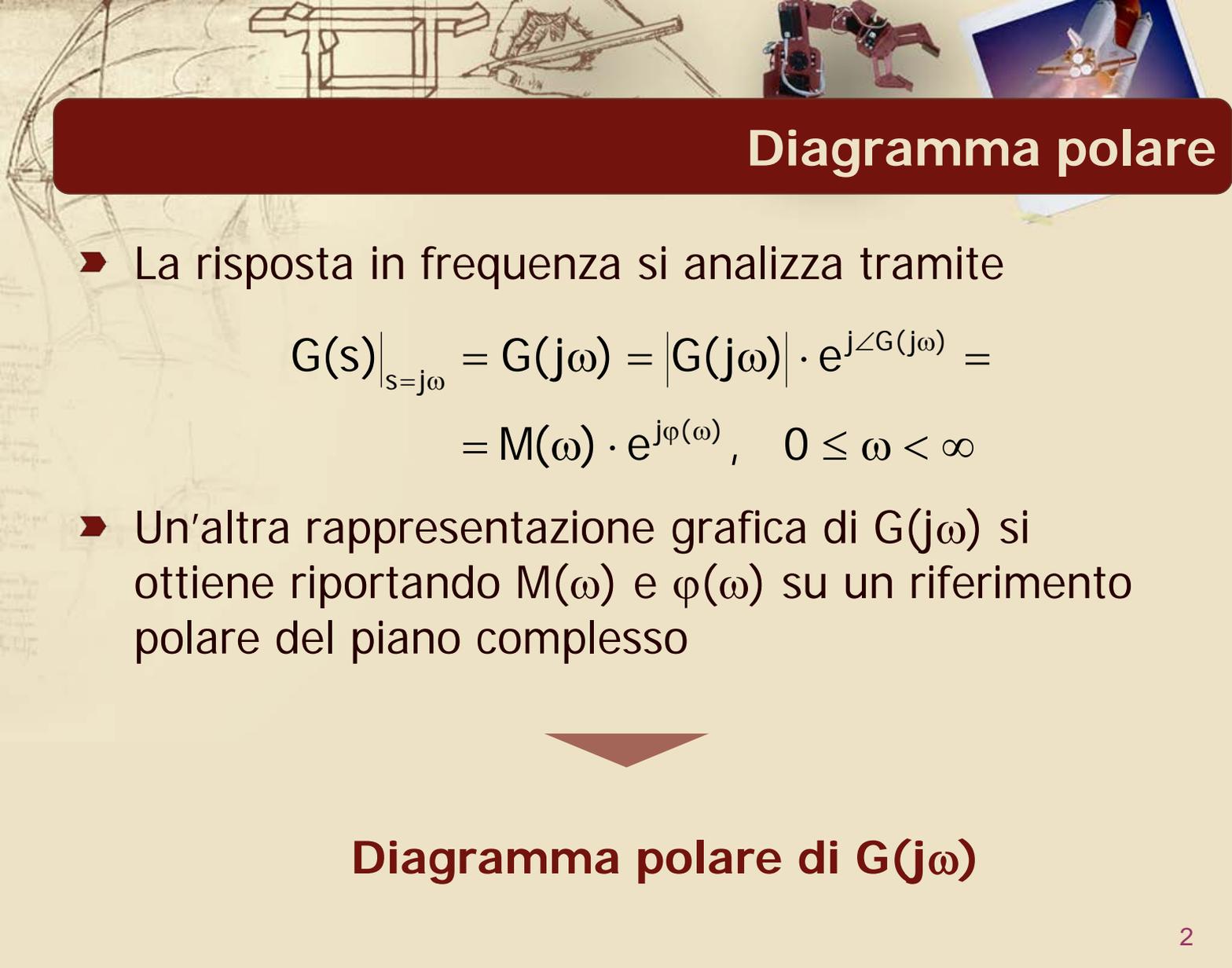


**Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols**

**Diagramma polare**



## Diagramma polare

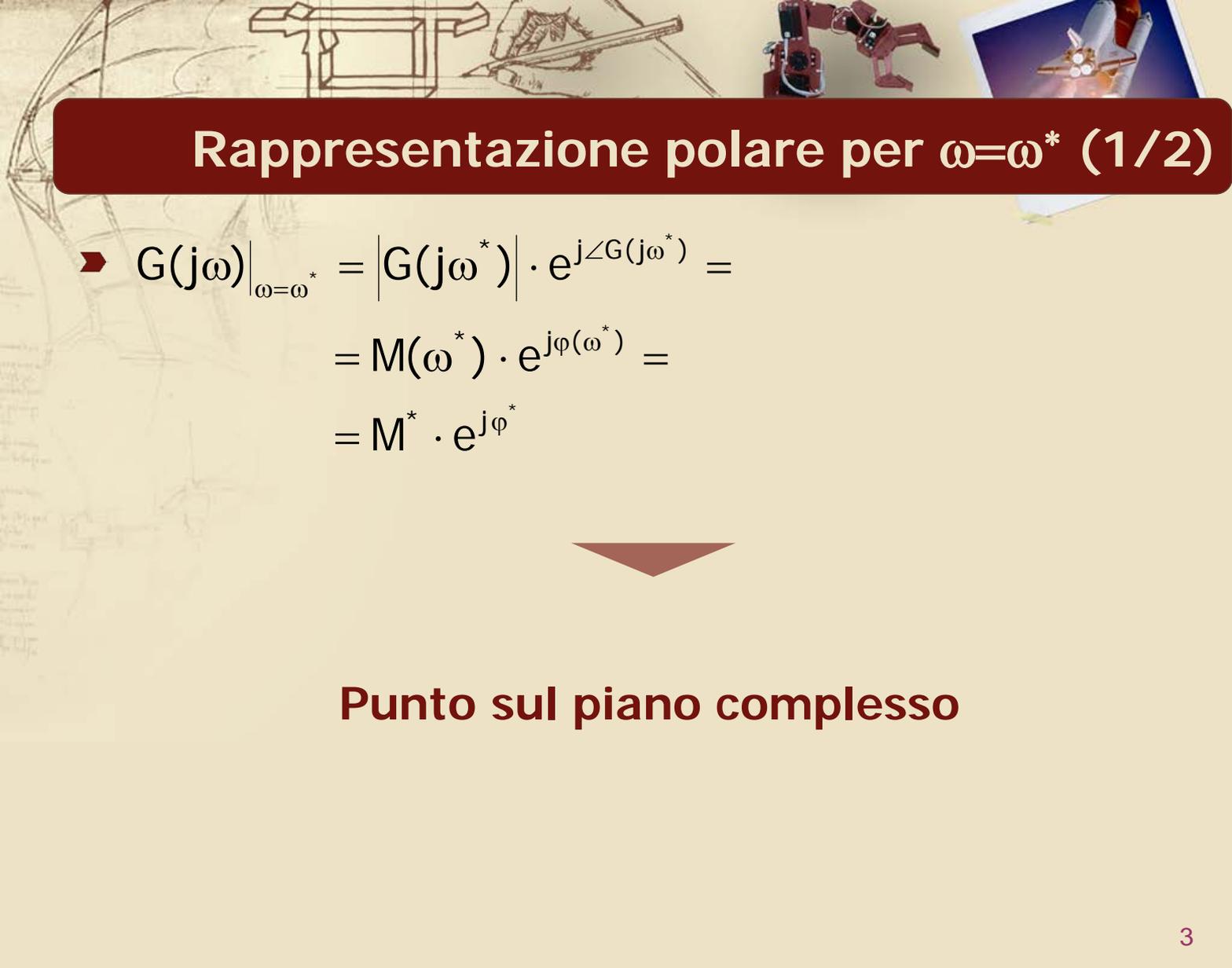
- La risposta in frequenza si analizza tramite

$$\begin{aligned} G(s) \Big|_{s=j\omega} &= G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \\ &= M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \leq \omega < \infty \end{aligned}$$

- Un'altra rappresentazione grafica di  $G(j\omega)$  si ottiene riportando  $M(\omega)$  e  $\varphi(\omega)$  su un riferimento polare del piano complesso



**Diagramma polare di  $G(j\omega)$**



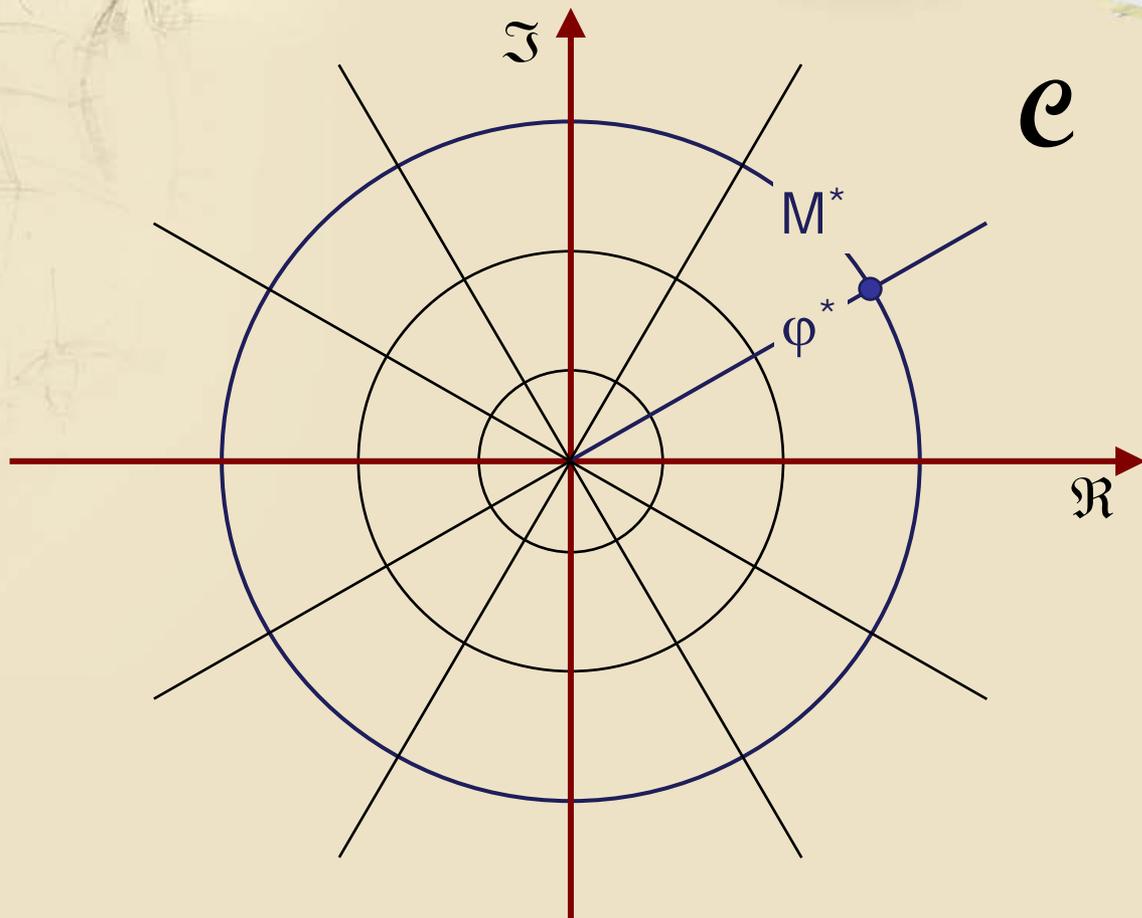
## Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (1/2)

$$\begin{aligned}\rightarrow G(j\omega)\Big|_{\omega=\omega^*} &= |G(j\omega^*)| \cdot e^{j\angle G(j\omega^*)} = \\ &= M(\omega^*) \cdot e^{j\varphi(\omega^*)} = \\ &= M^* \cdot e^{j\varphi^*}\end{aligned}$$

