Classificazione di sistemi dinamici
Esercizi risolti

1 Esercizio

Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 2x_2(k) + \cos(u(k)) \\ x_2(k+1) &= -x_1(k) \\ y(k) &= x_2(k) + u(k) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a tempo continuo o discreto, SISO o MIMO, a dimensione finita o infinita, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante, proprio o non proprio.

Soluzione

Il sistema è:

- dinamico (il legame ingresso-uscita non è istantaneo)
- a tempo discreto (le equazioni di stato sono equazioni alle differenze)
- SISO ($p =$ #ingressi $= \dim(u) = 1$, $q =$ #uscite $= \dim(y) = 1$)
- a dimensione finita ($n =$ #variabili di stato $= \dim(x) = 2 < \infty$)
- non lineare (per il termine non lineare $\cos(u(k))$)
- tempo-invariante (le equazioni di stato e di uscita sono a coefficienti costanti)
- non (strettamente) proprio (nell'equazione di uscita compare l'ingresso u)

2 Esercizio

Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + 3u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 0.5x_1(t) + u_2(t) \\ y(t) &= 2x_1(t) \cdot u_1(t) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a tempo continuo o discreto, SISO o MIMO, a dimensione finita o infinita, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante, proprio o non proprio.

Soluzione

Il sistema è:

- dinamico (il legame ingresso-uscita non è istantaneo)
- a tempo continuo (le equazioni di stato sono equazioni differenziali)
- MIMO ($p =$ #ingressi $= \dim(u) = 2$, $q =$ #uscite $= \dim(y) = 1$)
- a dimensione finita ($n =$ #variabili di stato $= \dim(x) = 2 < \infty$)
- non lineare (per il termine non lineare $x_1(t) \cdot u_1(t)$)
- tempo-invariante (le equazioni di stato e di uscita sono a coefficienti costanti)
- non (strettamente) proprio (nell'equazione di uscita compare l'ingresso u_1)

3 Esercizio

Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= t \cdot x_2(t) + 3u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 0.5x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= 2x_1(t) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a tempo continuo o discreto, SISO o MIMO, a dimensione finita o infinita, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante, proprio o non proprio.

Soluzione

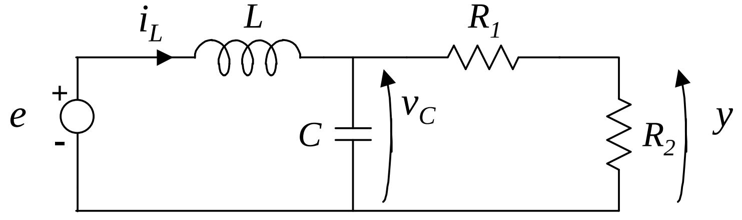
Il sistema è:

- dinamico (il legame ingresso-uscita non è istantaneo)
- a tempo continuo (le equazioni di stato sono equazioni differenziali)
- SISO ($p =$ #ingressi $= \dim(u) = 1$, $q =$ #uscite $= \dim(y) = 1$)
- a dimensione finita ($n =$ #variabili di stato $= \dim(x) = 2 < \infty$)
- lineare (le equazioni di stato e di uscita sono lineari in x_1, x_2, u)
- tempo-variante (per il termine $t \cdot x_2(t)$ avente il coefficiente non costante t)
- (strettamente) proprio (nell'equazione di uscita non compare l'ingresso u)

Modellistica dei sistemi dinamici elettrici
Esercizi risolti

1 Esercizio

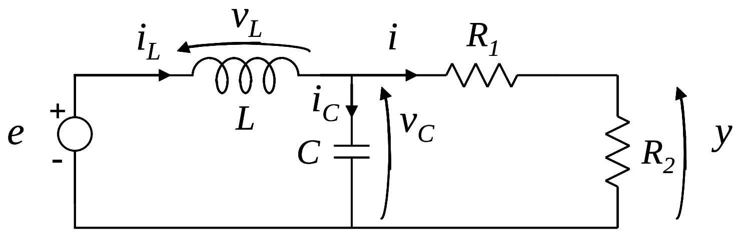
Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, i cui componenti assumono i seguenti valori numerici: $L = 10^{-3}$ H, $C = 10^{-6}$ F, $R_1 = 10^3\,\Omega$, $R_2 = 9 \cdot 10^3\,\Omega$.



