Soluzione per sistemi dinamici LTI TC
Esercizi proposti

1 Esercizio

Dato il sistema dinamico a tempo continuo caratterizzato dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 8\,x_1(t) + 2\,x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= 3\,x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

determinare l'espressione analitica dell'uscita $y(t)$ supponendo condizioni iniziali nulle ed ingresso a gradino di ampiezza 7, ($u(t) = 7\varepsilon(t)$).

Risultato: $y(t) = [2.0417 \cdot e^{4t} + 0.5833 \cdot e^{-2t} - 2.625]\,\varepsilon(t)$.

2 Esercizio

Si consideri il seguente sistema LTI tempo continuo a due ingressi (u_1, u_2) e due uscite (y_1, y_2):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ -1.6 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra il secondo ingresso u_2 e la seconda uscita y_2.

Risultato: $G(s) = \dfrac{1.6(s + 0.25)}{(s + 2.5)(s + 4)}$.

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC
Esercizi proposti

1 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Risultato: il sistema presenta due modi esponenzialmente convergenti ed un modo limitato oscillante.

2 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.01 & 0 & 0 \\ 1 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Risultato: il sistema presenta tre modi esponenzialmente convergenti ed un modo esponenzialmente divergente.

3 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Risultato: il sistema presenta tre modi esponenzialmente divergenti.

4 Esercizio

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s-5}{(s+0.2)(s^2+2s+1)}$$

Determinare l'insieme T delle costanti di tempo dei poli.

Risultato: $T = \left\{ \ 5, \ \ 1 \ \right\}$.

Soluzione per sistemi dinamici LTI TD
Esercizi proposti

1 Esercizio

Dato il seguente sistema dinamico LTI a tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k) + u(k)$$

determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(k)$ nel caso in cui l'ingresso sia un impulso di ampiezza unitaria $u(k) = \delta(k)$ e le condizioni iniziali siano nulle.
Risultato: $y(k) = \left(-\frac{16}{9} \cdot (-0.5)^k - \frac{20}{9} \cdot 0.4^k\right) \varepsilon(k) + 6\delta(k)$

2 Esercizio

Si consideri il seguente sistema LTI a tempo discreto a due ingressi (u_1, u_2) e due uscite (y_1, y_2):

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.09 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.5 & 2 \end{bmatrix} x(k)$$

Supponendo nulle le condizioni iniziali, calcolare l'espressione analitica del movimento della prima uscita $y_1(k)$ quando il primo ingresso è nullo ($u_1(k) = 0$) ed il secondo ingresso è un gradino di ampiezza 5 ($u_2(k) = 5\varepsilon(k)$).
Risultato: $y_1(k) = (5.4945 + 6.4103(-0.3)^k - 11.9048(0.3)^k)\varepsilon(k)$

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD
Esercizi proposti

1 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Risultato: il sistema presenta un modo geometricamente convergente (alternato), un modo geometricamente divergente (alternato) e due modi limitati oscillanti.

2 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.01 & 0 & 0 \\ 1 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Risultato: il sistema presenta due modi oscillanti geometricamente convergenti, e due modi geometricamente divergenti, d i cui uno alternato.

3 Esercizio

Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Determinare le caratteristiche dei modi naturali.

Risultato: il sistema presenta tre modi geometricamente divergenti di cui due oscillanti.