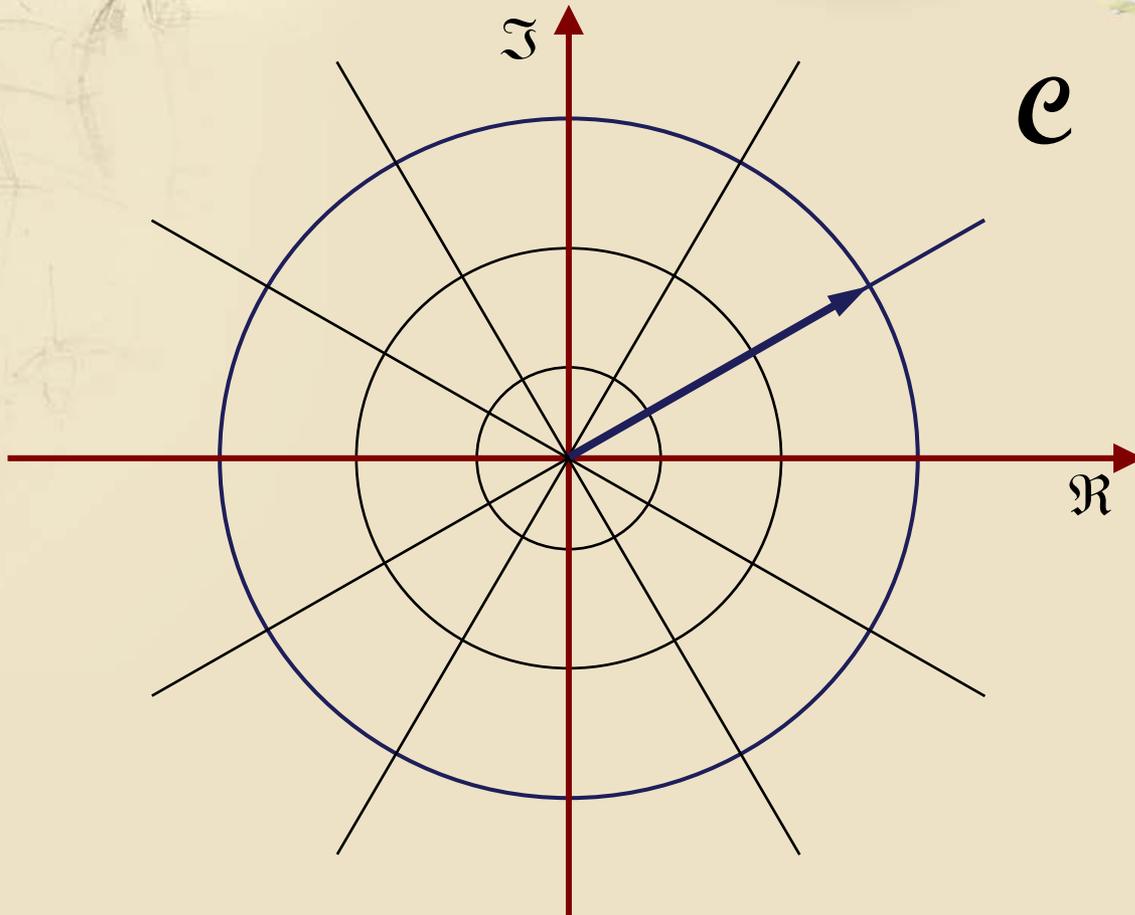


**Punto sul piano complesso**

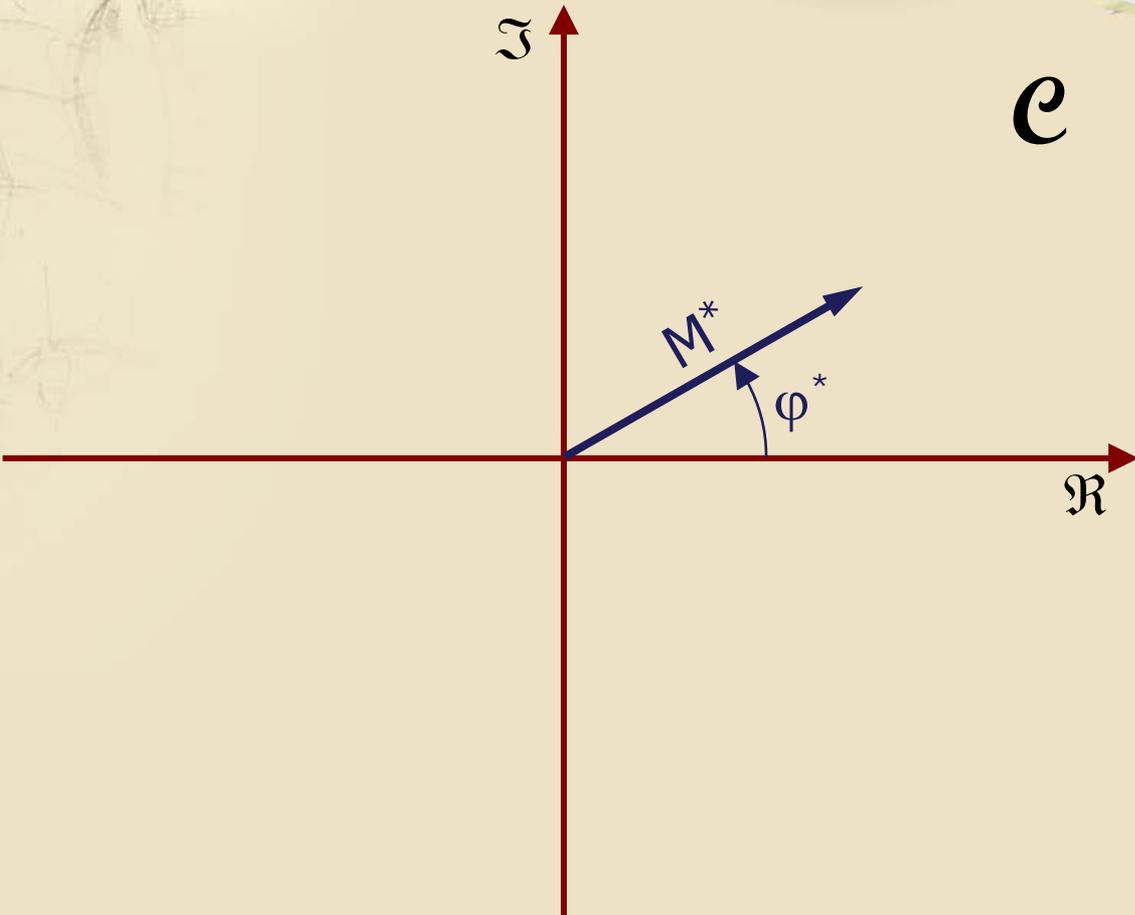
# Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)

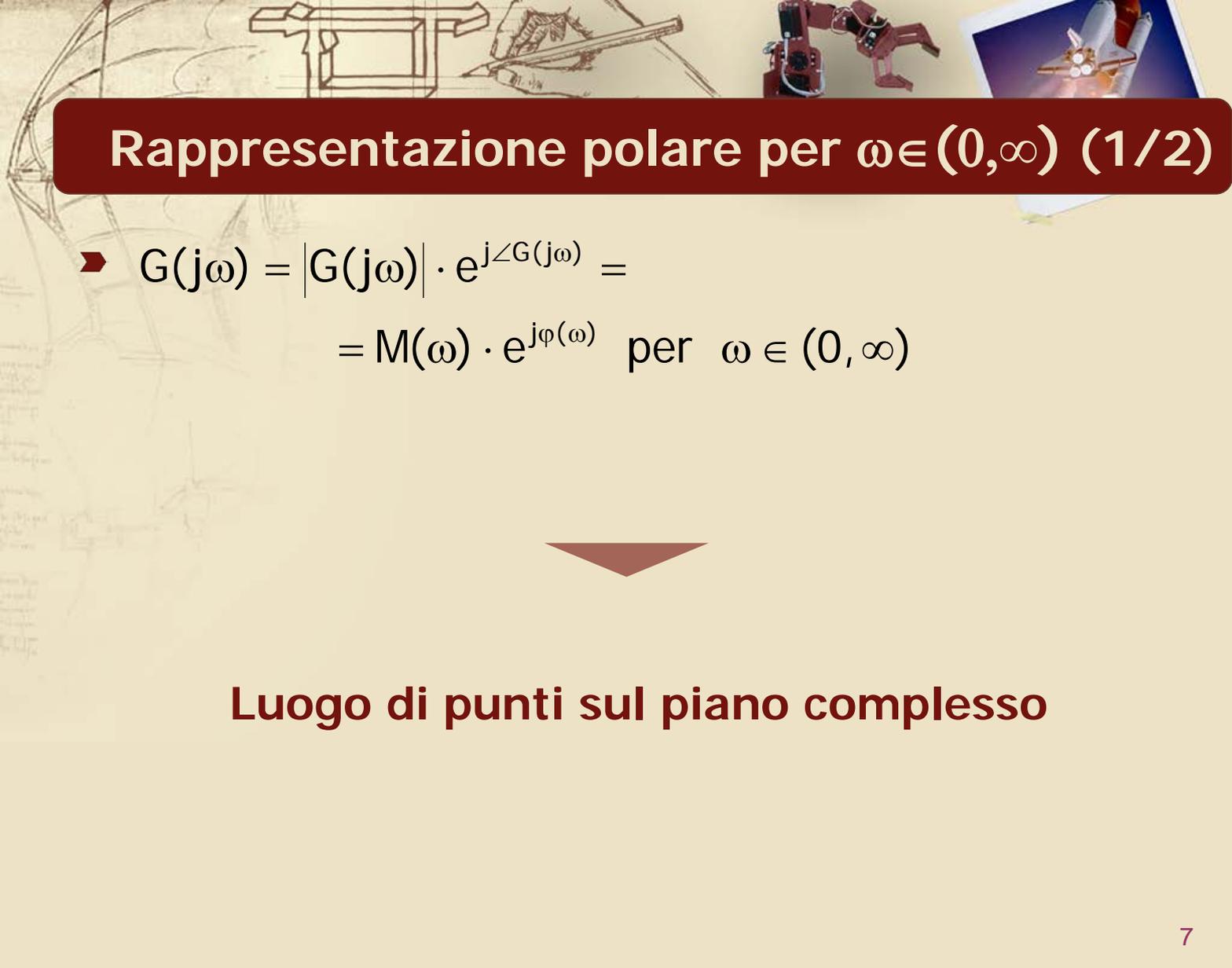


# Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)



# Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)





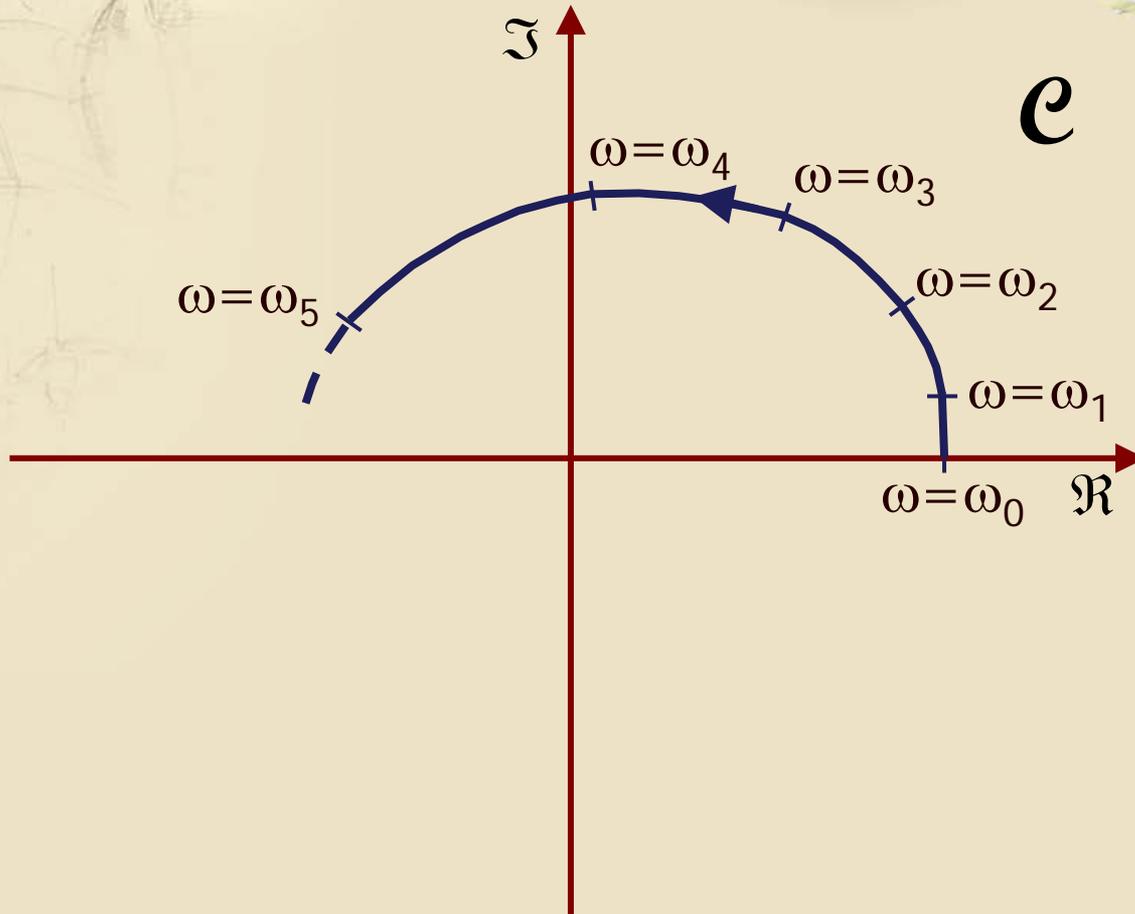
## Rappresentazione polare per $\omega \in (0, \infty)$ (1/2)

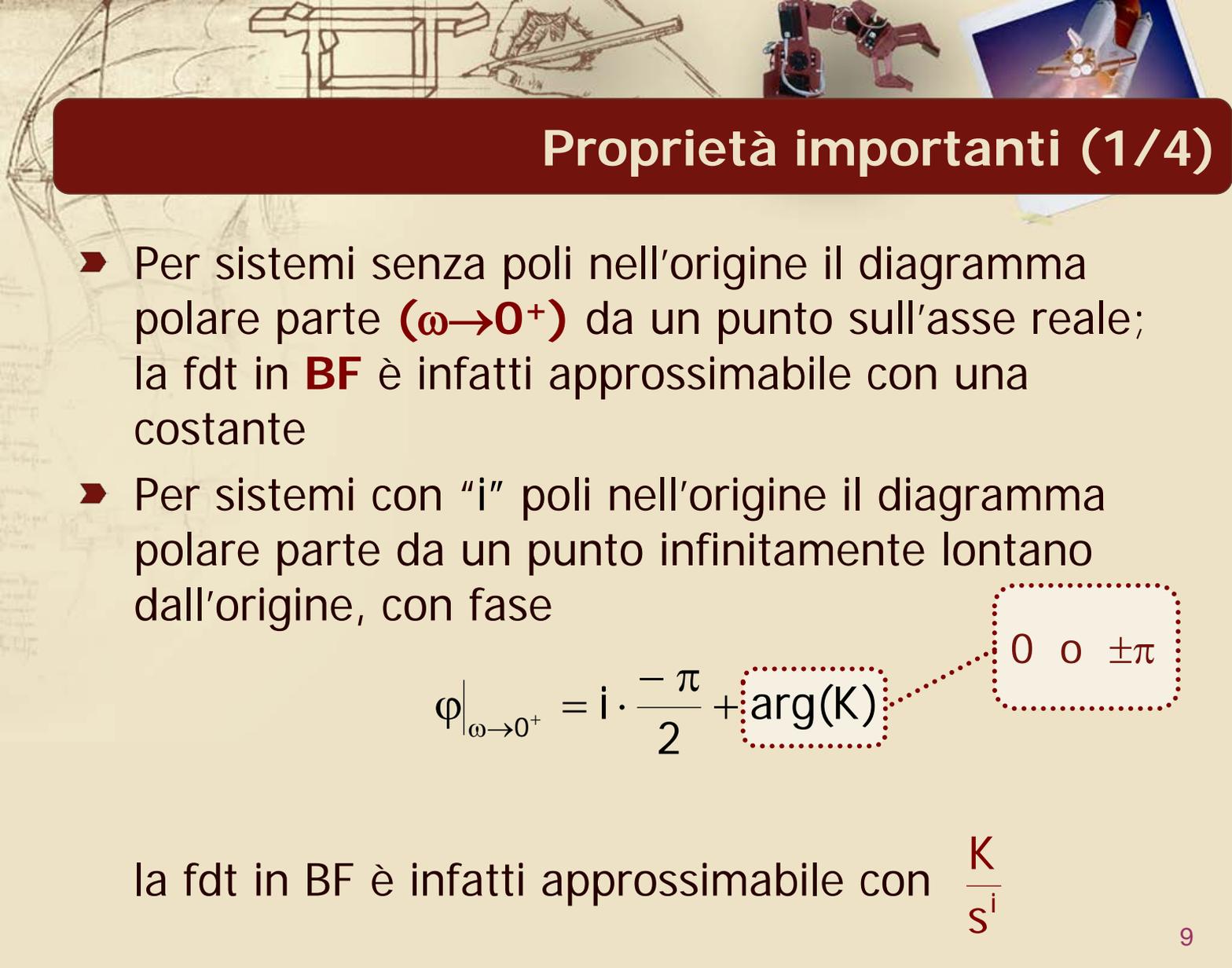
►  $G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} =$   
 $= M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{per } \omega \in (0, \infty)$