Determinare le matrici A, B, C e D della rappresentazione in variabili di stato del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, scegliendo come variabile di stato $x = [i_L,\ v_C]^T$ e come variabile di ingresso $u = e$.

Soluzione

Facendo riferimento alle variabili riportate nella figura seguente,



le equazioni costitutive dei componenti con memoria (induttori e condensatori) sono:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$
$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

mentre le equazioni topologiche della rete elettrica sono:

$$e(t) = v_L(t) + v_C(t) \qquad \text{(equazione alla maglia di sinistra)}$$
$$v_C(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t) \qquad \text{(equazione alla maglia di destra)}$$
$$i_L(t) = i_C(t) + i(t) \qquad \text{(equazione al nodo)}$$

Essendo state scelte come variabili di stato e d'ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = e(t)$$

le equazioni di stato risultano essere:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{e(t) - v_C(t)}{L} = \frac{-1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t) = f_1(t,x,u)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C} = \frac{i_L(t) - i(t)}{C} = \frac{x_1(t)}{C} - \frac{v_C(t)}{C(R_1+R_2)} =$$

$$= \frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{C(R_1+R_2)}x_2(t) = f_2(t,x,u)$$

e l'equazione d'uscita è:

$$y(t) = R_2 i(t) = R_2\frac{v_C(t)}{R_1+R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2}x_2(t) = g(t,x,u)$$

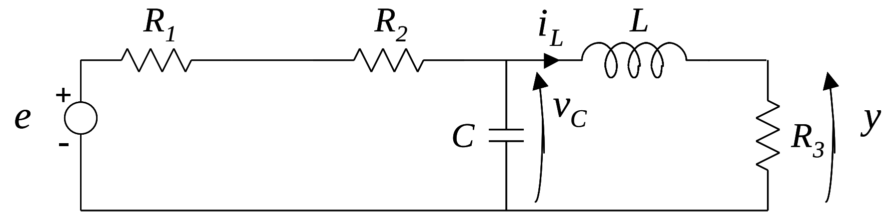
Poiché i componenti hanno valori costanti, il sistema dinamico è LTI con matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10^3 \\ 10^6 & -10^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

2 Esercizio

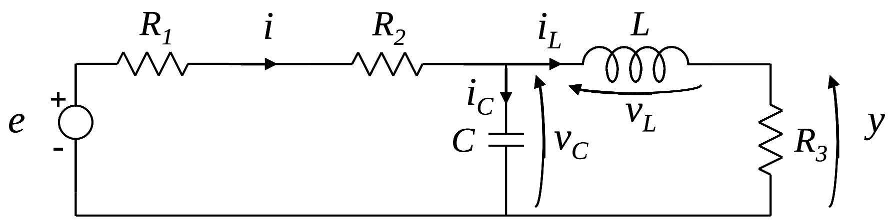
Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, i cui componenti assumono i seguenti valori numerici: $L = 0.1\,\mathrm{H}$, $C = 10^{-4}\,\mathrm{F}$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 990\,\Omega$, $R_3 = 500\,\Omega$.



Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ fra l'ingresso $E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$ e l'uscita $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Soluzione

Facendo riferimento alle variabili riportate nella figura seguente,



le equazioni costitutive dei componenti con memoria (induttori e condensatori) sono:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C\frac{dv_C(t)}{dt} \\ v_L(t) &= L\frac{di_L(t)}{dt} \end{aligned}$$

mentre le equazioni topologiche della rete elettrica sono:

$$\begin{aligned} e(t) &= R_1 i(t) + R_2 i(t) + v_C(t) && \text{(equazione alla maglia di sinistra)} \\ v_C(t) &= v_L(t) + R_3 i_L(t) && \text{(equazione alla maglia di destra)} \\ i(t) &= i_C(t) + i_L(t) && \text{(equazione al nodo)} \end{aligned}$$

