# Equilibrio di sistemi dinamici
# Esercizi risolti

## 1 Esercizio

Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo continuo, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & -0.25x_1^2(t) - x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & 4x_1(t) - 16x_1(t)x_2(t) \\ y(t) & = & 2x_2(t) \end{array}$$

determinarne gli stati di equilibrio $\overline{x}$ corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\overline{u} = 0.5$.

### Soluzione

All'equilibrio, $\dot{x}_i(t) = d\bar{x}_i/dt = 0 = f_i(\bar{x}, \bar{u})$, $\forall t \geq 0$, $\forall i \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & = -0.25\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 + \bar{u} = -0.25\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 + 0.5 \\ 0 & = 4\bar{x}_1 - 16\bar{x}_1\bar{x}_2 = 4\bar{x}_1(1 - 4\bar{x}_2) \end{array} \right.$$

La seconda equazione risulta soddisfatta per $\bar{x}_1 = 0$ oppure $\bar{x}_2 = 0.25$.
Se $\bar{x}_1 = 0$, la prima equazione diventa:

$$0 = 0 - \bar{x}_2 + 0.5 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_2 = 0.5$$

e quindi il corrispondente stato di equilibrio (isolato) è:

$$\bar{x} = \bar{x}^{(a)} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0.5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^2$$

Se $\bar{x}_2 = 0.25$, la prima equazione diventa:

$$0 = -0.25\bar{x}_1^2 - 0.25 + 0.5 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1^2 = 1$$

ed è soddisfatta per $\bar{x}_1 = 1$ oppure per $\bar{x}_1 = -1$, cui corrispondono i seguenti stati di equilibrio (isolati):

$$\bar{x} = \bar{x}^{(b)} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0.25 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{x} = \bar{x}^{(c)} = \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0.25 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^2$$

## 2 Esercizio

Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo discreto, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{array}{rcl} x_1(k+1) & = & x_1^2(k) \cdot 10^{x_2(k)} + 0.3 \cdot u(k) \\ x_2(k+1) & = & x_1^2(k) + x_2(k) - u(k) \end{array}$$

determinarne gli stati di equilibrio $\overline{x}$ corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\overline{u} = 1$.

 

## Soluzione

All'equilibrio, $x_i\,(k+1) = x_i\,(k) = \bar{x}_i = f_i\,(\bar{x}, \bar{u})\,, \forall k \geq 0, \forall i \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{x}_1 & = \bar{x}_1^2 \cdot 10^{\bar{x}_2} + 0.3 \cdot \bar{u} = \bar{x}_1^2 \cdot 10^{\bar{x}_2} + 0.3 \\ \bar{x}_2 & = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 - \bar{u} = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 - 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \bar{x}_1 & = 10^{\bar{x}_2} + 0.3 \\ \bar{x}_1^2 & = 1 \end{array}\right.$$

La seconda equazione risulta soddisfatta per $\bar{x}_1^{(a)} = 1$ oppure per $\bar{x}_1^{(b)} = -1$.
Se $\bar{x}_1 = \bar{x}_1^{(a)} = 1$, la prima equazione diventa:

$$1 = 10^{\bar{x}_2^{(a)}} + 0.3 \quad \Rightarrow \quad 10^{\bar{x}_2^{(a)}} = 0.7 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_2^{(a)} = \log_{10}(0.7) = -0.1549$$

e quindi il corrispondente stato di equilibrio (isolato) è:

$$\bar{x} = \left[\begin{array}{c} \bar{x}_1^{(a)} \\ \bar{x}_2^{(a)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -0.1549 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^2$$

Se $\bar{x}_1 = \bar{x}_1^{(b)} = -1$, la prima equazione diventa:

$$-1 = 10^{\bar{x}_2^{(b)}} + 0.3 \;\Rightarrow\; 10^{\bar{x}_2^{(b)}} = -1.3 \;\Rightarrow\; \bar{x}_2^{(b)} = \log_{10}(-1.3) = 0.1139 + 1.3644j \notin \mathbb{R}$$

e quindi $\bar{x}_1^{(b)} = -1$ non è un possibile valore della prima componente dell'equilibrio, poiché qualsiasi stato di equilibrio è una particolare istanza della variabile di stato $x \in \mathbb{R}^n$ e quindi in questo caso deve appartere ad $\mathbb{R}^2$.