**Luogo di punti sul piano complesso**

# Rappresentazione polare per $\omega \in (0, \infty)$ (2/2)





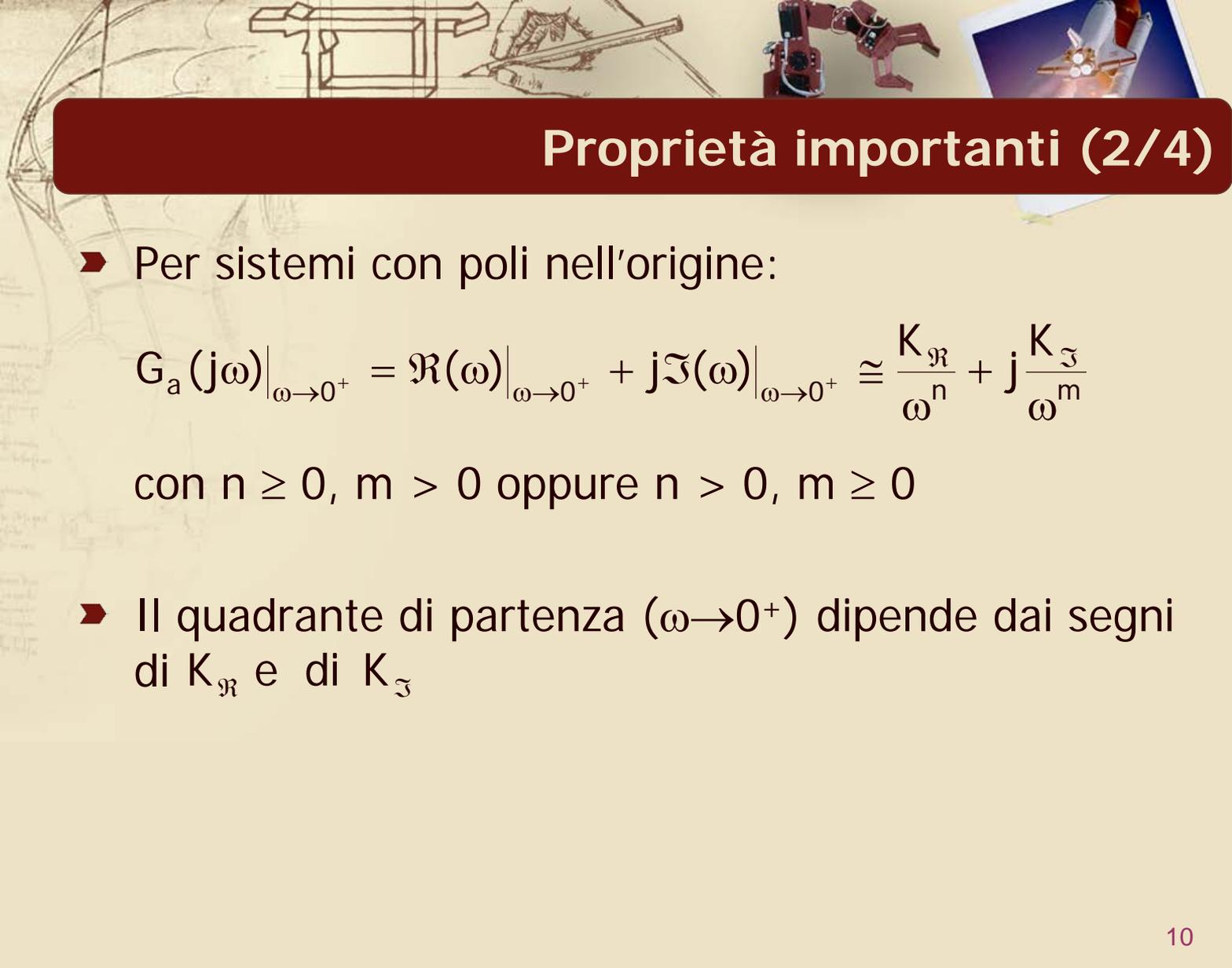
## Proprietà importanti (1/4)

- Per sistemi senza poli nell'origine il diagramma polare parte ( $\omega \rightarrow 0^+$ ) da un punto sull'asse reale; la fdt in **BF** è infatti approssimabile con una costante
- Per sistemi con "i" poli nell'origine il diagramma polare parte da un punto infinitamente lontano dall'origine, con fase

$$\varphi|_{\omega \rightarrow 0^+} = i \cdot \frac{-\pi}{2} + \text{arg}(K)$$

0 0  $\pm\pi$

la fdt in BF è infatti approssimabile con  $\frac{K}{s^i}$



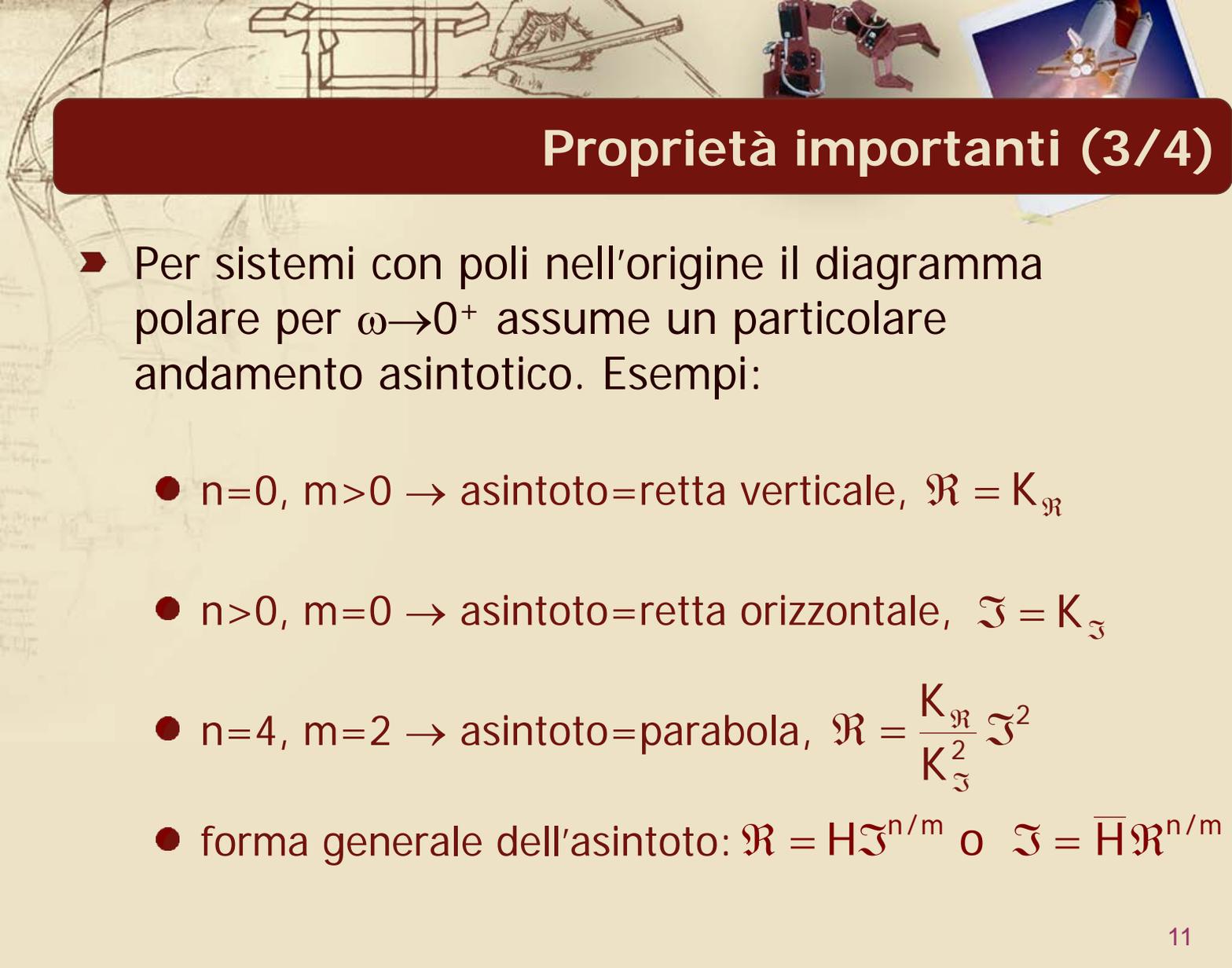
## Proprietà importanti (2/4)

- Per sistemi con poli nell'origine:

$$G_a(j\omega)\Big|_{\omega \rightarrow 0^+} = \Re(\omega)\Big|_{\omega \rightarrow 0^+} + j\Im(\omega)\Big|_{\omega \rightarrow 0^+} \cong \frac{K_{\Re}}{\omega^n} + j\frac{K_{\Im}}{\omega^m}$$

con  $n \geq 0$ ,  $m > 0$  oppure  $n > 0$ ,  $m \geq 0$

- Il quadrante di partenza ( $\omega \rightarrow 0^+$ ) dipende dai segni di  $K_{\Re}$  e di  $K_{\Im}$



## Proprietà importanti (3/4)

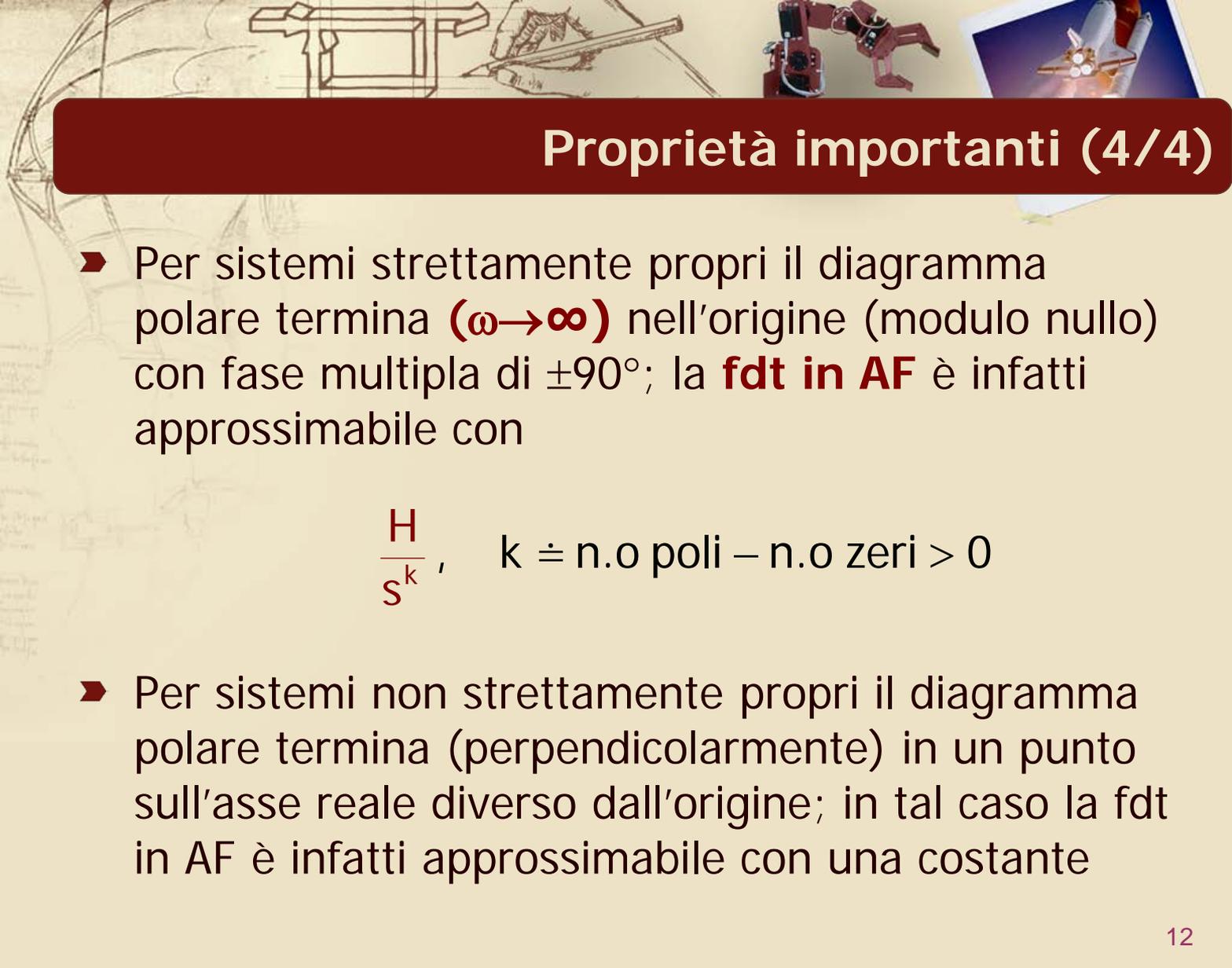
► Per sistemi con poli nell'origine il diagramma polare per  $\omega \rightarrow 0^+$  assume un particolare andamento asintotico. Esempi:

●  $n=0, m>0 \rightarrow$  asintoto=retta verticale,  $\Re = K_{\Re}$

●  $n>0, m=0 \rightarrow$  asintoto=retta orizzontale,  $\Im = K_{\Im}$

●  $n=4, m=2 \rightarrow$  asintoto=parabola,  $\Re = \frac{K_{\Re}}{K_{\Im}^2} \Im^2$

● forma generale dell'asintoto:  $\Re = H \Im^{n/m}$  o  $\Im = \bar{H} \Re^{n/m}$

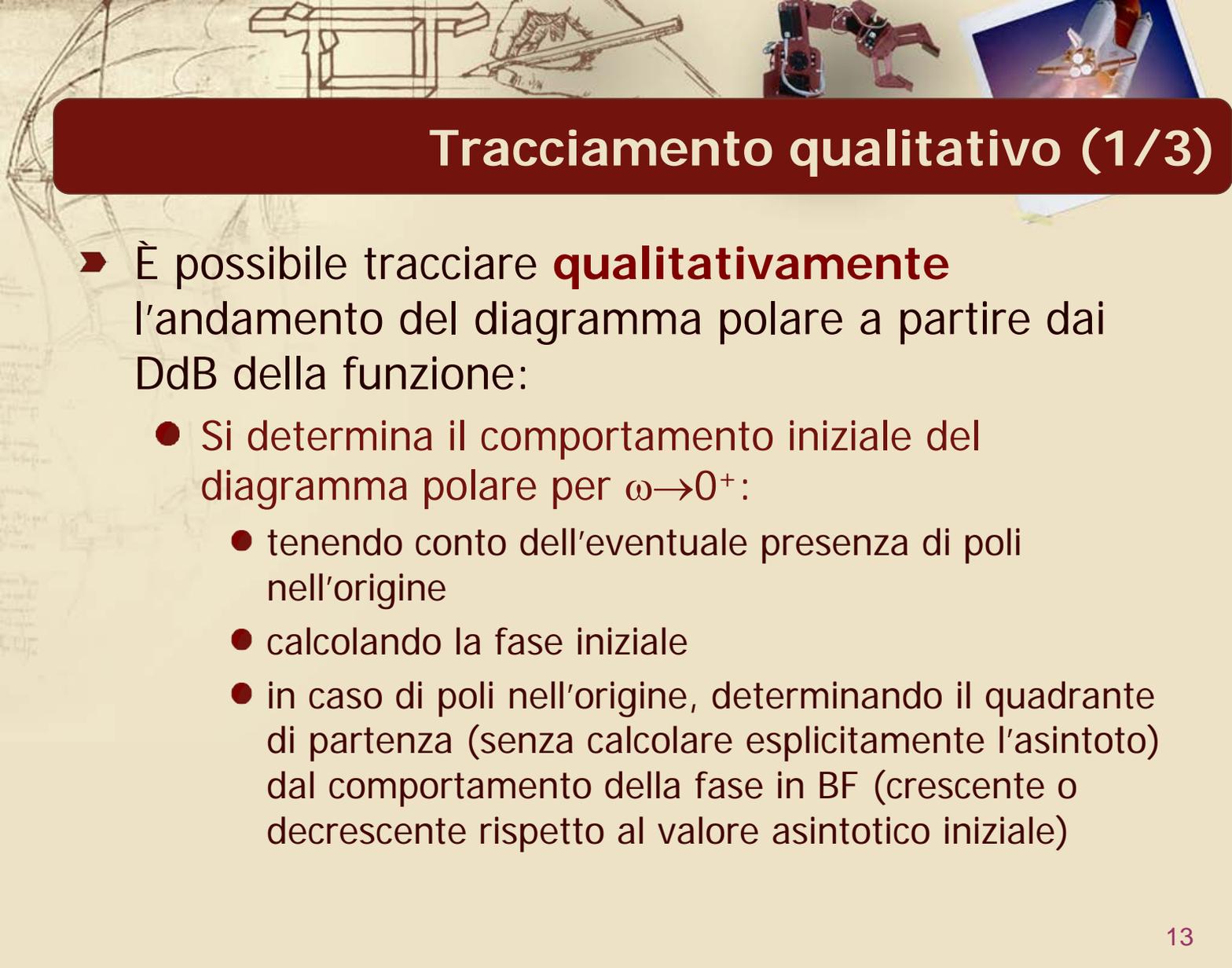


## Proprietà importanti (4/4)

- Per sistemi strettamente propri il diagramma polare termina ( $\omega \rightarrow \infty$ ) nell'origine (modulo nullo) con fase multipla di  $\pm 90^\circ$ ; la **fdt in AF** è infatti approssimabile con

