Soluzione per sistemi dinamici LTI TC
Esercizi risolti

1 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + 8u(t)$$

determinare l'espressione analitica del movimento dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$ nel caso in cui l'ingresso sia un gradino di ampiezza 2 ($u(t) = 2\varepsilon(t)$) e le condizioni iniziali siano: $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^T$.

Soluzione

Procedendo nel dominio della trasformata di Laplace, si ha:

$$X(s) = \underbrace{\overbrace{(sI-A)^{-1}}^{H_0^x(s)} x(0)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{libero } \to X_\ell(s)}} + \underbrace{\overbrace{(sI-A)^{-1}\,B}^{H_f^x(s)}\,U(s)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{forzato } \to X_f(s)}} =$$

$$= \underbrace{H_0^x(s)x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{H_f^x(s)U(s)}_{X_f(s)}$$

Si ha quindi:

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -4 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} Adj(sI-A) =$$

$$= \frac{1}{s^2-4s-5} \begin{bmatrix} s-3 & 2 \\ 4 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s-3}{s^2-4s-5} & \dfrac{2}{s^2-4s-5} \\ \dfrac{4}{s^2-4s-5} & \dfrac{s-1}{s^2-4s-5} \end{bmatrix}$$

pertanto:

$$X_\ell(s) = (sI-A)^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-3}{s^2-4s-5} & \dfrac{2}{s^2-4s-5} \\ \dfrac{4}{s^2-4s-5} & \dfrac{s-1}{s^2-4s-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2s-2}{s^2-4s-5} \\ \dfrac{2s+6}{s^2-4s-5} \end{bmatrix}$$

$$X_f(s) = (sI-A)^{-1}BU(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{s-3}{s^2-4s-5} & \dfrac{2}{s^2-4s-5} \\ \dfrac{4}{s^2-4s-5} & \dfrac{s-1}{s^2-4s-5} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}}_{B} U(s) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ U(s)=\frac{2}{s}}}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{5s+1}{s^2-4s-5} \\ \dfrac{8s+12}{s^2-4s-5} \end{bmatrix} \frac{2}{s} = \begin{bmatrix} \dfrac{10s+2}{s^3-4s^2-5s} \\ \dfrac{16s+24}{s^3-4s^2-5s} \end{bmatrix}$$

Infine

$$X(s) = X_\ell(s) + X_f(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2s^2+8s+2}{s^3-4s^2-5s} \\ \dfrac{2s^2+22s+24}{s^3-4s^2-5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2s^2+8s+2}{s(s+1)(s-5)} \\ \dfrac{2s^2+22s+24}{s(s+1)(s-5)} \end{bmatrix}$$

da cui si ricava la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$X(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2s^2+8s+2}{s(s+1)(s-5)} \\ \dfrac{2s^2+22s+24}{s(s+1)(s-5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_1^{(1)}}{s} + \dfrac{R_2^{(1)}}{s+1} + \dfrac{R_3^{(1)}}{s-5} \\ \dfrac{R_1^{(2)}}{s} + \dfrac{R_2^{(2)}}{s+1} + \dfrac{R_3^{(2)}}{s-5} \end{bmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned}
R_1^{(1)} &= \lim_{s\to 0} sX_1(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2s^2+8s+2}{s(s+1)(s-5)} = -\frac{2}{5} = -0.4 \\
R_2^{(1)} &= \lim_{s\to -1} (s+1)X_1(s) = \lim_{s\to -1} (s+1)\frac{2s^2+8s+2}{s(s+1)(s-5)} = -\frac{4}{6} = -0.\overline{6} \\
R_3^{(1)} &= \lim_{s\to 5} (s-5)X_1(s) = \lim_{s\to 5} (s-5)\frac{2s^2+8s+2}{s(s+1)(s-5)} = \frac{92}{30} = 3.0\overline{6} \\
R_1^{(2)} &= \lim_{s\to 0} sX_2(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2s^2+22s+24}{s(s+1)(s-5)} = -\frac{24}{5} = -4.8 \\
R_2^{(2)} &= \lim_{s\to -1} (s+1)X_2(s) = \lim_{s\to -1} (s+1)\frac{2s^2+22s+24}{s(s+1)(s-5)} = \frac{4}{6} = 0.\overline{6} \\
R_3^{(2)} &= \lim_{s\to 5} (s-5)X_2(s) = \lim_{s\to 5} (s-5)\frac{2s^2+22s+24}{s(s+1)(s-5)} = \frac{184}{30} = 6.1\overline{3}
\end{aligned}$$

pertanto:

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{R_1^{(1)}}{s} + \frac{R_2^{(1)}}{s+1} + \frac{R_3^{(1)}}{s-5} \\ \frac{R_1^{(2)}}{s} + \frac{R_2^{(2)}}{s+1} + \frac{R_3^{(2)}}{s-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{0.4}{s} - \frac{0.\overline{6}}{s+1} + \frac{3.0\overline{6}}{s-5} \\ -\frac{4.8}{s} + \frac{0.\overline{6}}{s+1} + \frac{6.1\overline{3}}{s-5} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando si ha infine:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0\overline{6}e^{5t} - 0.\overline{6}e^{-t} - 0.4 \\ 6.1\overline{3}e^{5t} + 0.\overline{6}e^{-t} - 4.8 \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

L'espressione del movimento dell'uscita si ottiene dalla relazione $y(t) = Cx(t) + Du(t)$:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.0\overline{6}e^{5t} - 0.\overline{6}e^{-t} - 0.4 \\ 6.1\overline{3}e^{5t} + 0.\overline{6}e^{-t} - 4.8 \end{bmatrix} \varepsilon(t) + 8 \cdot 2\varepsilon(t) =$$
$$= \left(15.\overline{3}e^{5t} - 2.\overline{6}e^{-t} + 2\right) \varepsilon(t)$$

2 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

determinare l'espressione analitica del movimento dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$ nel caso in cui l'ingresso sia nullo e le condizioni iniziali siano: $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$.

Soluzione

Procedendo nel dominio della trasformata di Laplace, si ha:

$$X(s) = \underbrace{\overbrace{(sI-A)^{-1}}^{H_0^x(s)} x(0)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{libero } \rightarrow X_\ell(s)}} + \underbrace{\overbrace{(sI-A)^{-1} B}^{H_f^x(s)} U(s)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{forzato } \rightarrow X_f(s)}} =$$

$$= \underbrace{H_0^x(s)x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{H_f^x(s)U(s)}_{X_f(s)}$$

Poiché l'ingresso applicato è nullo occorre calcolare solo il movimento libero.
Si ha quindi:

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -3 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} Adj(sI-A) =$$
$$= \frac{1}{s^2-2s-3} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 3 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2-2s-3} & \frac{1}{s^2-2s-3} \\ \frac{3}{s^2-2s-3} & \frac{s}{s^2-2s-3} \end{bmatrix}$$

pertanto:

$$X(s) = X_\ell(s) = (sI-A)^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2-2s-3} & \frac{1}{s^2-2s-3} \\ \frac{3}{s^2-2s-3} & \frac{s}{s^2-2s-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s^2-2s-3} \\ \frac{5s+6}{s^2-2s-3} \end{bmatrix}$$

da cui si ricava la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{(s+1)(s-3)} \\ \frac{5s+6}{(s+1)(s-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1^{(1)}}{s+1} + \frac{R_2^{(1)}}{s-3} \\ \frac{R_1^{(2)}}{s+1} + \frac{R_2^{(2)}}{s-3} \end{bmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned}
R_1^{(1)} &= \lim_{s\to-1}(s+1)X_1(s) = \lim_{s\to-1}(s+1)\frac{2s+1}{(s+1)(s-3)} = \frac{1}{4} = 0.25 \\
R_2^{(1)} &= \lim_{s\to3}(s-3)X_1(s) = \lim_{s\to3}(s-3)\frac{2s+1}{(s+1)(s-3)} = \frac{7}{4} = 1.75 \\
R_1^{(2)} &= \lim_{s\to-1}(s+1)X_2(s) = \lim_{s\to-1}(s+1)\frac{5s+6}{(s+1)(s-3)} = -\frac{1}{4} = -0.25 \\
R_2^{(2)} &= \lim_{s\to3}(s-3)X_2(s) = \lim_{s\to3}(s-3)\frac{5s+6}{(s+1)(s-3)} = \frac{21}{4} = 5.25
\end{aligned}$$

quindi:

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{R_1^{(1)}}{s+1} + \frac{R_2^{(1)}}{s-3} \\ \frac{R_1^{(2)}}{s+1} + \frac{R_2^{(2)}}{s-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.25}{s+1} + \frac{1.75}{s-3} \\ -\frac{0.25}{s+1} + \frac{5.25}{s-3} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando si ha infine:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75e^{3t} + 0.25e^{-t} \\ 5.25e^{3t} - 0.25e^{-t} \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