 

# Linearizzazione di sistemi dinamici
# Esercizi risolti

## 1 Esercizio

Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo continuo, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1^2(t) - 0.5x_2^2(t) + 4u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 2x_1(t)x_2(t) \\ y(t) &= 4x_2(t) \end{aligned}$$

determinare il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\overline{u} = 2$.

### Soluzione

Il sistema dinamico linearizzato è descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{\delta x}(t) &= A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\,\delta x(t) + D\,\delta u(t) \end{aligned}$$

in cui compaiono le matrici:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} -2\bar{x}_1 & -\bar{x}_2 \\ 1-2\bar{x}_2 & -2\bar{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g(x,u)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

# 2 Esercizio

Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo discreto, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= e^{x_1(k)} - x_2^2(k) - 3 \cdot u^2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + 2 \cdot u(k) \\ y(k) &= x_2^3(k) \end{aligned}$$

determinare il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\overline{u} = 0$.

## Soluzione

Il sistema dinamico linearizzato è descritto dalle seguenti equazioni alle differenze:

$$\begin{aligned} \delta x(k+1) &= A\,\delta x(k) + B\,\delta u(k) \\ \delta y\,(k) &= C\,\delta x(k) + D\,\delta u(k) \end{aligned}$$

in cui compaiono le matrici:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} e^{\bar{x}_1} & -2\bar{x}_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} -6\bar{u} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g(x,u)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

# Stabilità interna di sistemi dinamici LTI
# Esercizi risolti

## 1 Esercizio

Dato il sistema dinamico LTI a continuo descritto da:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}$$

analizzarne le proprietà di stabilità interna sapendo che gli autovalori della matrice $A$ sono:

$$\lambda_i = -0.2,\ -0.2,\ -0.1,\ 0,\ 0.1, \quad i = 1, \ldots, 5$$

### Soluzione

Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo continuo, occorre considerare la parte reale degli autovalori della matrice $A$:

$$\{\Re e(\lambda_i)\} = \{-0.2,\ -0.2,\ -0.1,\ 0,\ 0.1\}$$

L'autovalore $\lambda_5 = 0.1$ ha $\Re e(\lambda_5) = 0.1 > 0$ e quindi il sistema è instabile.

## 2 Esercizio

Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto da:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) + D\,u(k) \end{aligned}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -0.1 & 0.7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.26 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

studiarne le caratteristiche di stabilità interna.

### Soluzione

Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo discreto, occorre considerare il modulo degli autovalori della matrice $A$. In questo caso, la matrice $A$ è triangolare (superiore) a blocchi e quindi i suoi autovalori sono quelli dei blocchi quadrati posti sulla diagonale principale:

$$\{\lambda_i(A)\} = \left\{\lambda_i\left(A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}\right)\right\} \cup \left\{\lambda_i\left(A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.26 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$p.c.(A_1) = \det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0.1 & \lambda - 0.7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.7\lambda + 0.1 = (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.2)$$

$$\Rightarrow \quad \{\lambda_i(A_1)\} = \{0.5,\ 0.2\}$$

$$p.c.(A_2) = \det(\lambda I - A_2) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0.26 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 0.26 = (\lambda - 0.5 - 0.1j)(\lambda - 0.5 + 0.1j)$$

$$\Rightarrow \quad \{\lambda_i(A_2)\} = \{0.5 + 0.1j,\ 0.5 - 0.1j\}$$

e quindi:

$$\{\lambda_i(A)\} = \{0.5,\, 0.2,\, 0.5{+}0.1j,\, 0.5{-}0.1j\} \ \Rightarrow \{|\,\lambda_i(A)\,|\} = \{0.5,\, 0.2,\, 0.5099,\, 0.5099\}$$

per cui il sistema è globalmente asintoticamente stabile, poiché tutti gli autovalori di $A$ hanno modulo strettamente inferiore a $1$.