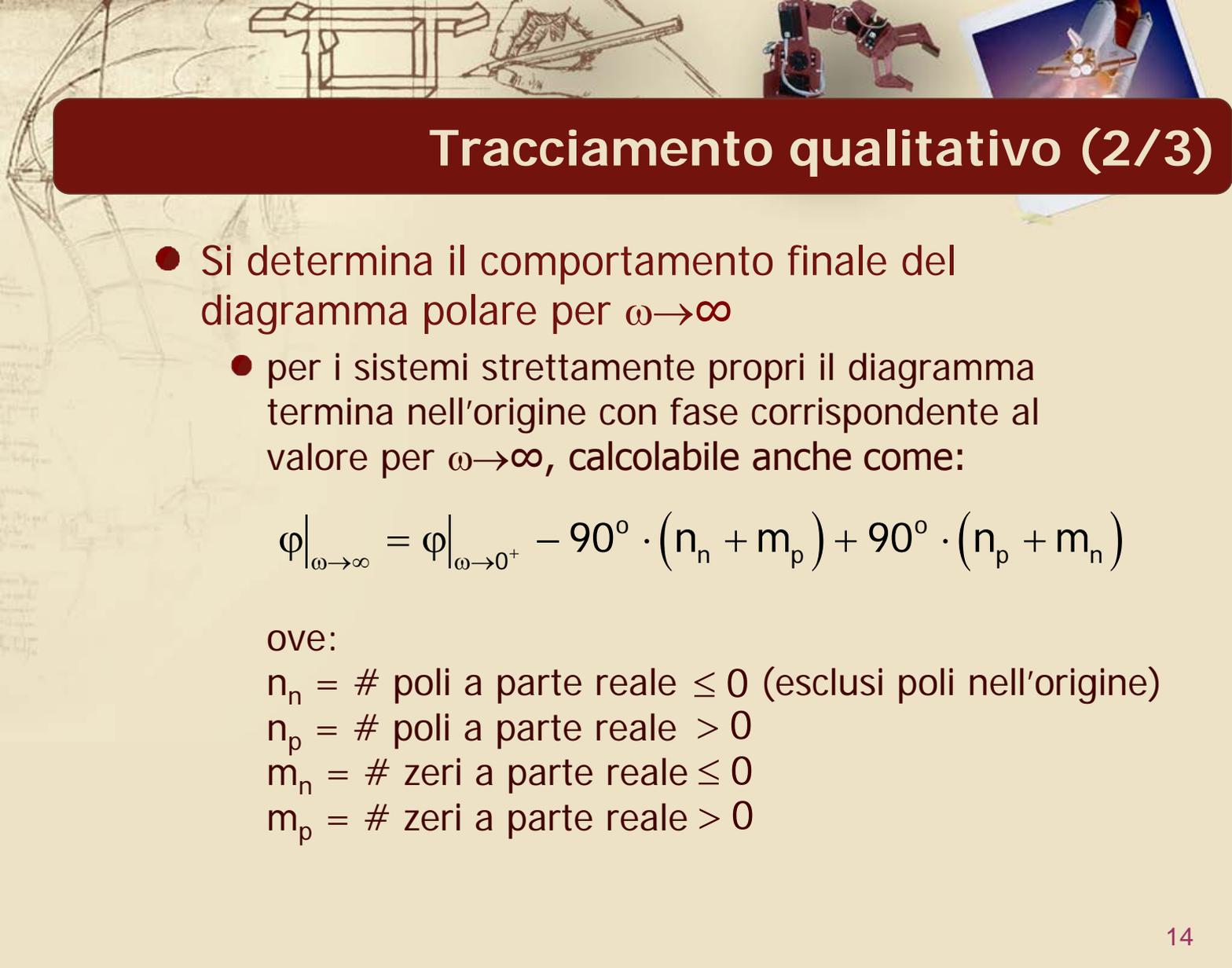
$$\frac{H}{s^k}, \quad k \doteq \text{n.o poli} - \text{n.o zeri} > 0$$

- Per sistemi non strettamente propri il diagramma polare termina (perpendicolarmente) in un punto sull'asse reale diverso dall'origine; in tal caso la fdt in AF è infatti approssimabile con una costante



## Tracciamento qualitativo (1/3)

- È possibile tracciare **qualitativamente** l'andamento del diagramma polare a partire dai DdB della funzione:
  - Si determina il comportamento iniziale del diagramma polare per  $\omega \rightarrow 0^+$ :
    - tenendo conto dell'eventuale presenza di poli nell'origine
    - calcolando la fase iniziale
    - in caso di poli nell'origine, determinando il quadrante di partenza (senza calcolare esplicitamente l'asintoto) dal comportamento della fase in BF (crescente o decrescente rispetto al valore asintotico iniziale)



## Tracciamento qualitativo (2/3)

- Si determina il comportamento finale del diagramma polare per  $\omega \rightarrow \infty$ 
  - per i sistemi strettamente propri il diagramma termina nell'origine con fase corrispondente al valore per  $\omega \rightarrow \infty$ , calcolabile anche come:

$$\varphi|_{\omega \rightarrow \infty} = \varphi|_{\omega \rightarrow 0^+} - 90^\circ \cdot (n_n + m_p) + 90^\circ \cdot (n_p + m_n)$$

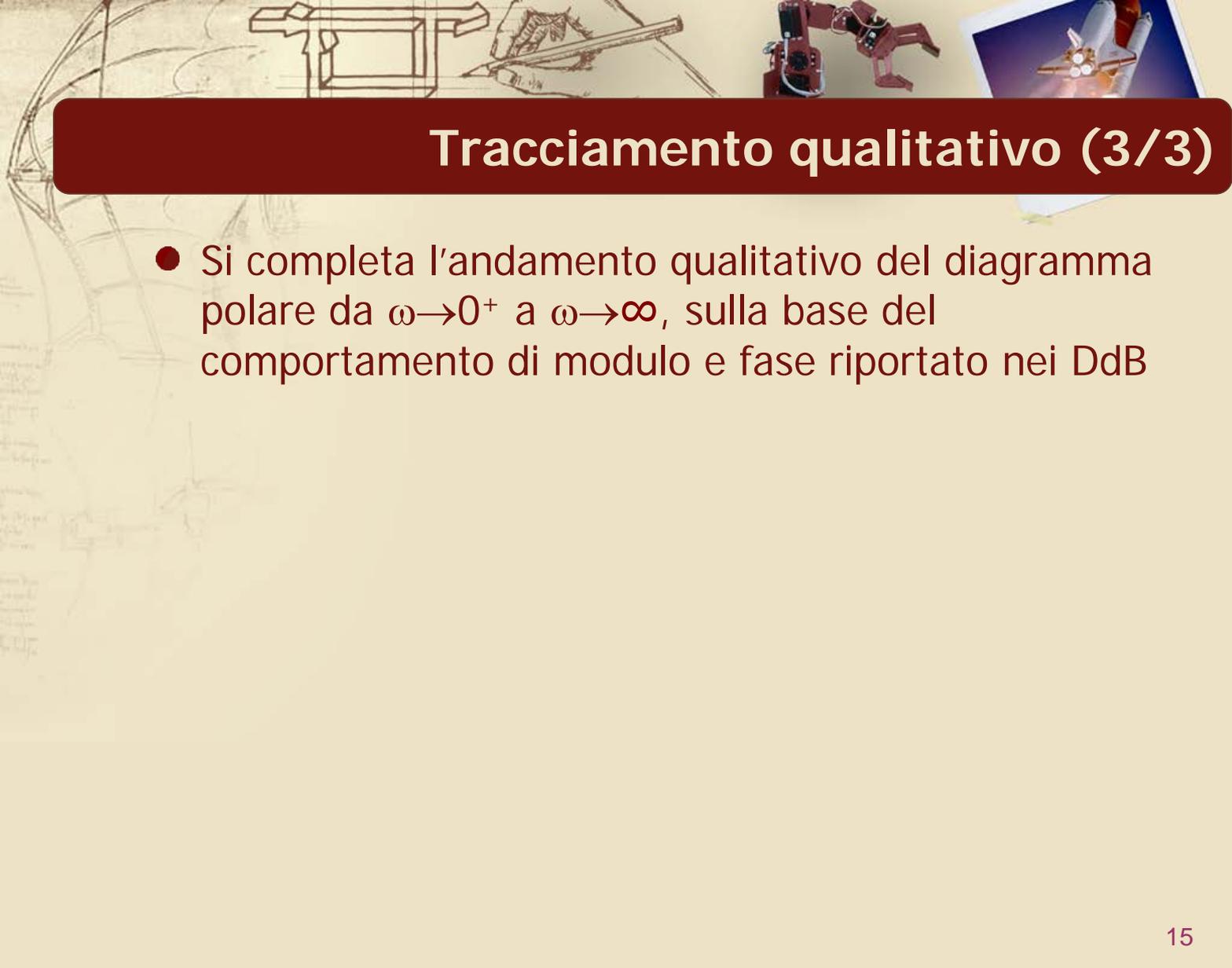
ove:

$n_n$  = # poli a parte reale  $\leq 0$  (esclusi poli nell'origine)

$n_p$  = # poli a parte reale  $> 0$

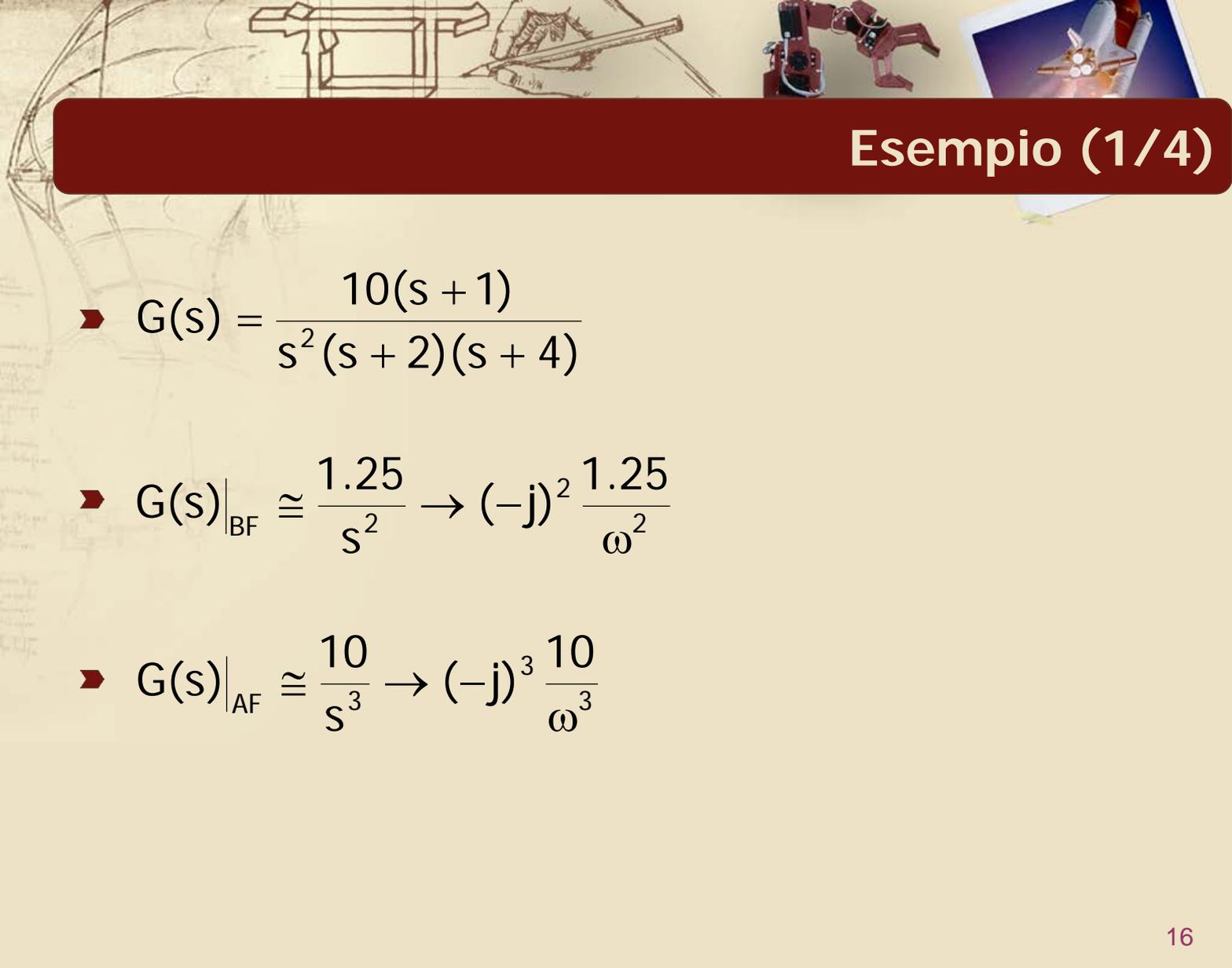
$m_n$  = # zeri a parte reale  $\leq 0$

$m_p$  = # zeri a parte reale  $> 0$



## Tracciamento qualitativo (3/3)

- Si completa l'andamento qualitativo del diagramma polare da  $\omega \rightarrow 0^+$  a  $\omega \rightarrow \infty$ , sulla base del comportamento di modulo e fase riportato nei DdB