L'espressione del movimento dell'uscita si ottiene dalla relazione $y(t) = Cx(t)$:

$$y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.75e^{3t} + 0.25e^{-t} \\ 5.25e^{3t} - 0.25e^{-t} \end{bmatrix} \varepsilon(t) = \left(0.5e^{-t} - 3.5e^{3t}\right)\varepsilon(t)$$

3 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(t)$ nel caso in cui l'ingresso $u_1(t)$ sia nullo, l'ingresso $u_2(t)$ sia un impulso di ampiezza 2 e le condizioni iniziali siano nulle.

Soluzione

Procedendo nel dominio della trasformata di Laplace, si ha:

$$Y(s) = \underbrace{\overbrace{C\,(sI-A)^{-1}}^{H_0(s)}\,x(0)}_{\substack{\text{movimento}\\ \text{libero} \to Y_\ell(s)}} + \underbrace{\overbrace{\left[C\,(sI-A)^{-1}\,B+D\right]}^{\substack{H(s)\to\ \text{matrice di}\\ \text{trasferimento}}}\,U(s)}_{\substack{\text{movimento}\\ \text{forzato} \to Y_f(s)}}$$

$$= \underbrace{H_0(s)x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{H(s)U(s)}_{Y_f(s)}$$

Si ha quindi:

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} Adj(sI-A) =$$

$$= \frac{1}{s^2+s+1} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s^2+s+1} & \dfrac{1}{s^2+s+1} \\ -\dfrac{1}{s^2+s+1} & \dfrac{s}{s^2+s+1} \end{bmatrix}$$

Poiché le condizioni iniziali sono nulle, si dovrà calcolare la sola parte di movimento forzato:

$$Y(s) = Y_f(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right] U(s)$$

Inoltre, dal momento che il primo ingresso $u_1(t)$ è nullo e la matrice D è composta di soli zeri, il conto può essere semplificato come segue:

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1}b_2\right] U_2(s)$$

dove b_2 è la seconda colonna della matrice B mentre $U_2(s)$ è la trasformata di Laplace del secondo ingresso $u_2(t)$.

$$Y(s) = \left(\underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]}_{C} \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \dfrac{s+1}{s^2+s+1} & \dfrac{1}{s^2+s+1} \\ -\dfrac{1}{s^2+s+1} & \dfrac{s}{s^2+s+1} \end{array}\right]}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]}_{b_2} \right) \underbrace{2}_{U_2(s)} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \dfrac{s+1}{s^2+s+1} & \dfrac{1}{s^2+s+1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] 2 = \frac{1}{s^2+s+1}\, 2 = \frac{2}{s^2+s+1}$$

da cui si ricava la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+s+1} = \frac{2}{\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{R_1}{\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{R_1^*}{\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

dove:

$$R_1 = \lim_{s \to -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) Y(s) =$$

$$\lim_{s \to -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{2}{\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{j\sqrt{3}} = -j1.1547$$

Pertanto

$$Y(s) = \frac{-j1.1547}{\left(s+\dfrac{1}{2}-j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{j1.1547}{\left(s+\dfrac{1}{2}-j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Ricordando che l'antitrasformata della coppia dei fratti semplici corrispondenti ad una coppia di radici complesse coniugate è del tipo:

$$2Me^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

dove:
σ: parte reale della coppia delle radici complesse
ω: parte immaginaria (determinazione positiva) della coppia delle radici complesse
M: modulo del residuo associato alla radice complessa con parte immaginaria positiva
φ: fase del residuo associato alla radice complessa con parte immaginaria positiva
In questo caso si ha: $\sigma = -0.5$; $\omega = 0.866$;

$$M = \sqrt{(1.1547)^2} = 1.1547,\ \varphi = -\frac{\pi}{2} = -1.5708\,\mathrm{rad}$$

In definitiva:

$$y(t) = \left[2.3094e^{-0.5t}\cos(0.866t - 1.5708)\right]\varepsilon(t)$$

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC
Esercizi risolti

1 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice di stato A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0.2 & 3 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Soluzione

Poiché la matrice A risulta triangolare, gli autovalori si trovano sulla diagonale e sono:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_1) < 0 \\ \lambda_2 = -0.2 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_2) < 0 \\ \lambda_3 = 0.5 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_3) > 0 \\ \lambda_4 = 0 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_4) = 0 \end{array}$$