Scegliendo come variabili di stato e d'ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = e(t)$$

le equazioni di stato risultano essere:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C} = \frac{i(t) - i_L(t)}{C} = \frac{e(t) - v_C(t)}{C(R_1 + R_2)} - \frac{x_2(t)}{C} = \\ &= \frac{-1}{C(R_1 + R_2)}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C(R_1 + R_2)}u(t) = f_1(t, x, u) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_C(t) - R_3 i_L(t)}{L} = \frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R_3}{L}x_2(t) = f_2(t, x, u) \end{aligned}$$

e l'equazione d'uscita è:

$$y(t) = R_3 i_L(t) = R_3 x_2(t) = g(t, x, u)$$

Poiché i componenti hanno valori costanti, il sistema dinamico è LTI con matrici:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{C(R_1 + R_2)} & \dfrac{-1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & \dfrac{-R_3}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -10^4 \\ 10 & -5000 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C(R_1 + R_2)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

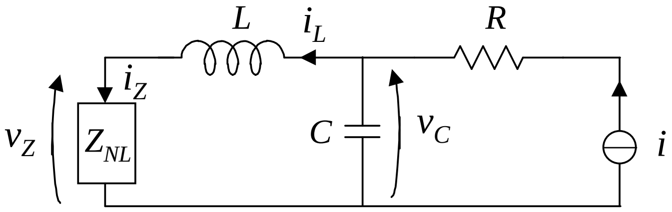
$$C = \begin{bmatrix} 0 & R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 500 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

e la funzione di trasferimento è:

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 10 & 10^4 \\ -10 & s + 5000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} + [0] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 500 \end{bmatrix} \frac{1}{(s + 10)(s + 5000) + 10^5} \begin{bmatrix} s + 5000 & -10^4 \\ 10 & s + 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{50000}{s^2 + 5010s + 150000} \end{aligned}$$

3 Esercizio

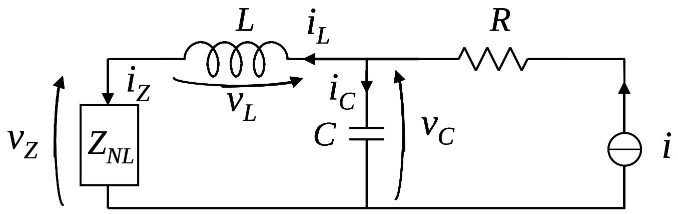
Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, in cui compare un componente Z_{NL} avente caratteristica statica non lineare: $v_Z(t) = \alpha\, i_Z(t) + \beta\, i_Z^3(t)$.



Scrivere le equazioni di stato del sistema, scegliendo come variabile di stato $x = [i_L,\ v_C]^T$ e come variabile di ingresso $u = i$.

Soluzione

Facendo riferimento alle variabili riportate nella figura seguente,



le equazioni costitutive dei componenti con memoria (induttori e condensatori) sono:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L\frac{di_L(t)}{dt} \\ i_C(t) &= C\frac{dv_C(t)}{dt} \end{aligned}$$

mentre le equazioni topologiche della rete elettrica sono:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_L(t) + v_Z(t) && \text{(equazione alla maglia)} \\ i(t) &= i_L(t) + i_C(t) && \text{(equazione al nodo)} \end{aligned}$$

Essendo state scelte come variabili di stato e d'ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = i(t)$$

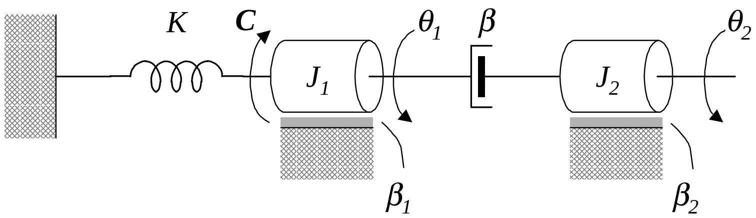
ed osservando che $i_Z(t) = i_L(t) = x_1(t)$, le equazioni di stato risultano essere:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_C(t) - v_Z(t)}{L} = \frac{x_2(t)}{L} - \frac{\alpha\, i_Z(t) + \beta\, i_Z^3(t)}{L} = \\ &= -\frac{\alpha}{L}x_1(t) - \frac{\beta}{L}x_1^3(t) + \frac{1}{L}x_2(t) = f_1(t,x,u) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C} = \frac{i(t) - i_L(t)}{C} = \frac{-1}{C}x_1(t) + \frac{1}{C}u(t) = f_2(t,x,u) \end{aligned}$$