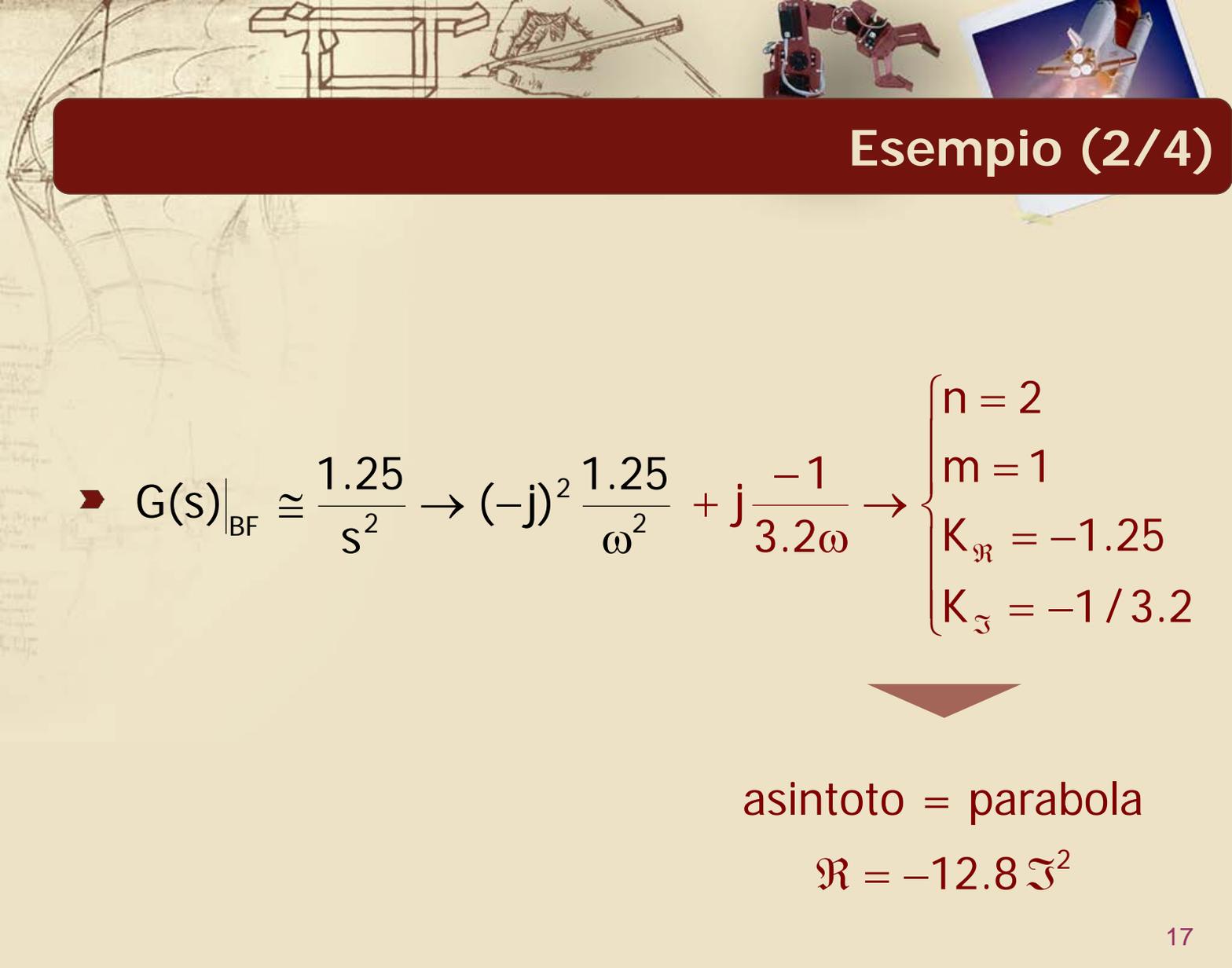


## Esempio (1/4)

$$\rightarrow G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

$$\rightarrow G(s)|_{BF} \cong \frac{1.25}{s^2} \rightarrow (-j)^2 \frac{1.25}{\omega^2}$$

$$\rightarrow G(s)|_{AF} \cong \frac{10}{s^3} \rightarrow (-j)^3 \frac{10}{\omega^3}$$



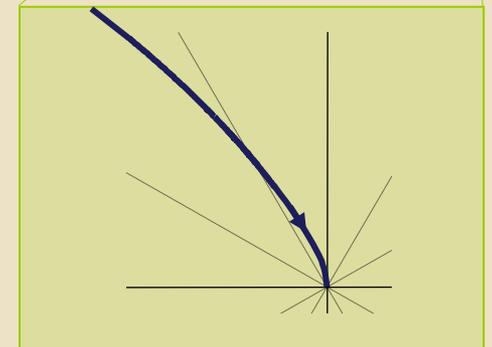
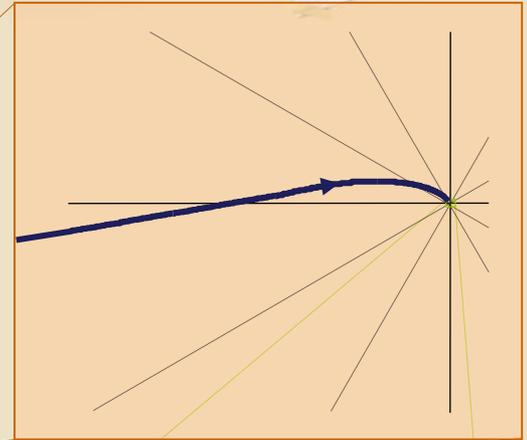
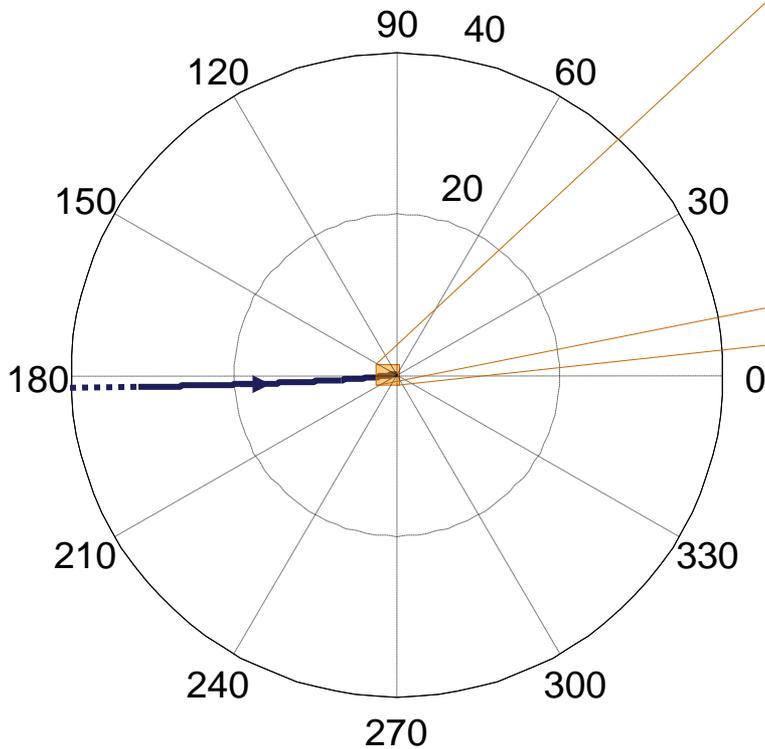
## Esempio (2/4)

$$\rightarrow G(s)|_{\text{BF}} \cong \frac{1.25}{s^2} \rightarrow (-j)^2 \frac{1.25}{\omega^2} + j \frac{-1}{3.2\omega} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \\ K_{\Re} = -1.25 \\ K_{\Im} = -1/3.2 \end{cases}$$

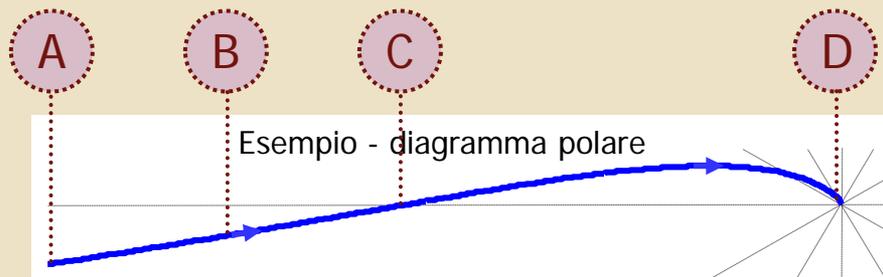
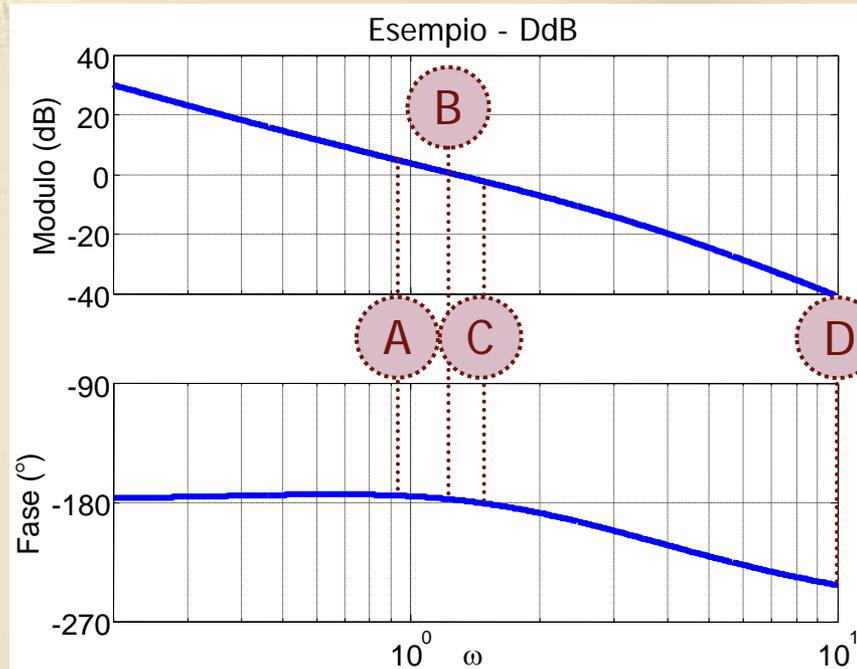
asintoto = parabola

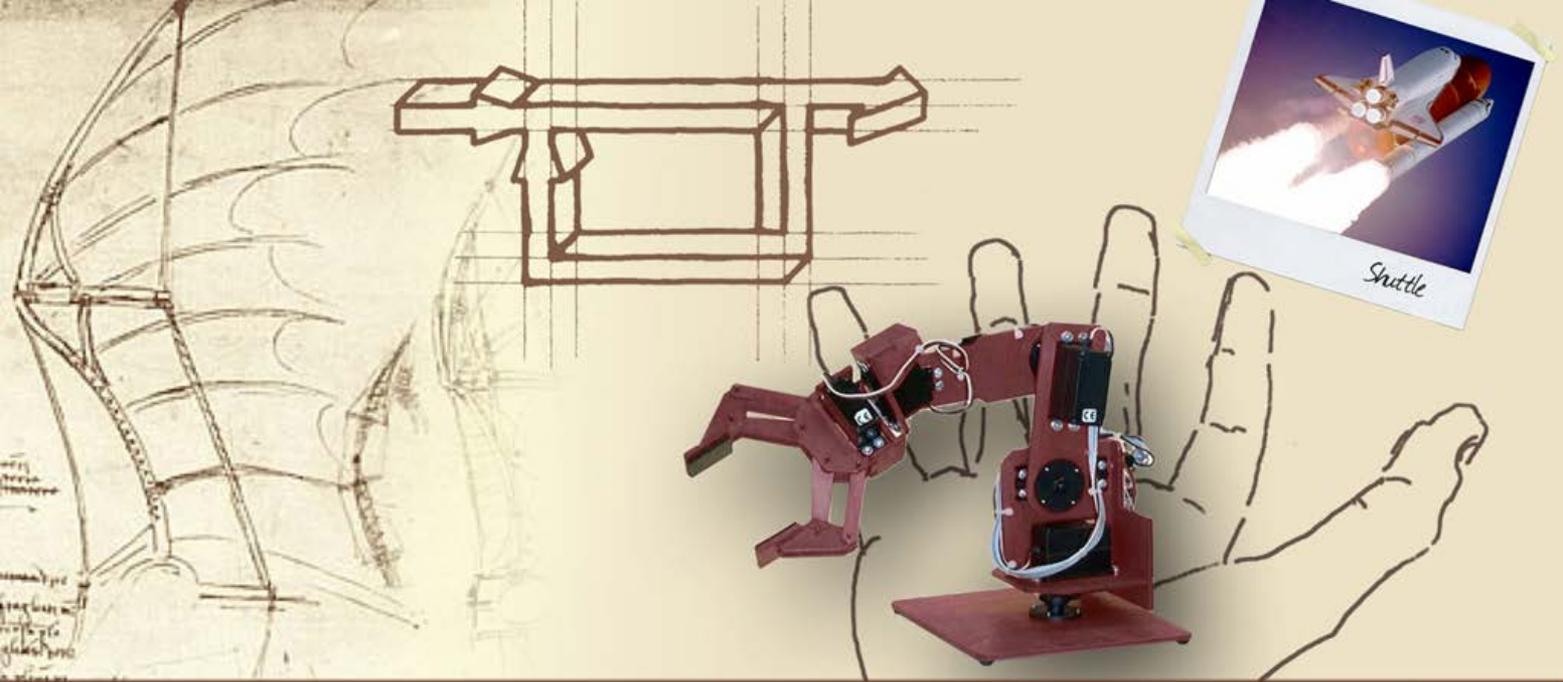
$$\Re = -12.8 \Im^2$$

# Esempio (3/4)



# Esempio (4/4)





**Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols**

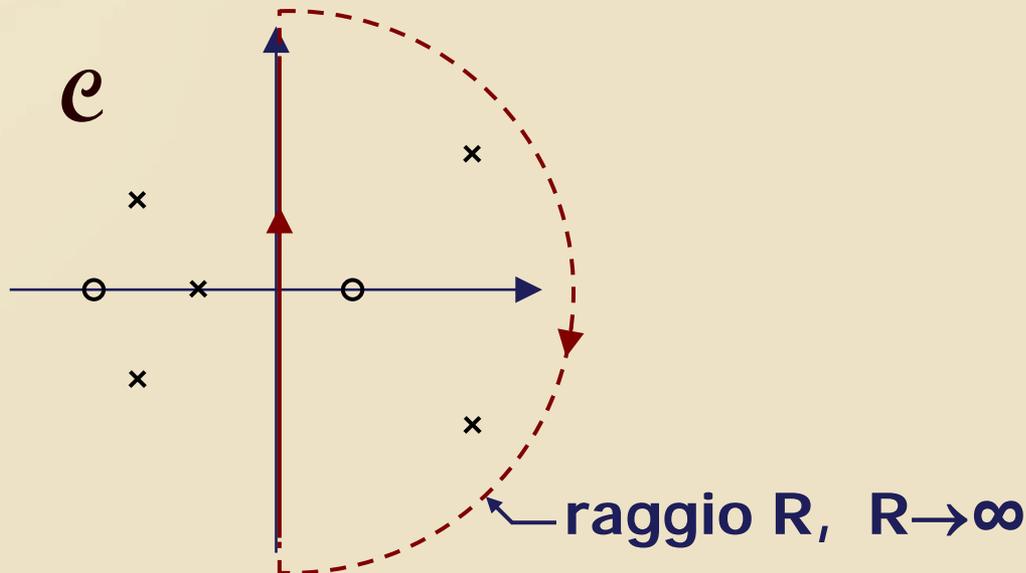
**Diagramma di Nyquist**

## Dominio della variabile $s$ (1/3)

- Il diagramma di Nyquist (**DdN**) di una fdt consiste nella rappresentazione grafica sul piano  $\mathcal{C}$  di