Gli autovalori sono reali e distinti, pertanto i corrispondenti modi naturali sono rispettivamente:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \rightarrow e^{-3t} \\ \lambda_2 \rightarrow e^{-0.2t} \\ \lambda_3 \rightarrow e^{0.5t} \\ \lambda_4 \rightarrow e^{0t} = \varepsilon(t) \end{array}$$

I modi naturali trovati presentano pertanto le seguenti caratteristiche:

e^{-3t} $\rightarrow$ modo esponenzialmente convergente

$e^{-0.2t}$ $\rightarrow$ modo esponenzialmente convergente

$e^{0.5t}$ $\rightarrow$ modo esponenzialmente divergente

$e^{0t} = \varepsilon(t)$ $\rightarrow$ modo limitato costante

2 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice di stato A:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 1 & 2 \\ -0.2 & 0.3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 & -2.4 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Soluzione

La matrice A è triangolare a blocchi:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 1 & 2 \\ -0.2 & 0.3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 & -2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8 & -2.4 \end{bmatrix}$$

pertanto i suoi autovalori sono quelli dei blocchi quadrati A_{11} e A_{22} posti sulla diagonale principale di A.

Per il blocco A_{11} si ha $\lambda_{1,2} = 0.3 \pm 0.2j \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_{1,2}) > 0$

Per il blocco A_{22} si ha $\lambda_3 = -0.4 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_3) < 0$ e $\lambda_4 = -2 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_4) < 0$.

Il sistema presenta quattro autovalori distinti di cui due complessi coniugati a parte reale positiva ($\lambda_{1,2}$) e due reali negativi (λ_3, λ_4).
I modi naturali corrispondenti sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_{1,2} \rightarrow e^{0.3t}\cos(0.2t), e^{0.3t}\sin(0.2t) \\ &\lambda_2 \rightarrow e^{-0.4t} \\ &\lambda_3 \rightarrow e^{-2t} \end{aligned}$$

I modi naturali trovati presentano pertanto le seguenti caratteristiche:

$e^{0.3t}\cos(0.2t), e^{0.3t}\sin(0.2t)$ → modi oscillanti esponenzialmente divergenti

$e^{-0.4t}$ → modo esponenzialmente convergente

e^{-2t} → modo esponenzialmente convergente

3 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice di stato A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali e, se appropriato, calcolare le corrispondenti costanti di tempo.

Soluzione

Poiché la matrice A risulta diagonale, gli autovalori si trovano sulla diagonale e sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_1) < 0 \\ \lambda_2 &= -0.4 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_2) < 0 \\ \lambda_3 &= -5 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_3) < 0 \end{aligned}$$

Gli autovalori sono reali e distinti, pertanto i corrispondenti modi naturali sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\rightarrow e^{-t} \\ \lambda_2 &\rightarrow e^{-0.4t} \\ \lambda_3 &\rightarrow e^{-5t} \end{aligned}$$

I modi naturali trovati presentano pertanto le seguenti caratteristiche:

e^{-t} → modo esponenzialmente convergente

$e^{-0.4t}$ → modo esponenzialmente convergente

e^{-5t} → modo esponenzialmente convergente

Poiché tutti i modi naturali sono convergenti, si possono calcolare le costanti di tempo.

Per il modo naturale e^{-t} si ha:

$$\tau_1 = \left|\frac{1}{\mathbb{R}e(\lambda_1)}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1\,s$$

Per il modo naturale $e^{-0.4t}$ si ha:

$$\tau_2 = \left|\frac{1}{\mathbb{R}e(\lambda_2)}\right| = \left|\frac{1}{-0.4}\right| = 2.5\,s$$

Per il modo naturale e^{-5t} si ha:

$$\tau_3 = \left|\frac{1}{\mathbb{R}e(\lambda_3)}\right| = \left|\frac{1}{-5}\right| = 0.2\,s$$

4 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice di stato A:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Soluzione

La matrice A è diagonale a blocchi:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & & \mathbf{0} \\ & A_{22} & \\ \mathbf{0} & & A_{33} \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = [0.2]\,, A_{22} = [-0.1]\,, A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$$

pertanto, i suoi autovalori sono quelli dei blocchi quadrati A_{11}, A_{22} e A_{33} posti sulla diagonale principale di A.