Modellistica dei sistemi dinamici meccanici
Esercizi risolti

1 Esercizio

Nel sistema dinamico meccanico in rotazione riportato in figura, due corpi puntiformi (aventi momenti d'inerzia J_1 e J_2 e posizioni angolari θ_1 e θ_2) sono collegati fra loro mediante uno smorzatore con coefficiente di attrito viscoso β. Il corpo J_1, su cui agisce una coppia esterna C, è collegato ad una parete fissa per mezzo di una molla torsionale con elasticità K. Ognuno dei due corpi è soggetto ad una coppia di attrito, caratterizzata rispettivamente da un coefficiente di attrito viscoso equivalente β_1 e β_2.



Scrivere le equazioni del moto dei due corpi puntiformi.

Soluzione

L'equazione del moto del corpo puntiforme d'inerzia J_1 è pari a:

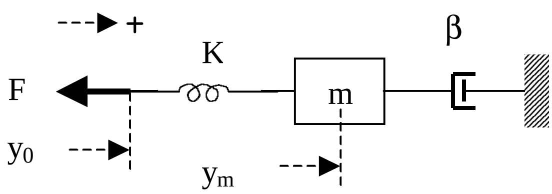
$$J_1\ddot{\theta}_1(t) = -C(t) - \Big[K(\theta_1(t) - 0) + \beta(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) + \beta_1(\dot{\theta}_1(t) - 0)\Big] =$$
$$= -K\theta_1(t) - (\beta + \beta_1)\dot{\theta}_1(t) + \beta\dot{\theta}_2(t) - C(t) \quad \Rightarrow$$
$$J_1\ddot{\theta}_1(t) + (\beta + \beta_1)\dot{\theta}_1(t) + K\theta_1(t) = \beta\dot{\theta}_2(t) - C(t)$$

mentre l'equazione del moto del corpo puntiforme d'inerzia J_2 è pari a:

$$J_2\ddot{\theta}_2(t) = -\Big[\beta(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)) + \beta_2(\dot{\theta}_2(t) - 0)\Big] = \beta\dot{\theta}_1(t) - (\beta + \beta_2)\dot{\theta}_2(t) \quad \Rightarrow$$
$$J_2\ddot{\theta}_2(t) + (\beta + \beta_2)\dot{\theta}_2(t) = \beta\dot{\theta}_1(t)$$

2 Esercizio

Dato il sistema riportato in figura, in cui $F(t)$ è la forza applicata al punto materiale di posizione $y_0(t)$, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ fra $F(s)$ e la posizione $y_m(s)$.



Soluzione

L'equazione del moto del corpo puntiforme di massa m è pari a:

$$m\,\ddot{y}_m(t) = -\left[K(y_m(t) - y_0(t)) + \beta(\dot{y}_m(t) - 0)\right] = -Ky_m(t) + Ky_0(t) - \beta\dot{y}_m(t)$$

mentre l'equazione del moto del punto materiale di posizione $y_0(t)$ è pari a:

$$0\,\ddot{y}_m(t) = 0 = F(t) - K(y_m(t) - y_0(t)) = F(t) - Ky_m(t) + Ky_0(t)$$

Per determinare la funzione di trasferimento $G(s)$, è sufficiente trasformare nel dominio di Laplace le due equazioni del moto, ipotizzando condizioni iniziali nulle:

$$ms^2\,y_m(s) = -Ky_m(s) + Ky_0(s) - \beta s\,y_m(s) \quad\Rightarrow\quad (ms^2 + \beta s + K)\,y_m(s) = Ky_0(s)$$

$$0 = F(s) - Ky_m(s) + Ky_0(s) \quad\Rightarrow\quad Ky_0(s) = -F(s) + Ky_m(s)$$

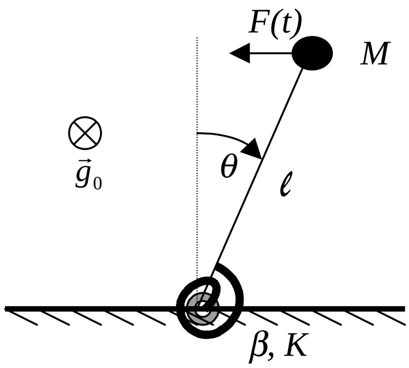
ed esplicitare quindi il rapporto fra $y_m(s)$ ed $F(s)$, sostituendo un'equazione nell'altra:

$$(ms^2+\beta s+K)\,y_m(s) = Ky_0(s) = -F(s)+Ky_m(s) \quad\Rightarrow\quad (ms^2+\beta s)\,y_m(s) = -F(s)$$

$$\Rightarrow\quad G(s) = \frac{y_m(s)}{F(s)} = \frac{-1}{ms^2 + \beta s}$$

3 Esercizio

Un corpo puntiforme di massa M è collegato ad una cerniera mediante un'asta rigida di lunghezza ℓ e massa trascurabile, la cui posizione angolare è individuata dall'angolo $\theta(t)$. Il pendolo così costituito è libero di muoversi vincolato in un semipiano orizzontale ($-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$) perpendicolare alla direzione su cui agisce il campo gravitazionale. Sulla massa M agisce una forza $F(t)$ in direzione orizzontale e verso indicato nella figura sottostante. Sulla cerniera si originano una coppia di attrito viscoso, caratterizzata dal coefficiente β, ed una coppia elastica, caratterizzata dal coefficiente K. La forza $F(t)$ e la velocità angolare $\dot{\theta}(t)$ del pendolo costituiscono rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema.



Determinare il modello matematico in variabili di stato di tale sistema dinamico, scegliendo come variabile di stato $x(t) = \left[\theta(t),\ \dot{\theta}(t)\right]^T$ e considerando i seguenti valori numerici dei parametri: $M = 0.2$ kg, $\ell = 0.5$ m, $\beta = 0.1$ Nms/rad, $K = 0.3$ Nm/rad.

Soluzione

Poiché il campo gravitazionale è perpendicolare al piano su cui si muove il sistema dinamico, il contributo della forza peso è nullo ai fini dell'equazione del moto del pendolo, che è data da:

$$J\ddot{\theta}(t) = T_F(t) - \left[K(\theta(t) - 0) + \beta(\dot{\theta}(t) - 0)\right] = -\ell F(t)\cos(\theta(t)) - K\theta(t) - \beta\dot{\theta}(t)$$

in cui $J = M\ell^2$. Essendo state scelte come variabili di stato e d'ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = F(t)$$

le equazioni di stato risultano essere:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) = x_2(t) = f_1(t, x, u) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = \ddot{\theta}(t) = \frac{1}{M\ell^2}\left[-\ell F(t)\cos(\theta(t)) - K\theta(t) - \beta\dot{\theta}(t)\right] = \\
&= \frac{-K}{M\ell^2}x_1(t) - \frac{\beta}{M\ell^2}x_2(t) - \frac{1}{M\ell}\cos(x_1(t)) \cdot u(t) = \\
&= -6x_1(t) - 2x_2(t) - 10\cos(x_1(t)) \cdot u(t) = f_2(t, x, u)
\end{aligned}$$

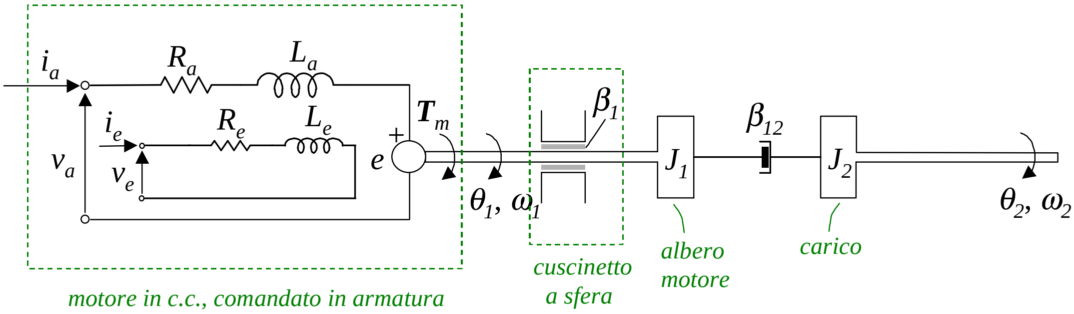
e l'equazione d'uscita è:

$$y(t) = \dot{\theta}(t) = x_2(t) = g(t, x, u)$$

Modellistica dei sistemi dinamici elettromeccanici
Esercizi risolti

1 Esercizio

Nel sistema dinamico elettromeccanico riportato in figura, un motore elettrico in corrente continua comandato in armatura è collegato ad un carico mediante uno smorzatore rotazionale avente coefficiente di attrito viscoso β_{12}. Un cuscinetto a sfera con coefficiente di attrito viscoso β_1 è calettato sull'albero motore, caratterizzato dal momento d'inerzia J_1 e dalla posizione angolare θ_1. Il carico è caratterizzato dal momento d'inerzia J_2 e dalla posizione angolare θ_2. Si indichino con v_a, i_a, R_a, L_a, v_e, i_e, R_e, L_e la tensione, la corrente, la resistenza e l'induttanza rispettivamente del circuito di armatura e di eccitazione. La f.e.m. indotta vale $e = K_e^* \cdot \dot{\theta}_1$, mentre la coppia motrice vale $T_m = K_m^* \cdot i_a$.



Scrivere le sole equazioni dinamiche del sistema complessivo.

Soluzione

L'equazione dinamica della maglia d'armatura è:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_e^* \cdot \dot{\theta}_1(t) \quad \Rightarrow$$

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} = -R_a i_a(t) + v_a(t) - K_e^* \cdot \dot{\theta}_1(t)$$

L'equazione del moto dell'albero motore d'inerzia J_1 è:

$$\begin{aligned} J_1\,\ddot{\theta}_1(t) &= T_m(t) - \left[\beta_1(\dot{\theta}_1(t) - 0) + \beta_{12}(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t))\right] = \\ &= K_m^* \cdot i_a(t) - (\beta_1 + \beta_{12})\dot{\theta}_1(t) + \beta_{12}\dot{\theta}_2(t) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$J_1\,\ddot{\theta}_1(t) + (\beta_1 + \beta_{12})\dot{\theta}_1(t) = K_m^* \cdot i_a(t) + \beta_{12}\dot{\theta}_2(t)$$

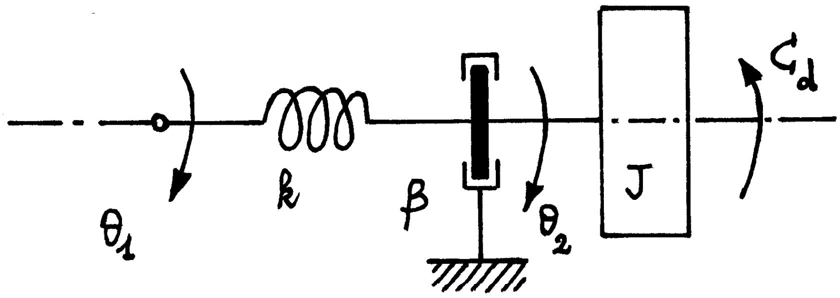
mentre l'equazione del moto del carico d'inerzia J_2 è pari a:

$$J_2\,\ddot{\theta}_2(t) = -\beta_{12}(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)) = -\beta_{12}\dot{\theta}_2(t) + \beta_{12}\dot{\theta}_1(t) \quad \Rightarrow$$

$$J_2\,\ddot{\theta}_2(t) + \beta_{12}\dot{\theta}_2(t) = \beta_{12}\dot{\theta}_1(t)$$

2 Esercizio

Si consideri il sistema dinamico elettromeccanico costituito da un motore elettrico a corrente continua con comando di eccitazione, il cui albero è collegato al sistema meccanico riportato in figura, costituito da una molla torsionale k, uno smorzatore rotazionale β ed un carico con momento d'inerzia J. Si indichino con: v_a ed i_a la tensione e la corrente del circuito di armatura del motore; v_e ed i_e la tensione e la corrente del circuito di eccitazione del motore; θ_1 e θ_2 le posizioni angolari rispettivamente dell'albero motore e del carico. Sul carico agisce inoltre una coppia di disturbo C_d.



Scegliere opportunamente il vettore di stato x ed il vettore di ingresso u.