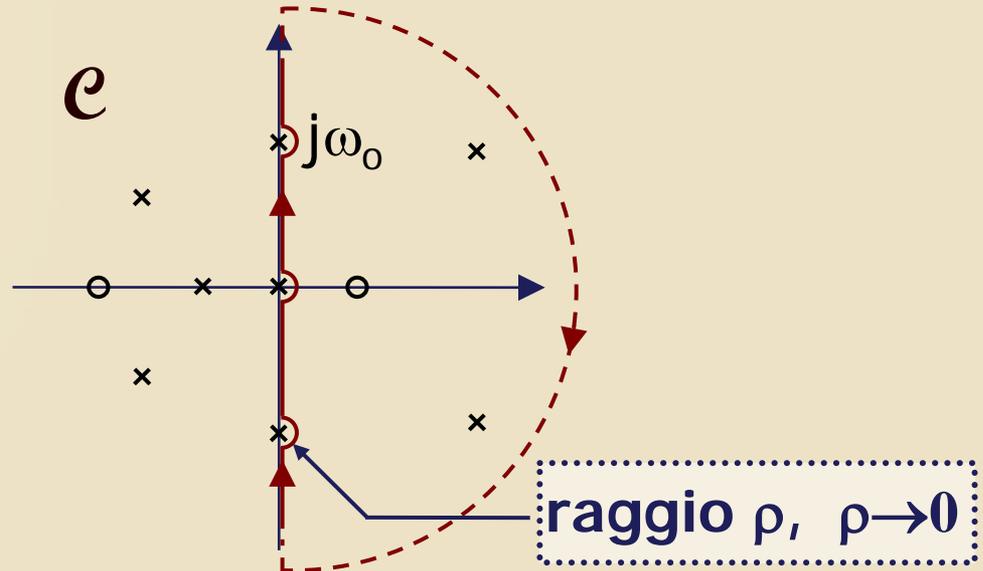
$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) \text{ per } \omega \in (-\infty, +\infty)$$

- Variazione della variabile indipendente:



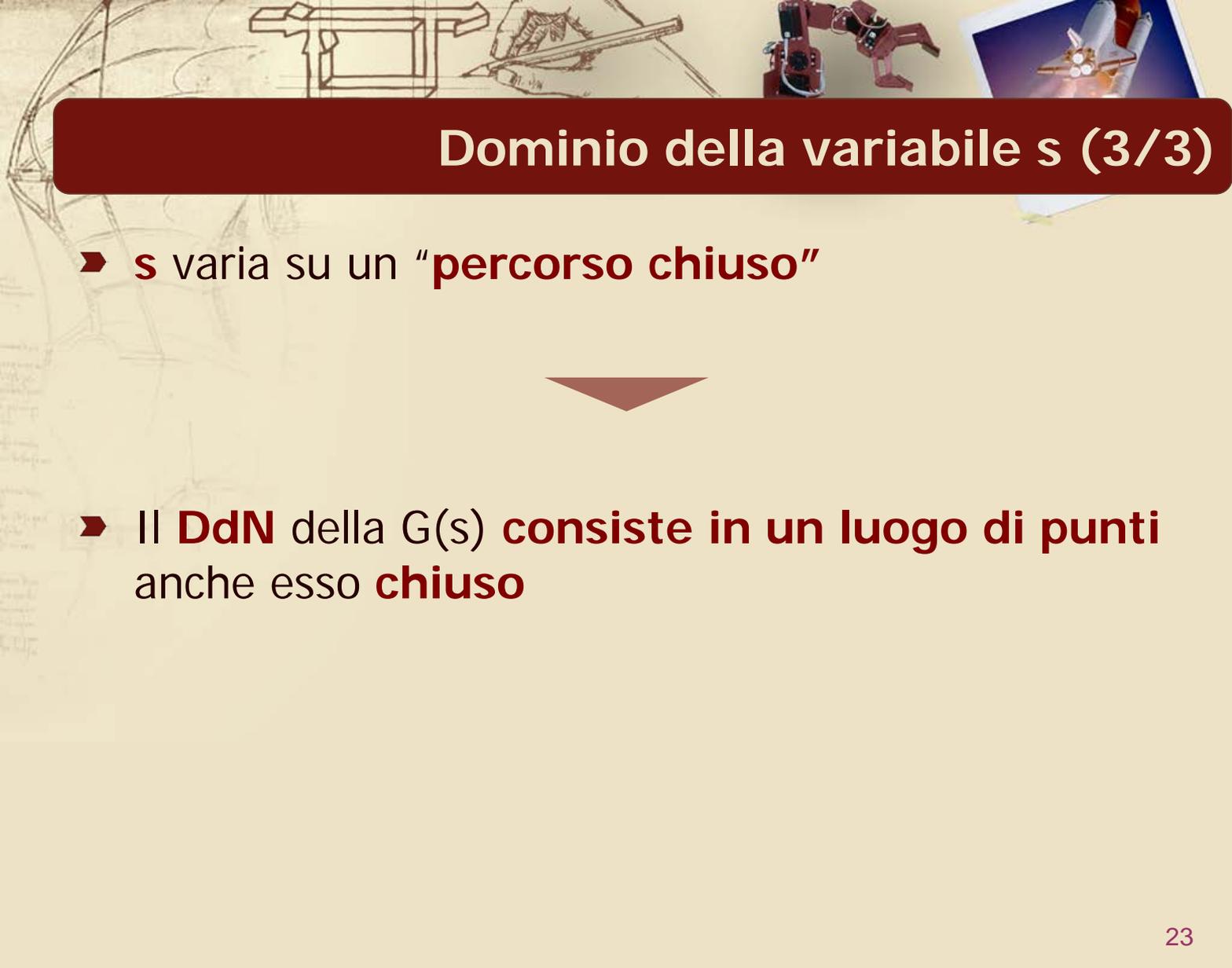
## Dominio della variabile $s$ (2/3)

- Problema: presenza di poli sull'asse immaginario
- Soluzione:



- Naturalmente

$$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (j\omega_0 + \rho e^{j\alpha}), \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow G(s) \rightarrow \infty$$

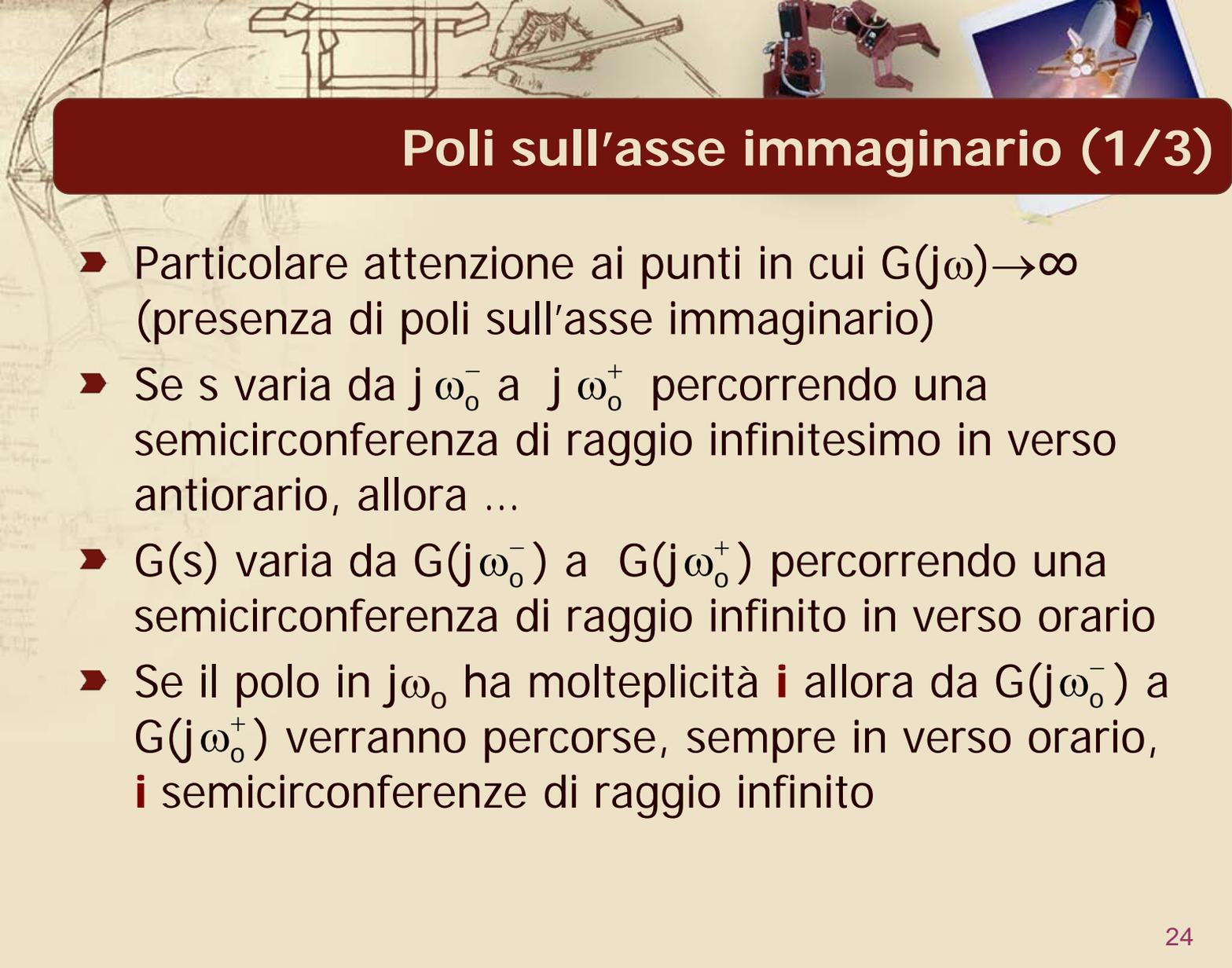


## Dominio della variabile $s$ (3/3)

- ▶  $s$  varia su un “**percorso chiuso**”

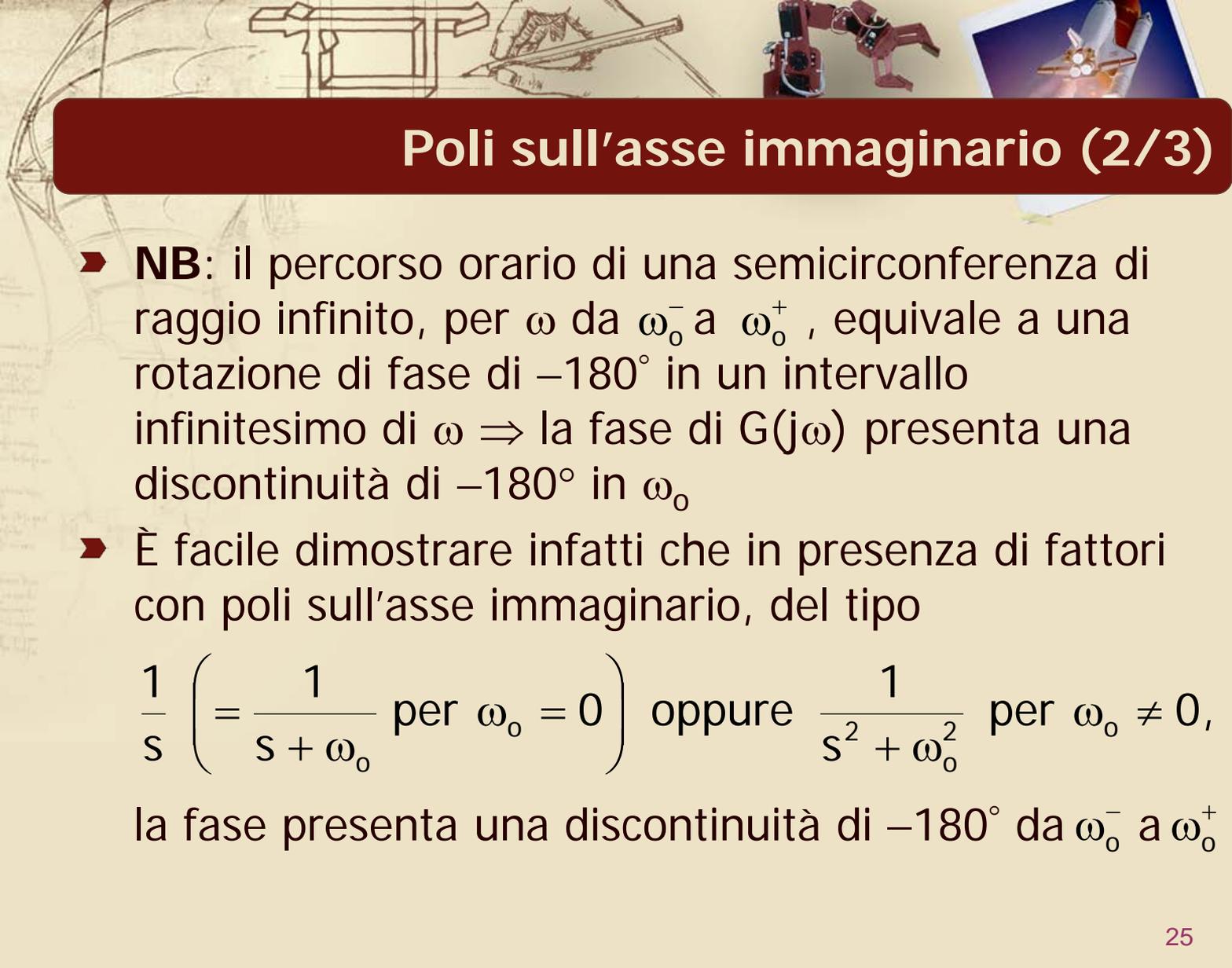


- ▶ Il **DdN** della  $G(s)$  **consiste in un luogo di punti** anche esso **chiuso**



## Poli sull'asse immaginario (1/3)

- ▶ Particolare attenzione ai punti in cui  $G(j\omega) \rightarrow \infty$  (presenza di poli sull'asse immaginario)
- ▶ Se  $s$  varia da  $j\omega_0^-$  a  $j\omega_0^+$  percorrendo una semicirconferenza di raggio infinitesimo in verso antiorario, allora ...
- ▶  $G(s)$  varia da  $G(j\omega_0^-)$  a  $G(j\omega_0^+)$  percorrendo una semicirconferenza di raggio infinito in verso orario
- ▶ Se il polo in  $j\omega_0$  ha molteplicità  $i$  allora da  $G(j\omega_0^-)$  a  $G(j\omega_0^+)$  verranno percorse, sempre in verso orario,  $i$  semicirconferenze di raggio infinito



## Poli sull'asse immaginario (2/3)

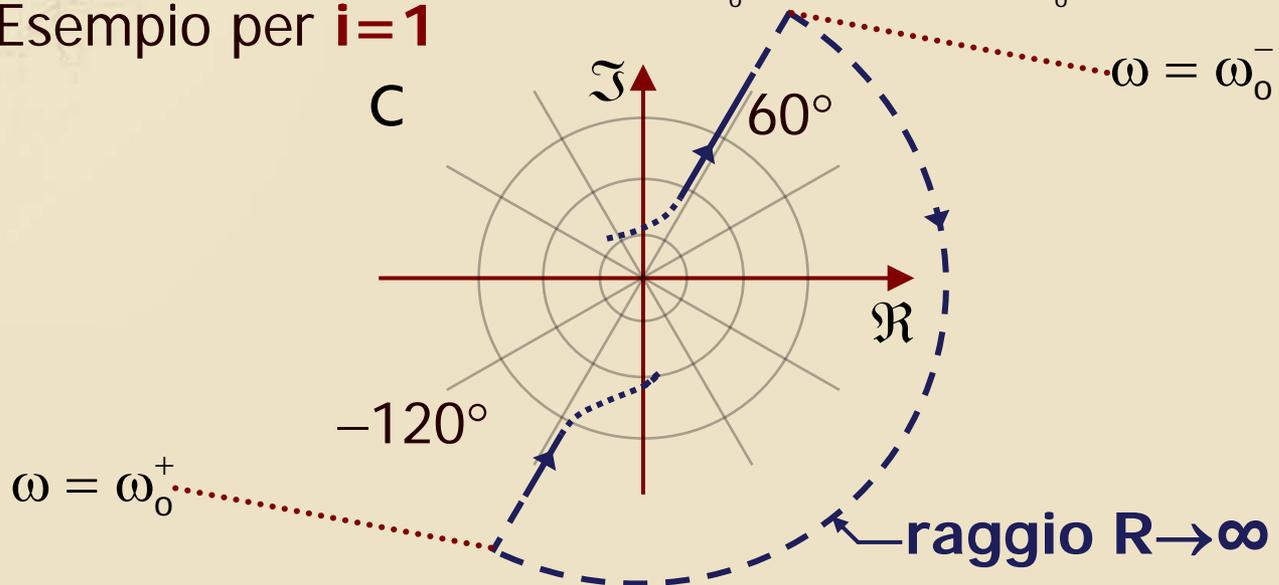
- **NB:** il percorso orario di una semicirconferenza di raggio infinito, per  $\omega$  da  $\omega_0^-$  a  $\omega_0^+$ , equivale a una rotazione di fase di  $-180^\circ$  in un intervallo infinitesimo di  $\omega \Rightarrow$  la fase di  $G(j\omega)$  presenta una discontinuità di  $-180^\circ$  in  $\omega_0$
- È facile dimostrare infatti che in presenza di fattori con poli sull'asse immaginario, del tipo

$$\frac{1}{s} \left( = \frac{1}{s + \omega_0} \text{ per } \omega_0 = 0 \right) \text{ oppure } \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \text{ per } \omega_0 \neq 0,$$

la fase presenta una discontinuità di  $-180^\circ$  da  $\omega_0^-$  a  $\omega_0^+$

