Classificazione di sistemi dinamici
Esercizi proposti

1 Esercizio

Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + 3u_1(k) \\ x_2(k+1) &= 0.5x_1(k) + u_2(k) \\ y(k) &= 2x_1(k) \cdot u_1(k) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a tempo continuo o discreto, SISO o MIMO, a dimensione finita o infinita, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante, proprio o non proprio.

Soluzione: Il sistema è dinamico, a tempo discreto, MIMO, a dimensione finita, non lineare, tempo-invariante, non (strettamente) proprio.

2 Esercizio

Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 3x_1(t) + x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t)u(t) \\ y(t) &= x_1(t) - u(t) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a tempo continuo o discreto, SISO o MIMO, a dimensione finita o infinita, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante, proprio o non proprio.

Soluzione: Il sistema è dinamico, a tempo continuo, SISO, a dimensione finita, non lineare, tempo-invariante, non (strettamente) proprio.

3 Esercizio

Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 2x_1(k) + u_2(k) \\ x_2(k+1) &= 4x_2(k) + u_1(k) \\ y(k) &= k^2 \cdot x_2(k) \end{aligned}$$

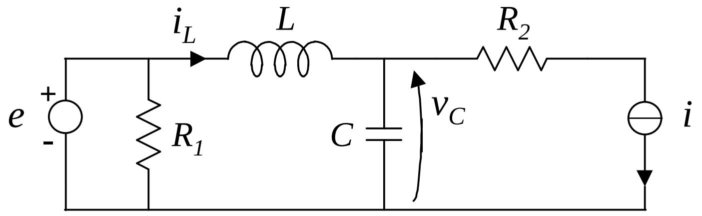
analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a tempo continuo o discreto, SISO o MIMO, a dimensione finita o infinita, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante, proprio o non proprio.

Soluzione: Il sistema è dinamico, a tempo discreto, MIMO, a dimensione finita, lineare, tempo-variante, (strettamente) proprio.

Modellistica dei sistemi dinamici elettrici
Esercizi proposti

1 Esercizio

Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, i cui componenti assumono i seguenti valori numerici: $L = 10^{-3}$ H, $C = 2 \cdot 10^{-6}$ F, $R_1 = 10^3\,\Omega$, $R_2 = 2 \cdot 10^3\,\Omega$.

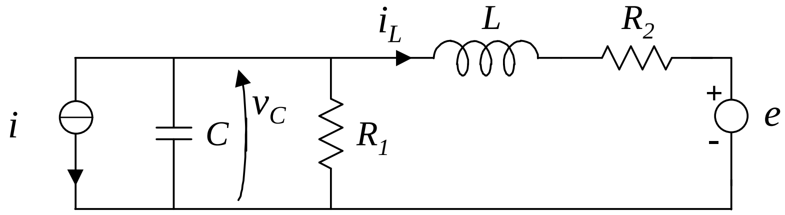


Determinare le matrici A e B dell'equazione di stato del sistema $\dot{x} = Ax+Bu$, scegliendo come variabile di stato $x = [i_L,\ v_C]^T$ e come variabile di ingresso $u = [e,\ i]^T$.

Soluzione: $A = \begin{bmatrix} 0 & -10^3 \\ 5 \cdot 10^5 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & -5 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$

2 Esercizio

Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, i cui componenti assumono i seguenti valori numerici: $L = 10^{-3}$ H, $C = 10^{-6}$ F, $R_1 = 2 \cdot 10^3\,\Omega$, $R_2 = 10^3\,\Omega$.



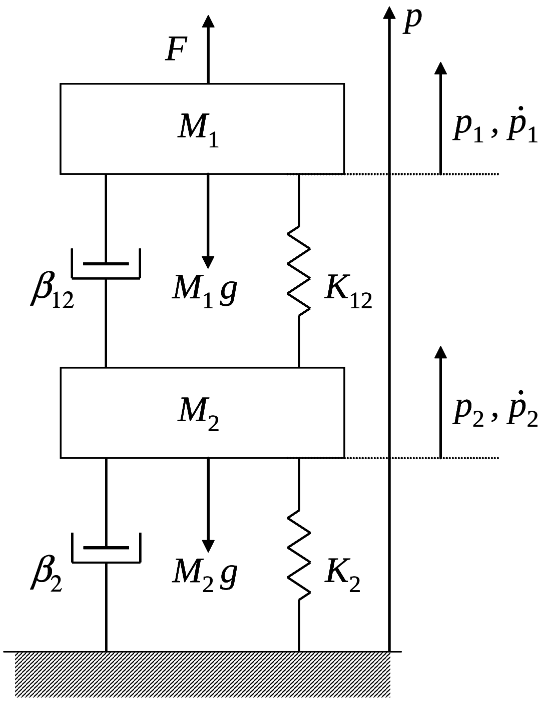
Determinare le matrici A e B dell'equazione di stato del sistema $\dot{x} = Ax+Bu$, scegliendo come variabile di stato $x = [v_C,\ i_L]^T$ e come variabile di ingresso $u = [i,\ e]^T$.