Per il blocco A_{11} si ha $\lambda_1 = 0.2 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_1) > 0$
Per il blocco A_{22} si ha $\lambda_2 = -0.1 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_2) < 0$.
Per il blocco A_{33} si ha $\lambda_3 = \lambda_4 = -4 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_{3,4}) < 0$.

L'autovalore λ_1 è reale positivo, l'autovalore λ_2 è reale negativo mentre gli autovalori (λ_3, λ_4) sono reali negativi e coincidenti cioè con molteplicità $\mu' = 2$.
I modi naturali corrispondenti sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \rightarrow e^{0.2t} \\ &\lambda_2 \rightarrow e^{-0.1t} \\ &\lambda_{3,4} \rightarrow e^{-4t}, t \cdot e^{-4t} \end{aligned}$$

I modi naturali trovati presentano pertanto le seguenti caratteristiche:

$e^{0.2t}$ $\rightarrow$ modo esponenzialmente divergente

$e^{-0.1t}$ $\rightarrow$ modo esponenzialmente convergente

$e^{-4t}, t \cdot e^{-4t}$ $\rightarrow$ modi esponenzialmente convergenti

5 Esercizio

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{1-2s}{(s^2+12s+20)(s+4)}$$

determinare l'insieme T delle costanti di tempo dei poli.

Soluzione

I poli della funzione di trasferimento data sono le radici del suo denominatore:

$$(s^2+12s+20)(s+4) = (s+2)(s+10)(s+4)$$

Pertanto si ha:

$$\begin{array}{c} p_1 = -2 \rightarrow \mathbb{R}e(p_1) < 0 \\ p_2 = -10 \rightarrow \mathbb{R}e(p_2) < 0 \\ p_3 = -4 \rightarrow \mathbb{R}e(p_3) < 0 \end{array}$$

Poiché tutti i poli hanno parte reale negativa, si possono calcolare le costanti di tempo:

$$\tau_1 = \left|\frac{1}{\mathbb{R}e(p_1)}\right| = \left|\frac{1}{-2}\right| = 0.5\,s$$

$$\tau_2 = \left|\frac{1}{\mathbb{R}e(p_2)}\right| = \left|\frac{1}{-10}\right| = 0.1\,s$$

$$\tau_3 = \left|\frac{1}{\mathbb{R}e(p_3)}\right| = \left|\frac{1}{-4}\right| = 0.25\,s$$

Quindi

$$T = \left\{\ 0.5, \quad 0.1, \quad 0.25\ \right\}$$

Soluzione per sistemi dinamici LTI TD
Esercizi risolti

1 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} x(k)$$

determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(k)$ nel caso in cui l'ingresso sia $u(k) = 0.9^k \varepsilon(k)$ e le condizioni iniziali siano: $x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Soluzione

Procedendo nel dominio della trasformata zeta, si ha:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \underbrace{\overbrace{zC\left(zI-A\right)^{-1}}^{H_0(z)} x(0)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{libero} \to Y_\ell(z)}} + \underbrace{\overbrace{\left[C\left(zI-A\right)^{-1}B+D\right]}^{\substack{H(z)\,\to\ \text{matrice di} \\ \text{trasferimento}}} U(z)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{forzato} \to Y_f(z)}} \\ &= \underbrace{H_0(z)x(0)}_{Y_\ell(z)} + \underbrace{H(z)U(z)}_{Y_f(z)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} z-0.5 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(zI-A)} Adj(zI-A) =$$

$$= \frac{1}{(z-0.5)(z-1)} \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-0.5} & -\dfrac{-1}{(z-0.5)(z-1)} \\ 0 & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix}$$

pertanto:

$$Y_\ell(z) = zC(zI-A)^{-1}x(0) = z\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-0.5} & \dfrac{-1}{(z-0.5)(z-1)} \\ 0 & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{8z}{z-0.5}$$

$$Y_f(z) = \left[C(zI-A)^{-1}B + D\right]U(z) =$$

$$= \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-0.5} & \dfrac{-1}{(z-0.5)(z-1)} \\ 0 & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix}}_{(zI-A)^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{0}_{D}\right)\underbrace{\frac{z}{z-0.9}}_{U(z)}$$

$$= \frac{4z}{(z-0.5)(z-0.9)}$$

Infine

$$Y(z) = Y_\ell(z) + Y_f(z) = z\left(\frac{8}{z-0.5} + \frac{4}{(z-0.5)(z-0.9)}\right)$$