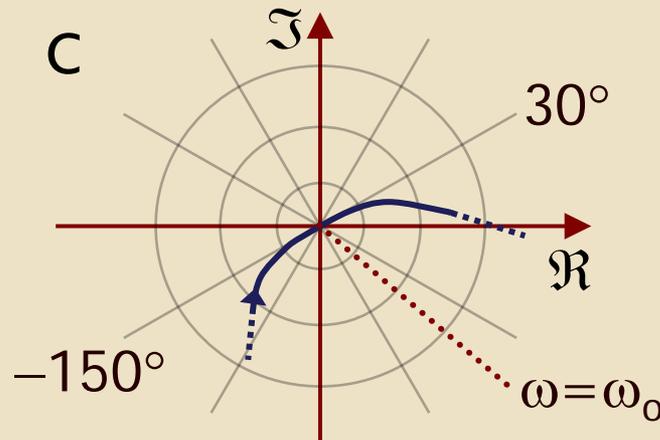
## Poli sull'asse immaginario (3/3)

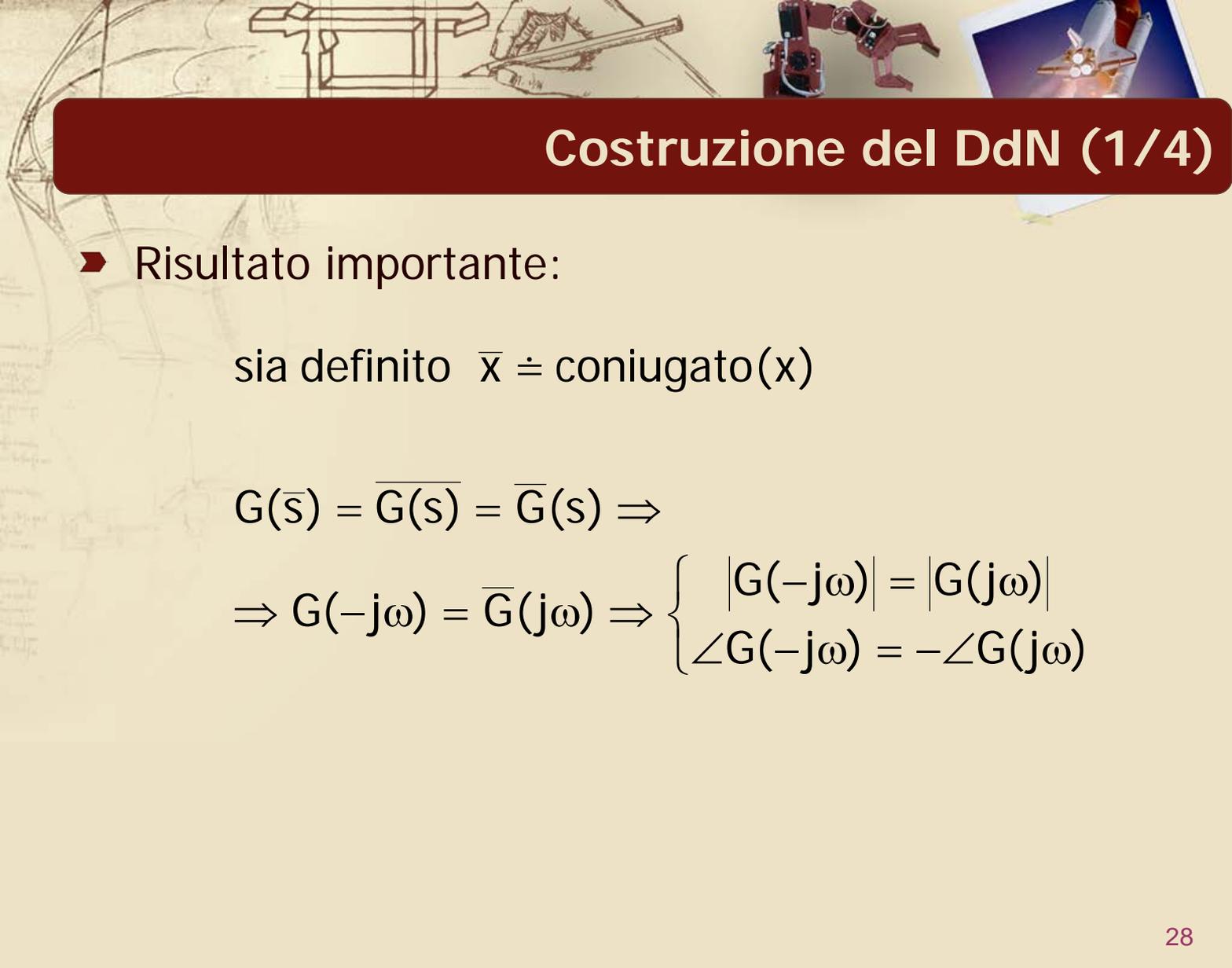
- Se il polo in  $j\omega_0$  ha molteplicità  $i$  allora la fase presenterà una discontinuità di  $-i180^\circ$  in  $\omega_0$
- Per ciò che è stato fin qui detto valgono ovviamente le seguenti eguaglianze:  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} |G(j\omega)| = \infty$
- Esempio per  $i=1$



## Zeri sull'asse immaginario

- La **presenza di i zeri sull'asse immaginario** (in  $j\omega_0$ ) induce in  $\omega=\omega_0$  una discontinuità di  **$+i180^\circ$**  nella fase e un modulo nullo ( $-\infty$  dB)  $\Rightarrow$  **il DdN attraversa l'origine del piano complesso proprio per  $\omega=\omega_0$**





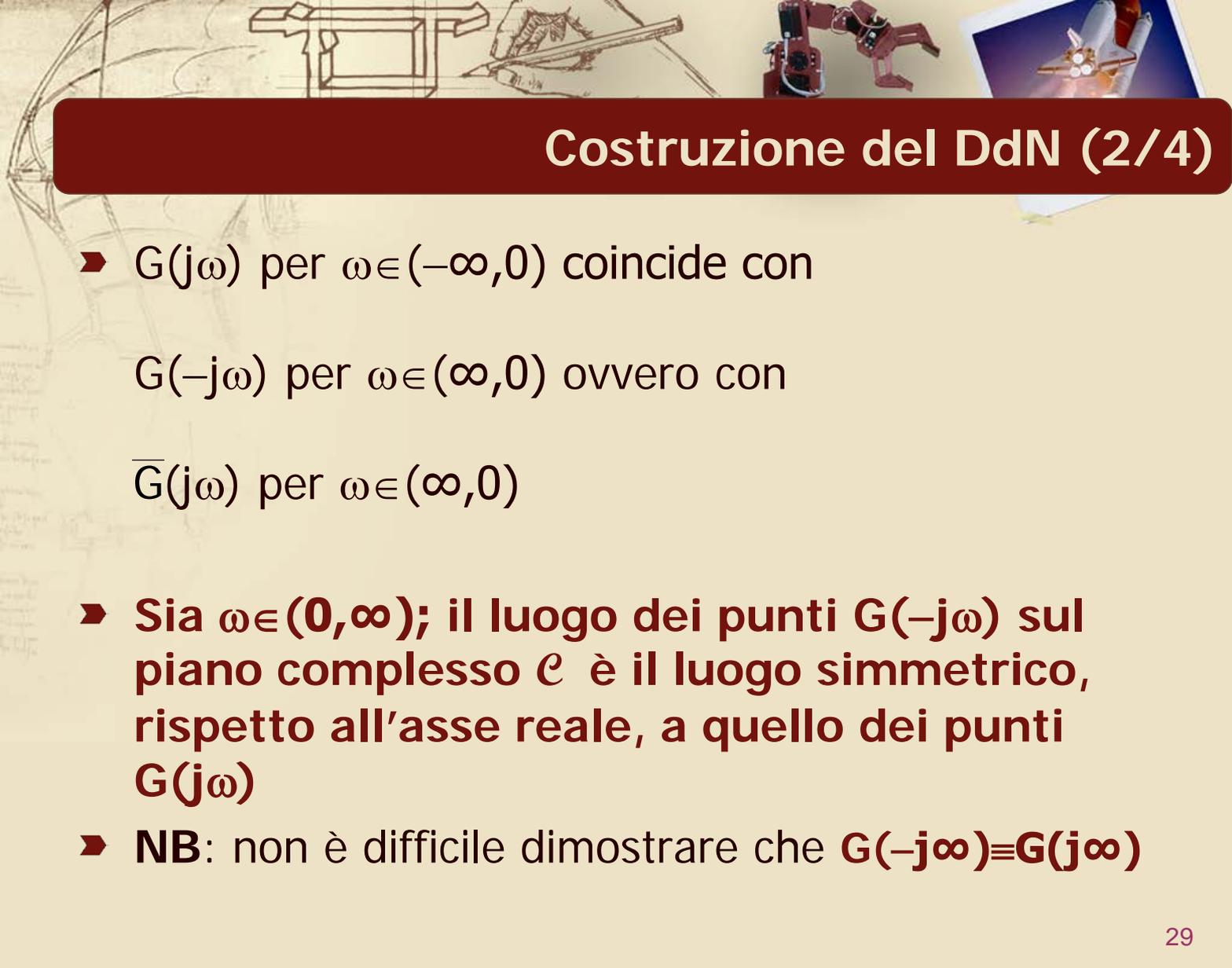
## Costruzione del DdN (1/4)

► Risultato importante:

sia definito  $\bar{x} \doteq \text{coniugato}(x)$

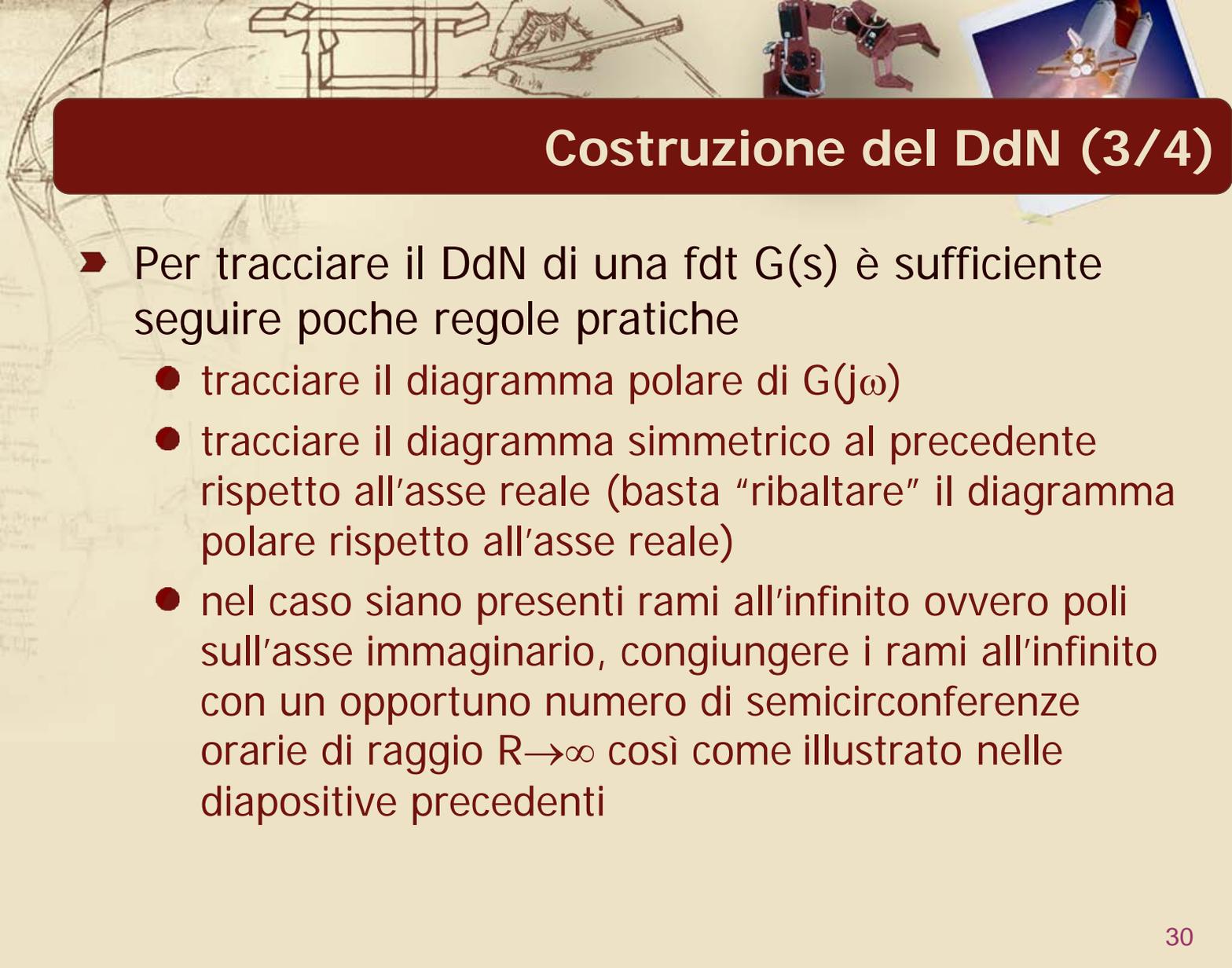
$$G(\bar{s}) = \overline{G(s)} = \bar{G}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |G(-j\omega)| = |G(j\omega)| \\ \angle G(-j\omega) = -\angle G(j\omega) \end{cases}$$



