Equilibrio di sistemi dinamici
Esercizi proposti

1 Esercizio

Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo continuo, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - 0.5x_2^2(t) + 4u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 2x_1(t)x_2(t)\\ y(t) &= 4x_2(t)\end{aligned}$$

determinarne gli stati di equilibrio $\overline{x}$ corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\overline{u} = 2$.

Soluzione: $\overline{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\overline{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix}^T$, $\overline{x}^{(c)} = \begin{bmatrix} 7.875 & 0.5 \end{bmatrix}^T$

2 Esercizio

Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo discreto, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= 0.5 \cdot x_1(k) + x_1(k) \cdot x_2(k)\\ x_2(k+1) &= -0.5 \cdot x_2(k) + 3 \cdot x_2^2(k) + 2 \cdot u(k)\end{aligned}$$

determinarne gli stati di equilibrio $\overline{x}$ corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\overline{u} = 0$.

Soluzione: $\overline{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\overline{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1^{(b)} & 0.5 \end{bmatrix}^T$

Linearizzazione di sistemi dinamici
Esercizi proposti

1 Esercizio

Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo continuo, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.25x_1^2(t) - x_2^2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 4x_1(t) - 16x_1(t)x_2(t) \\ y(t) &= 2x_2(t) \end{aligned}$$

determinare il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\overline{u} = 0.5$.

Soluzione: $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$.

2 Esercizio

Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo discreto, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.5 \cdot x_1(k) + x_1(k) \cdot x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -0.5 \cdot x_2(k) + 3 \cdot x_2^2(k) + 2 \cdot u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \cdot x_2(k) + x_1(k) + x_2(k) \cdot u(k) \end{aligned}$$

determinare il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\overline{u} = 0$.

Soluzione: $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$.

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI
Esercizi proposti

1 Esercizio

Dato il sistema dinamico LTI a tempo continuo descritto da:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) & = & C\,x(t) + D\,u(t) \end{array}$$

analizzarne le proprietà di stabilità interna sapendo che gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_i = -0.2,\ -0.2,\ 2j,\ -2j,\ 0, \quad i = 1, \ldots, 5$$

Soluzione: Il sistema è semplicemente stabile.

2 Esercizio

Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto da:

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) & = & C\,x(k) + D\,u(k) \end{array}$$

analizzarne le proprietà di stabilità interna sapendo che gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_i = -0.5,\ -0.5+0.5j,\ -0.5-0.5j,\ 0.2+0.1j,\ 0.2-0.1j, \quad i = 1, \ldots, 5$$

Soluzione: Il sistema è globalmente asintoticamente stabile.

3 Esercizio

Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto da:

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) & = & C\,x(k) + D\,u(k) \end{array}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

studiarne le caratteristiche di stabilità interna.

Soluzione: Il sistema è instabile.

Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI
Esercizi proposti

1 Esercizio

Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+40}{s^3 + 25s^2 + 2(p+5)s + 100(p-1)}$$

dire per quali valori del parametro reale p il sistema risulta esternamente stabile (ovvero tutti i poli di $H(s)$ si trovano nella regione di asintotica stabilità).

Soluzione: Il sistema è esternamente stabile per $1 < p < 7$.

2 Esercizio

Dato il sistema SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3 + (p_1+4)s^2 + 6s + p_2}$$

dire per quali valori dei parametri reali p_1 e p_2 il sistema risulta esternamente stabile (ovvero tutti i poli di $H(s)$ si trovano nella regione di asintotica stabilità).

Soluzione: $0 < p_2 < 6(p_1 + 4)$

3 Esercizio

Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 \\ 1 & p & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

determinare per quali valori del parametro reale p il sistema è (internamente) asintoticamente stabile.

Soluzione: Il sistema è asintoticamente stabile per $-1 < p < -0.75$.

Stabilità dell'equilibrio di sistemi dinamici non lineari
Esercizi proposti

1 Esercizio

Un sistema dinamico non lineare, a tempo continuo, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Analizzare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio del sistema.

Soluzione: Il punto di equilibrio del sistema dinamico non lineare è asintoticamente stabile.

2 Esercizio

Un sistema dinamico non lineare, a tempo discreto, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ -0.04 & -0.5 & 0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.22 & -1.3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ D = 0$$

Studiare le caratteristiche di stabilità interna del punto di equilibrio.

Soluzione: Il punto di equilibrio del sistema dinamico non lineare è instabile.

3 Esercizio

Un sistema dinamico non lineare, a tempo continuo, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Dire per quali valori del parametro reale k il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

Soluzione: Il punto di equilibrio del sistema dinamico non lineare è asintoticamente stabile per $k > 0$.