Si noti che, ai fini della decomposizione in fratti semplici, è inutile sommare i due addendi all'interno della parentesi. Si può infatti procedere nel modo seguente:

$$Y(z) = z\left(\frac{8}{z-0.5} + \frac{R_1}{z-0.5} + \frac{R_2}{z-0.9}\right)$$

dove:

$$R_1 = \lim_{z\to 0.5}(z-0.5)\frac{4}{(z-0.5)(z-0.9)} = -10$$

$$R_2 = \lim_{z\to 0.9}(z-0.9)\frac{4}{(z-0.5)(z-0.9)} = 10$$

pertanto:

$$Y(z) = z\left(\frac{8}{z-0.5} - \frac{10}{z-0.5} + \frac{10}{z-0.9}\right) =$$

$$= -\frac{2z}{z-0.5} + \frac{10z}{z-0.9}$$

quindi:

$$y(k) = \left(-2\cdot 0.5^k + 10\cdot 0.9^k\right)\varepsilon(k)$$

2 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 7 & 7 \end{bmatrix} x(k)$$

determinare l'espressione analitica del movimento dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(k)$ nel caso in cui l'ingresso sia un gradino di ampiezza unitaria e le condizioni iniziali siano nulle.

Soluzione

Procedendo nel dominio della trasformata zeta, si ha:

$$X(z) = \underbrace{\overbrace{z\,(zI-A)^{-1}}^{H_0^x(z)}\,x(0)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{libero } \to X_\ell(z)}} + \underbrace{\overbrace{(zI-A)^{-1}\,B}^{H_f^x(z)}\,U(z)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{forzato } \to X_f(z)}} =$$

$$= \underbrace{H_0^x(z)x(0)}_{X_\ell(z)} + \underbrace{H_f^x(z)U(z)}_{X_f(z)}$$

Si ha quindi:

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -0.1 & z+0.3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(zI-A)} Adj(zI-A) =$$

$$= \frac{1}{z^2+0.3z-0.1} \begin{bmatrix} z+0.3 & 1 \\ 0.1 & z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z+0.3}{z^2+0.3z-0.1} & \frac{1}{z^2+0.3z-0.1} \\ \frac{0.1}{z^2+0.3z-0.1} & \frac{z}{z^2+0.3z-0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z+0.3}{(z+0.5)(z-0.2)} & \frac{1}{(z+0.5)(z-0.2)} \\ \frac{0.1}{(z+0.5)(z-0.2)} & \frac{z}{(z+0.5)(z-0.2)} \end{bmatrix}$$

Poiché le condizioni iniziali sono nulle, si dovrà calcolare la sola parte di movimento forzato:

$$X_f(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{z+0.3}{(z+0.5)(z-0.2)} & \dfrac{1}{(z+0.5)(z-0.2)} \\ \dfrac{0.1}{(z+0.5)(z-0.2)} & \dfrac{z}{(z+0.5)(z-0.2)} \end{bmatrix}}_{(zI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} U(z)$$

$$\underset{U(z)=\frac{z}{z-1}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z+0.5)(z-0.2)} \\ \dfrac{z}{(z+0.5)(z-0.2)} \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = z \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} \\ \dfrac{z}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} \end{bmatrix}$$

Infine

$$X(z) = X_f(z) = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} \\ \dfrac{z}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} \end{bmatrix}$$

da cui si ricava la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$X(z) = z \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} \\ \dfrac{z}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \dfrac{R_1^{(1)}}{z+0.5} + \dfrac{R_2^{(1)}}{z-0.2} + \dfrac{R_3^{(1)}}{z-1} \\ \dfrac{R_1^{(2)}}{z+0.5} + \dfrac{R_2^{(2)}}{z-0.2} + \dfrac{R_3^{(2)}}{z-1} \end{bmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned}
R_1^{(1)} &= \lim_{z\to -0.5}(z+0.5)\frac{X_1(z)}{z} = \lim_{z\to -0.5}(z+0.5)\frac{1}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} = 0.9524 \\
R_2^{(1)} &= \lim_{z\to 0.2}(z-0.2)\frac{X_1(z)}{z} = \lim_{z\to 0.2}(z-0.2)\frac{1}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} = -1.7857 \\
R_3^{(1)} &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{X_1(z)}{z} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} = 0.8\bar{3} \\
R_1^{(2)} &= \lim_{z\to -0.5}(z+0.5)\frac{X_2(z)}{z} = \lim_{z\to -0.5}(z+0.5)\frac{z}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} = -0.4761 \\
R_2^{(2)} &= \lim_{z\to 0.2}(z-0.2)\frac{X_2(z)}{z} = \lim_{z\to 0.2}(z-0.2)\frac{z}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} = -0.3571 \\
R_3^{(2)} &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{X_2(z)}{z} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z+0.5)(z-0.2)(z-1)} = 0.8\bar{3}
\end{aligned}$$