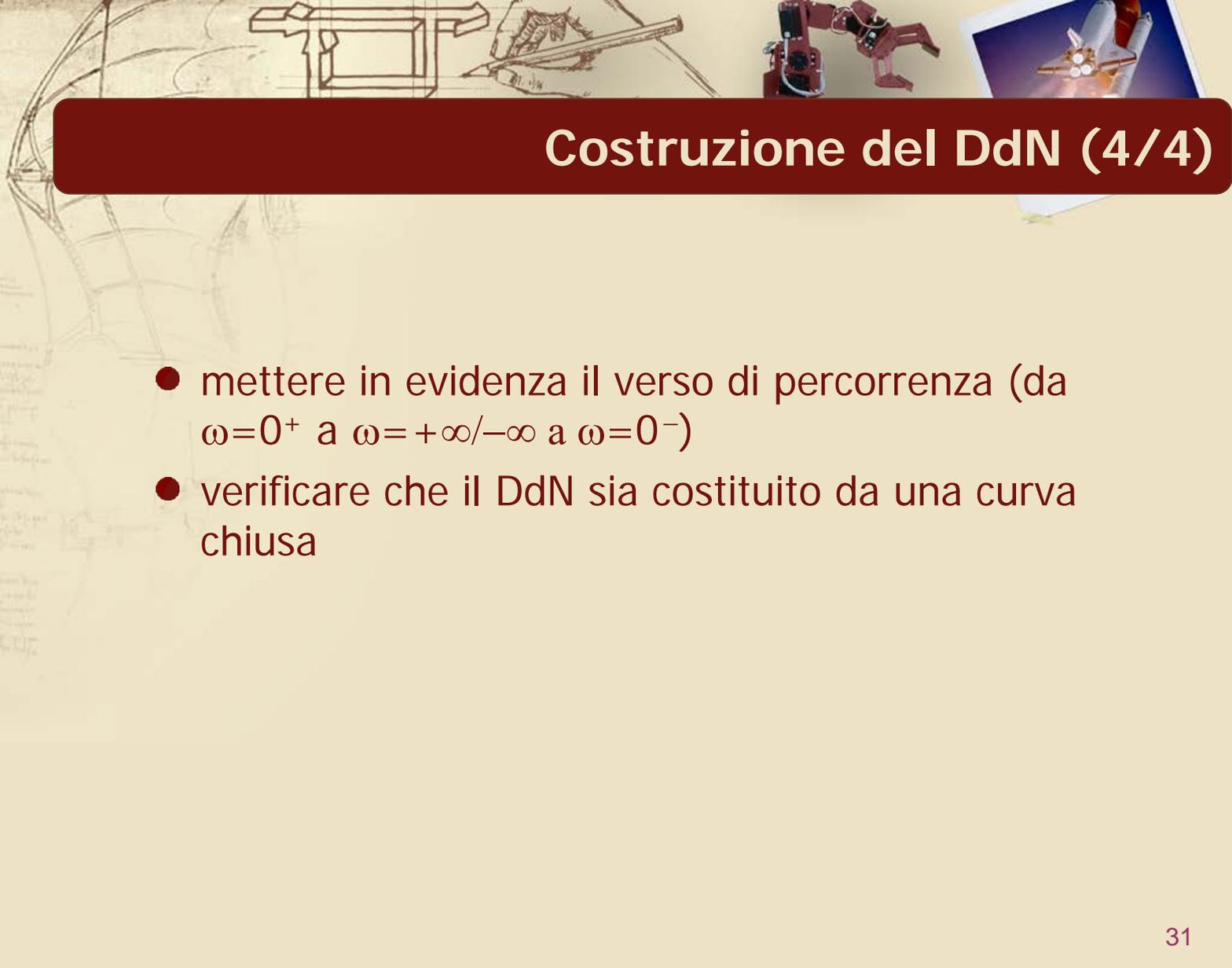
## Costruzione del DdN (2/4)

- ▶  $G(j\omega)$  per  $\omega \in (-\infty, 0)$  coincide con  
 $G(-j\omega)$  per  $\omega \in (\infty, 0)$  ovvero con  
 $\overline{G(j\omega)}$  per  $\omega \in (\infty, 0)$
- ▶ **Sia  $\omega \in (0, \infty)$ ; il luogo dei punti  $G(-j\omega)$  sul piano complesso  $\mathcal{C}$  è il luogo simmetrico, rispetto all'asse reale, a quello dei punti  $G(j\omega)$**
- ▶ **NB:** non è difficile dimostrare che  $G(-j\infty) \equiv G(j\infty)$



## Costruzione del DdN (3/4)

- Per tracciare il DdN di una fdt  $G(s)$  è sufficiente seguire poche regole pratiche
  - tracciare il diagramma polare di  $G(j\omega)$
  - tracciare il diagramma simmetrico al precedente rispetto all'asse reale (basta "ribaltare" il diagramma polare rispetto all'asse reale)
  - nel caso siano presenti rami all'infinito ovvero poli sull'asse immaginario, congiungere i rami all'infinito con un opportuno numero di semicirconferenze orarie di raggio  $R \rightarrow \infty$  così come illustrato nelle diapositive precedenti

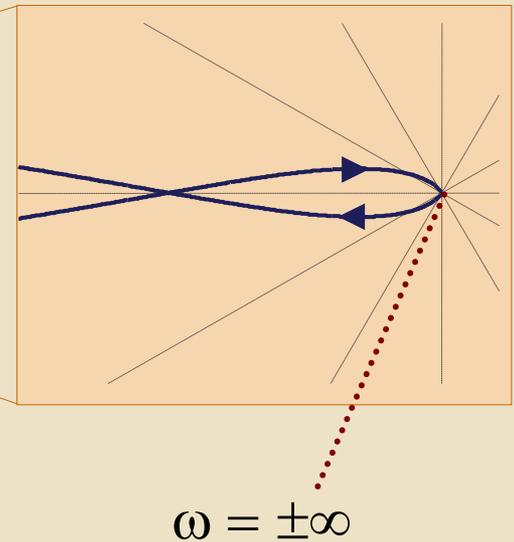
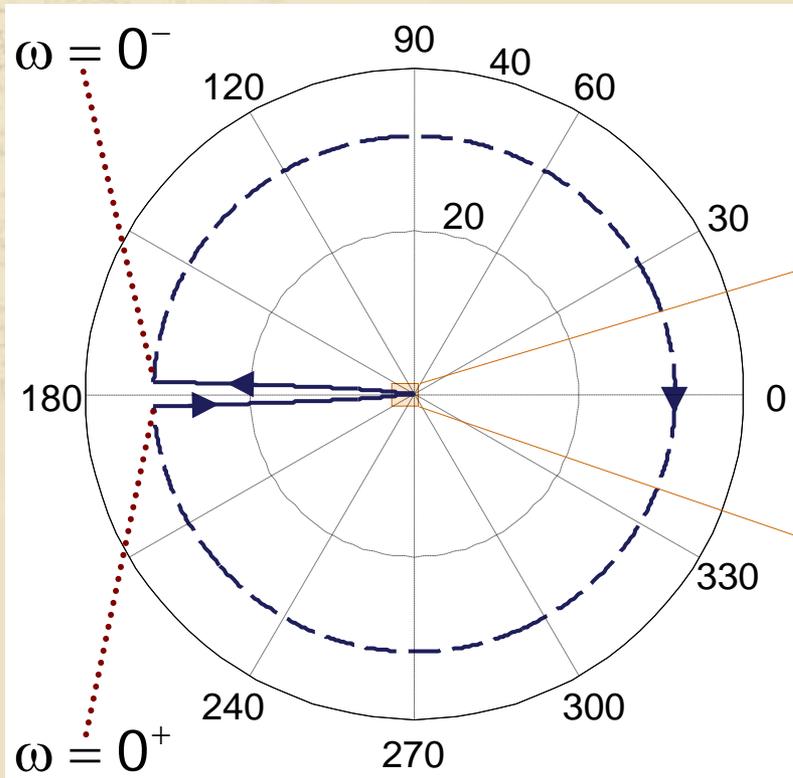


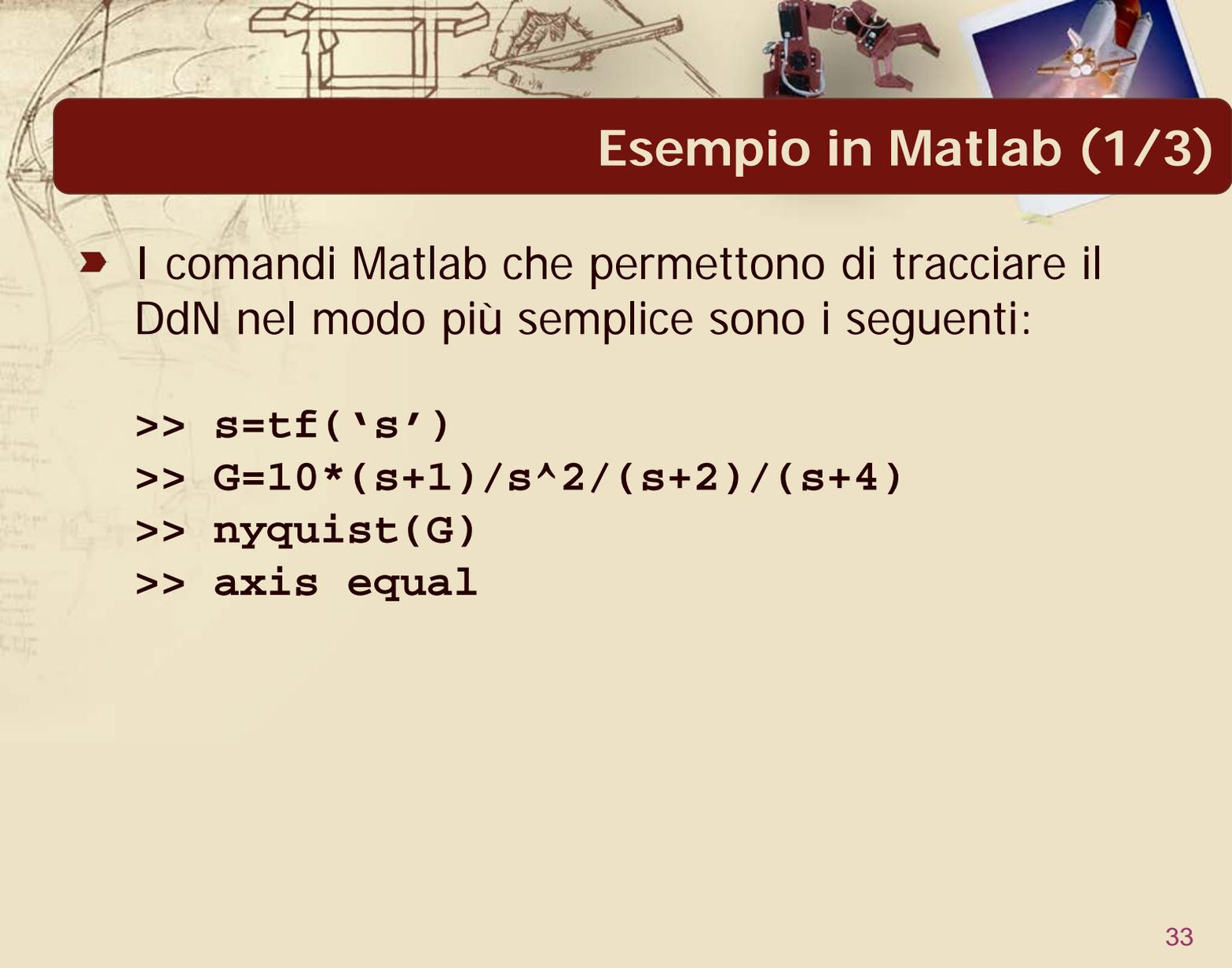
## Costruzione del DdN (4/4)

- mettere in evidenza il verso di percorrenza (da  $\omega=0^+$  a  $\omega=+\infty/-\infty$  a  $\omega=0^-$ )
- verificare che il DdN sia costituito da una curva chiusa

# Esempio (1/2)

$$G(s) = \frac{10(s + 1)}{s^2(s + 2)(s + 4)}$$





## Esempio in Matlab (1/3)

- I comandi Matlab che permettono di tracciare il DdN nel modo più semplice sono i seguenti:

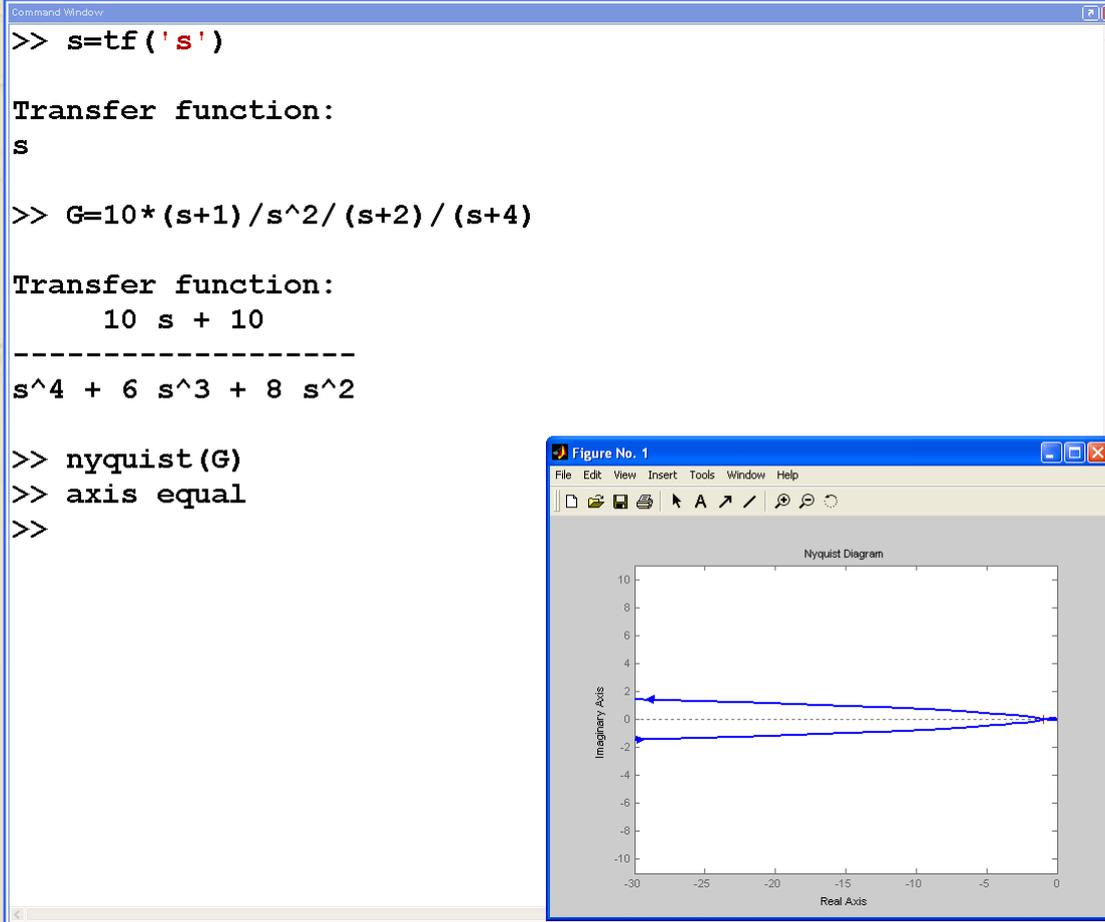
```
>> s=tf('s')
```

```
>> G=10*(s+1)/s^2/(s+2)/(s+4)
```

```
>> nyquist(G)
```

```
>> axis equal
```

# Esempio in Matlab (2/3)



## Esempio in Matlab (3/3)

- ▶ Anche in questo caso il DdN non è completo perché mancante delle semicirconferenze all'infinito
- ▶ I dettagli del DdN possono essere meglio analizzati con successive operazioni di zoom sul diagramma stesso