# 3 Esercizio

Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.8 \\ 0 & p/3 & -0.5 \\ 0 & 0 & p/4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

studiarne le caratteristiche di stabilità interna, determinando per quali valori del parametro $p$ risulta asintoticamente stabile.

## Soluzione

Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo discreto, occorre considerare il modulo degli autovalori della matrice $A$. In questo caso, la matrice $A$ è triangolare (superiore) e quindi i suoi autovalori si trovano sulla diagonale principale:

$$\{\lambda_i(A)\} = \{0.8,\ p/3,\ p/4\} \quad \Rightarrow \quad \{|\,\lambda_i(A)\,|\} = \{0.8,\ |p|\ /3,\ |p|\ /4\}$$

Affinché il sistema risulti asintoticamente stabile, occorre che $|\,\lambda_i(A)\,| < 1$, $\forall i$, e quindi:

$$\begin{cases} 0.8 < 1,\ \forall p \\ |p|\ /3 < 1 \ \Rightarrow |p| < 3 \\ |p|\ /4 < 1 \ \Rightarrow |p| < 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |p| < 3$$

# Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI
# Esercizi risolti

## 1 Esercizio

Dato il sistema SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s - 2}{s^3 + 10s^2 + s(p - 20) + 2p}$$

dire per quali valori del parametro reale $p$ il sistema risulta esternamente stabile (ovvero tutti i poli di $H(s)$ si trovano nella regione di asintotica stabilità).

### Soluzione

Affinché il sistema risulti esternamente stabile, ovvero tutti i poli della funzione di trasferimento $H(s)$ si trovino nella regione di asintotica stabilità, occorre determinare per quali valori del parametro reale $p$ tutte le radici del denominatore

$$D(s) = s^3 + 10s^2 + s(p - 20) + 2p$$

di $H(s)$ hanno parte reale strettamente minore di $0$.
Condizione necessaria (ma non sufficiente, essendo $D(s)$ un polinomio di III grado) è che tutti i coefficienti di $D(s)$ siano di segno concorde, cioè tutti $> 0$ oppure $< 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_3 = 1 > 0,\ \forall p \\ \bullet\ a_2 = 10 > 0,\ \forall p \\ \bullet\ a_1 = p - 20 > 0 \ \Rightarrow\ p > 20 \\ \bullet\ a_0 = 2p > 0 \ \Rightarrow\ p > 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad p > 20$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, occorre calcolare la tabella di Routh corrispondente:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & p - 20 \\ 2 & 10 & 2p \\ 1 & 0.8p - 20 & 0 \\ 0 & 2p & 0 \end{array}$$

e determinare per quali valori del parametro reale $p$ tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono di segno concorde, cioè tutti $> 0$ oppure $< 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 1 > 0,\ \forall p \\ \bullet\ 10 > 0,\ \forall p \\ \bullet\ 0.8p - 20 > 0 \ \Rightarrow\ p > 25 \\ \bullet\ 2p > 0 \ \Rightarrow\ p > 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad p > 25$$

# 2 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO a tempo discreto caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 0.8}{z^3 + z^2 + pz + 0.25}$$

dire per quali valori del parametro reale $p$ il sistema risulta esternamente stabile (ovvero tutti i poli di $H(z)$ si trovano nella regione di asintotica stabilità).