Soluzione: $A = \begin{bmatrix} -500 & -10^6 \\ 10^3 & -10^6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -10^6 & 0 \\ 0 & -10^3 \end{bmatrix}$

Modellistica dei sistemi dinamici meccanici
Esercizi proposti

1 Esercizio

Si consideri il sistema dinamico meccanico riportato in figura, costituito da due masse puntiformi M_1 ed M_2 che si muovono in senso verticale e le cui posizioni sono rispettivamente p_1 e p_2. Le masse M_1 ed M_2 sono soggette alla rispettive forze peso $M_1 g$ ed $M_2 g$; alla massa M_1 è inoltre applicata una forza verticale esterna F.

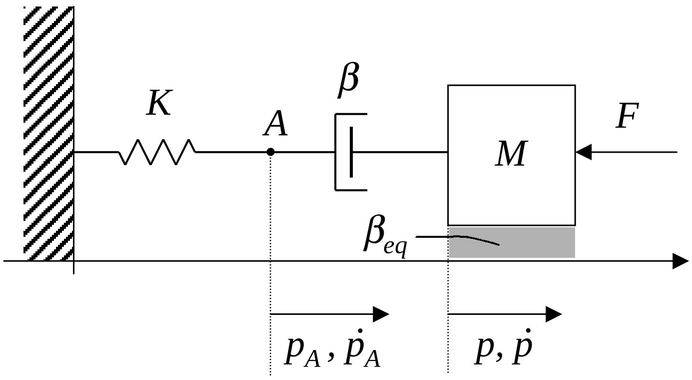


Determinare le equazioni del moto delle due masse, assumendo i seguenti valori numerici dei parametri: $M_1 = 2\,\text{kg}$, $M_2 = 5\,\text{kg}$, $K_2 = 30\,\text{N/m}$, $K_{12} = 10\,\text{N/m}$, $\beta_2 = 20\,\text{Ns/m}$, $\beta_{12} = 10\,\text{Ns/m}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Soluzione: $\ddot{p}_1 + 5\dot{p}_1 + 5p_1 = 5\dot{p}_2 + 5p_2 + 0.5F - 9.81$, $\ddot{p}_2 + 6\dot{p}_2 + 8p_2 = 2\dot{p}_1 + 2p_1 - 9.81$

2 Esercizio

Nel sistema dinamico meccanico in traslazione riportato in figura, un corpo puntiforme di massa M è collegato ad una parete fissa mediante uno smorzatore ed una molla in serie l'uno all'altra, aventi rispettivamente un coefficiente di attrito viscoso β ed un'elasticità K. Sul corpo agiscono una forza esterna F ed una forza d'attrito caratterizzata da un coefficiente di attrito viscoso equivalente β_{eq}.



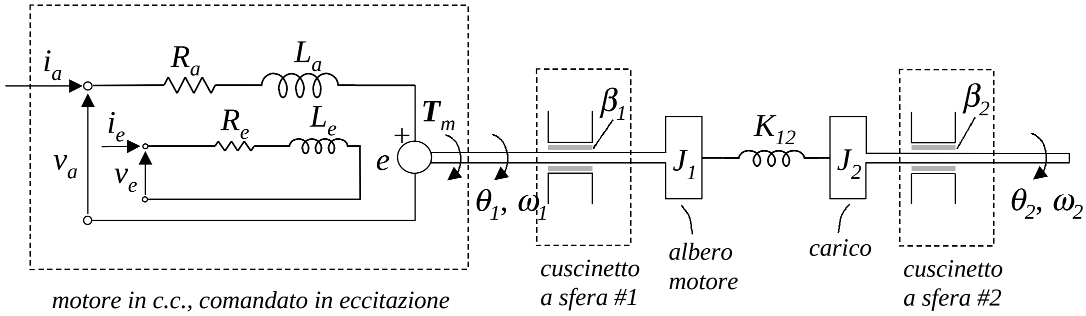
Scrivere le equazioni del moto del corpo puntiforme e del punto materiale A di contatto fra smorzatore e molla.
[Nota: per confrontare la propria soluzione con quelle proposte, sostituire se necessario l'equazione del moto del punto materiale A nell'equazione dinamica del corpo puntiforme]