Soluzione

Per un motore elettrico a corrente continua con comando di eccitazione, l'equazione della maglia d'eccitazione è dinamica:

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$$

(in cui i_e è una variabile di stato e v_e è un ingresso), mentre l'equazione della maglia di armatura è statica:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) = R_a \overline{i_a} = \overline{v_a}$$

in quanto si impone una corrente $\overline{i_a}$ o una tensione $\overline{i_a}$ costante.
L'equazione del moto dell'albero motore è:

$$J_1 \ddot{\theta}_1(t) = T_m(t) - k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = K_m^* \overline{i_a} - k\theta_1(t) + k\theta_2(t)$$

per cui θ_1 e $\dot{\theta}_1$ sono variabili di stato.
L'equazione del moto del carico d'inerzia J è pari a:

$$J\ddot{\theta}_2(t) = -C_d(t) - \Big[k(\theta_2(t) - \theta_1(t)) + \beta(\dot{\theta}_2(t) - 0)\Big] = -C_d(t) + k\theta_1(t) - k\theta_2(t) - \beta\dot{\theta}_2(t)$$

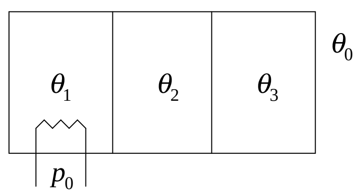
per cui θ_2 e $\dot{\theta}_2$ sono variabili di stato e C_d è una variabile d'ingresso.
Pertanto una possibile scelta del vettore di stato x e del vettore d'ingresso u è la seguente:

$$x = \Big[i_e, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2\Big]^T, u = [v_e, C_d]^T$$

Modellistica dei sistemi dinamici termici
Esercizi risolti

1 Esercizio

Un sistema termico è costituito dai corpi omogenei **1**, **2** e **3**, aventi temperatura θ_1, θ_2 e θ_3 rispettivamente; l'ambiente esterno si trova alla temperatura costante $\theta_0 = 200$ K. Le capacità termiche dei tre corpi sono date da $C_1 = 2$ J/K e $C_2 = C_3 = 1$ J/K, mentre le conduttanze termiche fra i corpi e fra ciascun corpo e l'ambiente esterno sono rispettivamente: $K_{12} = 2$ W/K, $K_{23} = 1$ W/K, $K_{10} = K_{20} = K_{30} = 2$ W/K (si ricorda che la conduttanza termica K_{ij} è pari a $1/R_{ij}$, ove R_{ij} è la resistenza termica fra i corpi i e j). All'interno del corpo **1** si trova un generatore di calore di potenza $p_0 = 400$ W.



Determinare le equazioni dinamiche del sistema, valide per ogni istante $t \geq 0$.

Soluzione

L'equazione dinamica del corpo omogeneo **1** è:

$$\begin{aligned}
C_1\dot{\theta}_1(t) &= +p_0(t) - [K_{12}\,(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + K_{10}\,(\theta_1(t) - \theta_0(t))] = \\
&= -\,(K_{12} + K_{10})\,\theta_1(t) + K_{12}\theta_2(t) + K_{10}\theta_0(t) + p_0(t) \qquad \Rightarrow \\
\dot{\theta}_1(t) &= -\frac{K_{12} + K_{10}}{C_1}\theta_1(t) + \frac{K_{12}}{C_1}\theta_2(t) + \frac{K_{10}}{C_1}\theta_0(t) + \frac{1}{C_1}p_0(t) = \\
&= -2\,\theta_1(t) + \theta_2(t) + 400
\end{aligned}$$

L'equazione dinamica del corpo omogeneo **2** è:

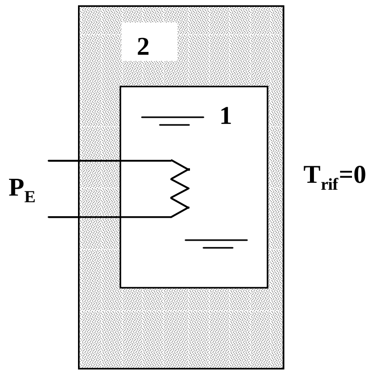
$$\begin{aligned}
C_2\dot{\theta}_2(t) &= 0 - [K_{12}\,(\theta_2(t) - \theta_1(t)) + K_{23}\,(\theta_2(t) - \theta_3(t)) + K_{20}\,(\theta_2(t) - \theta_0(t))] = \\
&= K_{12}\theta_1(t) - (K_{12} + K_{23} + K_{20})\,\theta_2(t) + K_{23}\theta_3(t) + K_{20}\theta_0(t) \qquad \Rightarrow \\
\dot{\theta}_2(t) &= \frac{K_{12}}{C_2}\theta_1(t) - \frac{K_{12} + K_{23} + K_{20}}{C_2}\theta_2(t) + \frac{K_{23}}{C_2}\theta_3(t) + \frac{K_{20}}{C_2}\theta_0(t) = \\
&= 2\,\theta_1(t) - 5\,\theta_2(t) + \theta_3(t) + 400
\end{aligned}$$