## Soluzione

Affinché il sistema risulti esternamente stabile, ovvero tutti i poli della funzione di trasferimento $H(z)$ si trovino nella regione di asintotica stabilità, occorre determinare per quali valori del parametro reale $p$ tutte le radici del denominatore

$$D(z) = z^3 + z^2 + pz + 0.25$$

di $H(z)$ hanno modulo strettamente minore di $1$. La condizione necessaria e sufficiente è fornita dal criterio di Jury, che richiede che siano soddisfatte le seguenti 3 disuguaglianze:

1) $D(z = 1) = 1^3 + 1^2 + p \cdot 1 + 0.25 = p + 2.25 > 0 \quad \Rightarrow \quad p > -2.25$

2) $(-1)^3 D(z = -1) = -[(-1)^3 + (-1)^2 + p \cdot (-1) + 0.25] = p - 0.25 > 0 \quad \Rightarrow$ $p > 0.25$

3) $|a_3| = 1 > |a_0| = 0.25, \ \forall p$

nonché un'ulteriore disuguaglianza fra i moduli di alcuni elementi della tabella di Jury corrispondente:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 0.25 & p & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & p & 0.25 \\
2 & \boxed{-0.9375} & 0.25p - 1 & \boxed{0.25 - p} & \\
2 & 0.25 - p & 0.25p - 1 & -0.9375 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad |-0.9375| > |0.25 - p|$$

Poiché occorre $p > 0.25$ per soddisfare la seconda disuguaglianza, allora l'ultima disuguaglianza richiede a sua volta che:

$$0.9375 > -(0.25 - p) \quad \Rightarrow \quad p < 1.1875$$

e quindi la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema risulti esternamente stabile è complessivamente che:

$$0.25 < p < 1.1875$$

# 3 Esercizio

Dato il denominatore $D(z)$ di una funzione di trasferimento $H(z)$, determinare l'intervallo $I_1$ dei valori del parametro reale $K$ che assicurano asintotica stabilità (ovvero tutti i poli di $H(z)$ si trovano nella regione di asintotica stabilità). Calcolare inoltre l'intervallo $I_2$ dei valori di $K$ per cui tutti i poli di $H(z)$ risultano asintoticamente stabili **e** a parte reale strettamente positiva (reali $> 0$ o complessi coniugati con parte reale $> 0$).

$$D(z) = z^2 - 1.2(1-K)z + 0.2$$

## Soluzione

Affinché tutti i poli della funzione di trasferimento $H(z)$ si trovino nella regione di asintotica stabilità, occorre determinare per quali valori del parametro reale $K$ tutte le radici del denominatore $D(z)$ di $H(z)$ hanno modulo strettamente minore di 1. La condizione necessaria e sufficiente è fornita dal criterio di Jury, che richiede che siano soddisfatte soltanto le seguenti 3 disuguaglianze in questo particolare caso in cui $D(z)$ è un polinomio di II grado:

1) $D(z=1) = 1^2 - 1.2(1-K)\cdot 1 + 0.2 = 1.2K > 0 \quad \Rightarrow \quad K > 0$
2) $(-1)^2 D(z=-1) = +[(-1)^2 - 1.2(1-K)\cdot(-1) + 0.2] = -1.2K + 2.4 > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 2$
3) $|\,a_3\,| = 1 > |\,a_0\,| = 0.2,\ \forall K$

per cui l'intervallo $I_1$ dei valori del parametro reale $K$ che assicurano asintotica stabilità è dato da:

$$I_1 = \{K : 0 < K < 2\}$$

Affinché entrambi i poli di $H(z)$ siano a parte reale strettamente positiva, in base alla regola dei segni di Cartesio occorre determinare per quali valori del parametro reale $K$ si hanno 2 variazioni di segno fra i coefficienti consecutivi di $D(z)$ :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_2 = 1 > 0,\ \forall K \\ \bullet\ a_1 = -1.2(1-K) < 0\ \Rightarrow\ K < 1 \\ \bullet\ a_0 = 0.2,\ \forall K \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad K < 1$$

per cui l'intervallo $I_2$ dei valori del parametro reale $K$ per cui tutti i poli di $H(z)$ risultano asintoticamente stabili e a parte reale strettamente positiva è dato da:

$$I_2 = I_1 \cap \{K : K < 1\} = \{K : 0 < K < 1\}$$

# Stabilità dell'equilibrio di sistemi dinamici non lineari
# Esercizi risolti

## 1 Esercizio

Un sistema dinamico non lineare, a tempo continuo, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Analizzare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio.