Soluzione: $M\,\ddot{p} + \beta_{eq}\,\dot{p} = -K\,p_A - F, \quad \beta\,\dot{p}_A + K\,p_A = \beta\,\dot{p}$

Modellistica dei sistemi dinamici elettromeccanici
Esercizi proposti

1 Esercizio

Nel sistema dinamico elettromeccanico riportato in figura, un motore elettrico in corrente continua comandato in eccitazione è collegato ad un carico mediante una molla torsionale avente elasticità K_{12}. Un cuscinetto a sfera con coefficiente di attrito viscoso β_1 è calettato sull'albero motore, caratterizzato dal momento d'inerzia J_1 e dalla posizione angolare θ_1. Un cuscinetto a sfera con coefficiente di attrito viscoso β_2 è calettato sul carico, caratterizzato dal momento d'inerzia J_2 e dalla posizione angolare θ_2. Si indichino con v_a, i_a, R_a, L_a, v_e, i_e, R_e, L_e la tensione, la corrente, la resistenza e l'induttanza rispettivamente del circuito di armatura e di eccitazione. La f.e.m. indotta vale $e = K_e^* \cdot \dot{\theta}_1$, mentre la coppia motrice vale $T_m = K_m^* \cdot i_e$.



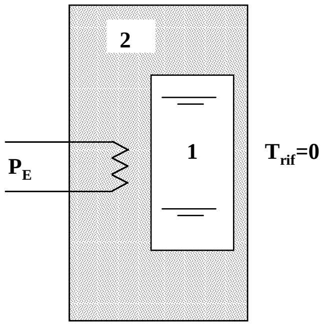
Scrivere le sole equazioni dinamiche del sistema complessivo.

Soluzione: $L_e \dfrac{di_e}{dt} = -R_e\, i_e + v_e$, $\quad J_1\, \ddot{\theta}_1 + \beta_1\, \dot{\theta}_1 + K_{12}\, \theta_1 = K_m^*\, i_e + K_{12}\, \theta_2$, $J_2\, \ddot{\theta}_2 + \beta_2\, \dot{\theta}_2 + K_{12}\, \theta_2 = K_{12}\, \theta_1$

Modellistica dei sistemi dinamici termici
Esercizi proposti

1 Esercizio

Un sistema termico è costituito da due corpi omogenei **1** e **2**; all'interno del corpo **2** è applicato un flusso di calore p_E; l'ambiente esterno è a temperatura costante $T_{rif} = 0$ K. Gli stati del sistema sono dati dalle temperature θ_1 e θ_2 dei due corpi omogenei, l'ingresso è costituito dal flusso p_E, mentre l'uscita è data da $\theta_1 - \theta_2$. Determinare il polinomio caratteristico (in forma monica) del modello LTI che descrive il sistema dato, assumendo che le capacità termiche dei due corpi siano date da $C_1 = C_2 = C$ e le conduttanze termiche fra i due corpi e fra il corpo **2** e l'ambiente siano $K_{12} = K_{20} = 1/(2R)$, ove $2R$ è la resistenza termica fra i vari elementi.

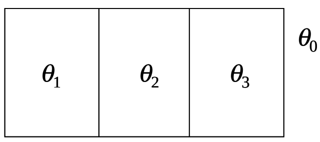


Calcolare il polinomio caratteristico.

Soluzione: $s^2 + 3s/(2RC) + 1/(2RC)^2$

2 Esercizio

Un sistema termico è costituito dai corpi omogenei **1**, **2** e **3**, aventi temperatura θ_1, θ_2 e θ_3 rispettivamente; l'ambiente esterno si trova alla temperatura costante θ_0. Le capacità termiche dei tre corpi sono date da $C_1 = C_3 = 1$ J/K e $C_2 = 2$ J/K, mentre le conduttanze termiche fra i corpi e fra ciascuno di essi e l'ambiente esterno sono rispettivamente: $K_{12} = 1$ W/K, $K_{23} = 2$ W/K, $K_{10} = K_{20} = K_{30} = 0.5$ W/K. (Si ricorda che la conduttanza termica K_{ij} è pari a $1/R_{ij}$, ove R_{ij} è la resistenza termica fra i corpi i e j).



Determinare la matrice A dell'equazione di stato del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, scegliendo come variabile di stato $x = [\theta_1\ \theta_2\ \theta_3]^T$ e come ingresso $u = \theta_0$.

Soluzione: $A = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1.75 & 1 \\ 0 & 2 & -2.5 \end{bmatrix}$