pertanto:

$$X(z) = z\begin{bmatrix} \dfrac{R_1^{(1)}}{z+0.5} + \dfrac{R_2^{(1)}}{z-0.2} + \dfrac{R_3^{(1)}}{z-1} \\ \dfrac{R_1^{(2)}}{z+0.5} + \dfrac{R_2^{(2)}}{z-0.2} + \dfrac{R_3^{(2)}}{z-1} \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} \dfrac{0.9524}{z+0.5} - \dfrac{1.7857}{z-0.2} + \dfrac{0.8\bar{3}}{z-1} \\ -\dfrac{0.4761}{z+0.5} - \dfrac{0.3571}{z-0.2} + \dfrac{0.8\bar{3}}{z-1} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando si ha infine:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8\bar{3} + 0.9524 \cdot (-0.5)^k - 1.7857 \cdot (0.2)^k \\ 0.8\bar{3} - 0.4761 \cdot (-0.5)^k - 0.3571 \cdot (0.2)^k \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

L'espressione del movimento dell'uscita si ottiene dalla relazione $y(k) = Cx(k)$:

$$y(k) = Cx(k) = \begin{bmatrix} 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8\bar{3} + 0.9524 \cdot (-0.5)^k - 1.7857 \cdot (0.2)^k \\ \\ 0.8\bar{3} - 0.4761 \cdot (-0.5)^k - 0.3571 \cdot (0.2)^k \end{bmatrix} \varepsilon(k) =$$

$$= \left(11.\bar{6} + 3.3341 \cdot (-0.5)^k - 15 \cdot (0.2)^k\right) \varepsilon(k)$$

3 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} x(k) - 4u(k)$$

determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(k)$ nel caso in cui l'ingresso sia nullo e le condizioni iniziali siano: $x_0 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Soluzione

Procedendo nel dominio della trasformata zeta, si ha:

$$Y(z) = \underbrace{\overbrace{zC\left(zI - A\right)^{-1}}^{H_0(z)} x(0)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{libero} \to Y_\ell(z)}} + \underbrace{\overbrace{\left[C\left(zI - A\right)^{-1} B + D\right]}^{\substack{H(z) \to \text{ matrice di} \\ \text{trasferimento}}} U(z)}_{\substack{\text{movimento} \\ \text{forzato} \to Y_f(z)}}$$

$$= \underbrace{H_0(z)x(0)}_{Y_\ell(z)} + \underbrace{H(z)U(z)}_{Y_f(z)}$$

Si ha quindi:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z+1 & -5 \\ -3 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(zI-A)} Adj(zI-A) =$$

$$= \frac{1}{(z+1)(z-1)-15} \begin{bmatrix} z-1 & 5 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-1}{z^2-16} & \frac{5}{z^2-16} \\ \frac{3}{z^2-16} & \frac{z+1}{z^2-16} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z-1}{(z+4)(z-4)} & \frac{5}{(z+4)(z-4)} \\ \frac{3}{(z+4)(z-4)} & \frac{z+1}{(z+4)(z-4)} \end{bmatrix}$$

Poiché l'ingresso applicato risulta essere nullo, si dovrà calcolare la sola parte di movimento libero:

$$Y_\ell(z) = zC(zI-A)^{-1}x(0) =$$

$$= z \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z-1}{(z+4)(z-4)} & \frac{5}{(z+4)(z-4)} \\ \frac{3}{(z+4)(z-4)} & \frac{z+1}{(z+4)(z-4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= z \begin{bmatrix} \frac{2z-17}{(z+4)(z-4)} & -\frac{5z-5}{(z+4)(z-4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = z\frac{z+29}{(z+4)(z-4)}$$