### Soluzione

Mediante il metodo indiretto di Lyapunov (anche noto come metodo di linearizzazione), si può studiare la stabilità locale del punto di equilibrio di un sistema dinamico non lineare a tempo continuo analizzando la parte reale degli autovalori della matrice di stato $A$ del sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio. In questo caso, la matrice $A$ è triangolare (superiore) a blocchi e quindi i suoi autovalori sono quelli dei blocchi quadrati posti sulla diagonale principale:

$$\{\lambda_i(A)\} = \left\{\lambda_i\left(A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}\right)\right\} \cup \left\{\lambda_i\left(A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$p.c.(A_1) = \det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 10 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 3 = (\lambda + 0.3096)(\lambda + 9.6904)$$

$$\Rightarrow \quad \{\lambda_i(A_1)\} = \{-0.3096,\ -9.6904\}$$

$$p.c.(A_2) = \det(\lambda I - A_2) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda + 20 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 20\lambda + 4 = (\lambda + 0.2020)(\lambda + 19.7980)$$

$$\Rightarrow \quad \{\lambda_i(A_2)\} = \{-0.2020,\ -19.7980\}$$

e quindi:

$$\{\lambda_i(A)\} = \{-0.3096,\ -9.6904, -0.2020,\ -19.7980\} = \{\Re e(\lambda_i(A))\}$$

per cui il punto di equilibrio del sistema dinamico non lineare è asintoticamente stabile, poiché tutti gli autovalori di $A$ hanno parte reale strettamente negativa.

# 2 Esercizio

Un sistema dinamico non lineare, a tempo continuo, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Analizzare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio al variare del parametro reale $k$.

## Soluzione

Procedendo come nell'esercizio precedente, si osserva che in questo caso, la matrice $A$ è diagonale a blocchi e quindi i suoi autovalori sono quelli dei blocchi quadrati posti sulla diagonale principale:

$$\{\lambda_i(A)\} = \left\{\lambda_i\left(A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -3 \end{bmatrix}\right)\right\} \cup \{2\}$$

L'autovalore $\lambda_3(A) = 2$ ha $\Re e(\lambda_3(A)) = 2 > 0 \ \forall k$ e quindi il punto di equilibrio del sistema dinamico non lineare è instabile per qualunque valore di $k$.

# 3 Esercizio

Un sistema dinamico non lineare, a tempo discreto, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2k \\ -0.2 & 1.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Analizzare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio al variare del parametro reale $k$.

## Soluzione

Mediante il metodo di linearizzazione, si può studiare la stabilità locale del punto di equilibrio di un sistema dinamico non lineare a tempo discreto analizzando il modulo degli autovalori della matrice di stato $A$ del sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio. In questo caso, la matrice $A$ è triangolare (superiore) a blocchi e quindi i suoi autovalori sono quelli dei blocchi quadrati posti sulla diagonale principale:

$$\{\lambda_i(A)\} = \left\{\lambda_i\left(A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & 1.2 \end{bmatrix}\right)\right\} \cup \{0.2\}$$

$$p.c.(A_1) = \det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0.2 & \lambda - 1.2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.2)$$

$$\Rightarrow \quad \{\lambda_i(A_1)\} = \{1,\ 0.2\}$$

e quindi:

$$\{\lambda_i(A)\} = \{1,\ 0.2,\ 0.2\} = \{|\,\lambda_i(A)\,|\},\ \forall k$$

per cui mediante il metodo di linearizzazione non è possibile dedurre nulla sulla stabilità locale del punto di equilibrio del sistema dinamico non lineare per alcun valore di $k$, poiché $|\,\lambda_i(A)\,| \leq 1,\ \forall i$ e $\forall k$, ed inoltre $\exists l : |\,\lambda_l(A)\,| = 1,\ \forall k$.