibile e osservabile.

Studio della raggiungibilità. La matrice di raggiungibilità è data da:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(M_R) = 2 = n$$

pertanto il sistema dato è completamente raggiungibile.

Studio dell'osservabilità. La matrice di osservabilità è data da:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1.25 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(M_O) = 2 = n$$

pertanto il sistema dato è completamente osservabile.

È quindi possibile progettare il regolatore dinamico richiesto.

Il polinomio caratteristico che si desidera imporre tramite la legge di controllo è:

$$p_{K,des}(\lambda) = \lambda^2 + 2\zeta_{,des}\omega_{n,des}\lambda + \omega_{n,des}^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 25$$

Tale polinomio dev'essere eguagliato al polinomio caratteristico $p_{A-BK}(\lambda)$ della matrice $A - BK$. La matrice $A - BK$ è data da:

$$A - BK = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 & -1.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{K} =$$
$$= \begin{bmatrix} -6 & -1.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2k_1 & 2k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 - 2k_1 & -1.25 - 2k_2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ricava quindi il polinomio caratteristico $p_{A-BK}(\lambda)$:

$$\lambda I - [A - BK] = \begin{bmatrix} \lambda + 6 + 2k_1 & 1.25 + 2k_2 \\ -4 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$p_{A-BK}(\lambda) = \det(\lambda I - [A - BK]) = \lambda(\lambda + 6 + 2k_1) + 4(1.25 + 2k_2) =$$
$$= \lambda^2 + (6 + 2k_1)\lambda + 8k_2 + 5$$

Applicando il principio di identità dei polinomi ai polinomi $p_{K,des}(\lambda)$ e $p_{A-BK}(\lambda)$ si ottiene il seguente sistema di due equazioni disaccoppiate in due incognite:

$$\begin{cases} 6 + 2k_1 = 4 \\ 8k_2 + 5 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 2.5 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Si può a questo punto calcolare anche il parametro α:

$$\alpha = \left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D\right]^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ D=0}}{=}$$
$$= -\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} -6 & -1.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2.5 \end{bmatrix}}_{K}\right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}\right)^{-1} = 3.125$$

Il polinomio caratteristico che si desidera imporre allo stimatore è:

$$p_{L,des}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Tale polinomio dev'essere eguagliato al polinomio caratteristico $p_{A-LC}(\lambda)$ della matrice $A - LC$. La matrice $A - LC$ è data da:

$$A - LC = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 & -1.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} =$$
$$= \begin{bmatrix} -6 & -1.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & l_1 \\ l_2 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 - l_1 & -1.25 - l_1 \\ 4 - l_2 & -l_2 \end{bmatrix}$$

Si ricava quindi il polinomio caratteristico $p_{A-LC}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} & p_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda I - [A - LC]) = (\lambda + 6 + l_1)(\lambda + l_2) - (1.25 + l_1)(-4 + l_2) = \\ & = \lambda^2 + (l_1 + l_2 + 6)\lambda + 5 + 4l_1 + 4.75l_2 \end{aligned}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi ai polinomi $p_{L,des}(\lambda)$ e $p_{A-LC}(\lambda)$ si ottiene il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = -4 \\ 4l_1 + 4.75l_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = -20 \\ l_2 = 16 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