L'equazione dinamica del corpo omogeneo **3** è:

$$\begin{aligned}
C_3\dot{\theta}_3(t) &= 0 - [K_{23}\,(\theta_3(t) - \theta_2(t)) + K_{30}\,(\theta_3(t) - \theta_0(t))] = \\
&= K_{23}\theta_2(t) - (K_{23} + K_{30})\,\theta_3(t) + K_{30}\theta_0(t) \qquad \Rightarrow \\
\dot{\theta}_3(t) &= \frac{K_{23}}{C_3}\theta_2(t) - \frac{K_{23} + K_{30}}{C_3}\theta_3(t) + \frac{K_{30}}{C_3}\theta_0(t) = \theta_2(t) - 3\,\theta_3(t) + 400
\end{aligned}$$

2 Esercizio

Un sistema termico è costituito da due corpi omogenei **1** e **2**; all'interno del corpo **1** è applicato un flusso di calore p_E; l'ambiente esterno è a temperatura costante $T_{rif} = 0$ K. Gli stati del sistema sono dati dalle temperature θ_1 e θ_2 dei due corpi omogenei, l'ingresso è costituito dal flusso p_E, mentre l'uscita è data dalla temperatura θ_2. Determinare le matrici A, B, C e D del modello LTI che descrive il sistema, assumendo che le capacità termiche dei due corpi siano date da $C_1 = C_2 = 2C_0$ e le conduttanze termiche fra i due corpi e fra il corpo **2** e l'ambiente esterno siano $K_{12} = K_{20} = 1/(0.5R)$, ove $0.5R$ è la resistenza termica fra i vari elementi.



Soluzione

L'equazione dinamica del corpo omogeneo **1** è:

$$C_1\dot{\theta}_1(t)(t) = +p_E(t) - K_{12}\left(\theta_1(t) - \theta_2(t)\right) = -K_{12}\theta_1(t) + K_{12}\theta_2(t) + p_E(t) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1(t) &= -\frac{K_{12}}{C_1}\theta_1(t) + \frac{K_{12}}{C_1}\theta_2(t) + \frac{1}{C_1}p_E(t) = \\ &= -\frac{1}{RC_0}\theta_1(t) + \frac{1}{RC_0}\theta_2(t) + \frac{1}{2C_0}p_E(t)\end{aligned}$$

L'equazione dinamica del corpo omogeneo **2** è:

$$\begin{aligned}C_2\dot{\theta}_2(t) &= 0 - \left[K_{12}\left(\theta_2(t) - \theta_1(t)\right) + K_{20}\left(\theta_2(t) - T_{rif}(t)\right)\right] = \\ &= K_{12}\theta_1(t) - \left(K_{12} + K_{20}\right)\theta_2(t) + K_{20}T_{rif}(t) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \frac{K_{12}}{C_2}\theta_1(t) - \frac{K_{12} + K_{20}}{C_2}\theta_2(t) + \frac{K_{20}}{C_2}T_{rif}(t) = \frac{1}{RC_0}\theta_1(t) - \frac{2}{RC_0}\theta_2(t)$$

Scegliendo come variabili di stato e d'ingresso rispettivamente:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = p_E(t)$$

le equazioni di stato risultano essere:

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{RC_0}x_1(t) + \frac{1}{RC_0}x_2(t) + \frac{1}{2C_0}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{RC_0}x_1(t) - \frac{2}{RC_0}x_2(t)\end{aligned}\right. \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \frac{1}{RC_0} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \frac{1}{C_0} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

L'equazione d'uscita è data da:

$$y(t) = \theta_2(t) = x_2(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