Infine

$$Y(z) = Y_\ell(z) + Y_f(z) = z\frac{z+29}{(z+4)(z-4)}$$

Si ricava quindi la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$Y(z) = z\left(\frac{R_1}{z+4} + \frac{R_2}{z-4}\right)$$

dove:

$$R_1 = \lim_{z\to-4}(z+4)\frac{z+29}{(z+4)(z-4)} = -3.125$$
$$R_2 = \lim_{z\to4}(z-4)\frac{z+29}{(z+4)(z-4)} = 4.125$$

pertanto:

$$Y(z) = z\left(\frac{R_1}{z+4} + \frac{R_2}{z-4}\right) = z\left(-\frac{3.125}{z+4} + \frac{4.125}{z-4}\right) = -\frac{3.125z}{z+4} + \frac{4.125z}{z-4}$$

quindi:

$$y(k) = \left(4.125 \cdot 4^k - 3.125 \cdot (-4)^k\right) \varepsilon(k)$$

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD
Esercizi risolti

1 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice di stato A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0.2 & 3 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Soluzione

Poiché la matrice A risulta triangolare, gli autovalori si trovano sulla diagonale e sono:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \rightarrow |\lambda_1| > 1 \\ \lambda_2 = -0.2 \rightarrow |\lambda_2| < 1 \\ \lambda_3 = 0.5 \rightarrow |\lambda_3| < 1 \\ \lambda_4 = 0 \rightarrow |\lambda_4| < 1 \end{array}$$

Gli autovalori sono reali e distinti, pertanto i corrispondenti modi naturali sono rispettivamente:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \rightarrow (-3)^k \\ \lambda_2 \rightarrow (-0.2)^k \\ \lambda_3 \rightarrow 0.5^k \\ \lambda_4 \rightarrow 0^k = \delta(k) \end{array}$$

I modi naturali trovati presentano pertanto le seguenti caratteristiche:

$(-3)^k \rightarrow$ modo geometricamente divergente (alternato)

$(-0.2)^k \rightarrow$ modo geometricamente convergente (alternato)

$0.5^k \rightarrow$ modo geometricamente convergente

$0^k = \delta(k) \rightarrow$ modo impulsivo (convergente a zero in un passo)

2 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice di stato A:

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 1 & 2 \\ -0.2 & -0.3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 & -2.4 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Soluzione

La matrice A è triangolare a blocchi:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 1 & 2 \\ -0.2 & 0.3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 & -2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8 & -2.4 \end{bmatrix}$$

pertanto i suoi autovalori sono quelli dei blocchi quadrati A_{11} e A_{22} posti sulla diagonale principale di A.

Per il blocco A_{11} si ha: $\lambda_{1,2} = 0.3 \pm 0.2j = 0.361e^{\pm 0.588j} \rightarrow |\lambda_{1,2}| < 1$

Per il blocco A_{22} si ha: $\lambda_3 = -0.4 \rightarrow |\lambda_3| < 1$ e $\lambda_4 = -2 \rightarrow |\lambda_4| > 1$.

Il sistema presenta quattro autovalori distinti di cui due complessi coniugati con modulo minore di 1 ($\lambda_{1,2}$) e due reali, aventi λ_3 modulo inferiore a 1 e λ_4 modulo superiore a 1.
I modi naturali corrispondenti sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_{1,2} \rightarrow 0.361^k \cos(0.588k), 0.361^k \sin(0.588k) \\ &\lambda_2 \rightarrow (-0.4)^k \\ &\lambda_3 \rightarrow (-2)^k \end{aligned}$$

I modi naturali trovati presentano pertanto le seguenti caratteristiche:

$0.361^k \cos(0.588k), 0.361^k \sin(0.588k) \rightarrow$ modi oscillanti geometricamente convergenti

$(-0.4)^k \rightarrow$ modo geometricamente convergente (alternato)

$(-2)^k \rightarrow$ modo geometricamente divergente (alternato)

3 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice di stato A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Soluzione

Poiché la matrice A risulta diagonale, gli autovalori si trovano sulla diagonale e sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -1 \rightarrow |\lambda_1| = 1 \\ &\lambda_2 = -0.4 \rightarrow |\lambda_2| < 1 \\ &\lambda_3 = 5 \rightarrow |\lambda_3| > 1 \end{aligned}$$

Gli autovalori sono reali e distinti pertanto i corrispondenti modi naturali sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \rightarrow (-1)^k \\ &\lambda_2 \rightarrow (-0.4)^k \\ &\lambda_3 \rightarrow 5^k \end{aligned}$$

I modi naturali trovati presentano pertanto le seguenti caratteristiche:

$(-1)^k \rightarrow$ modo limitato (alternato)

$(-0.4)^k \rightarrow$ modo geometricamente convergente (alternato)

$5^k \rightarrow$ modo geometricamente divergente