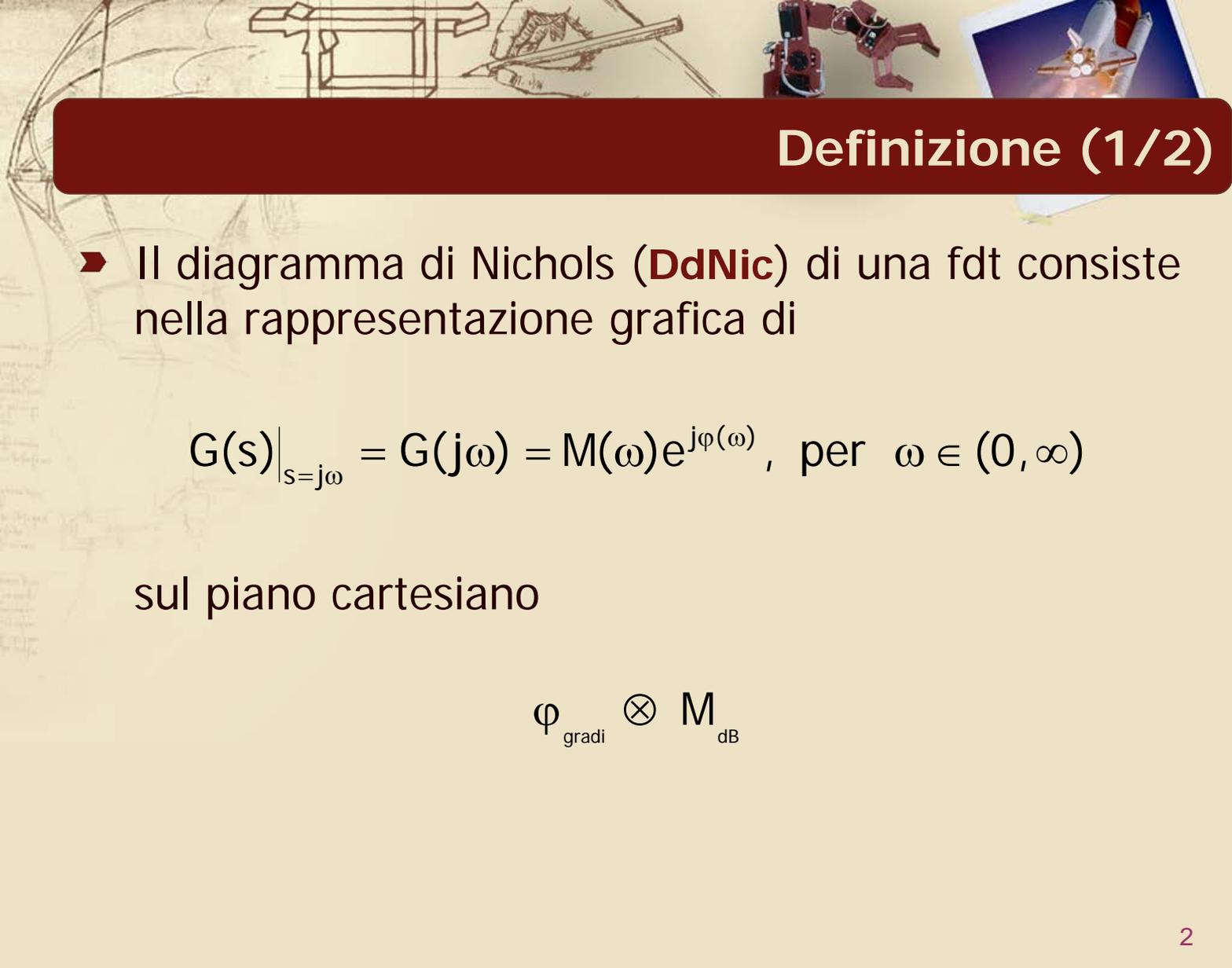


**Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols**

**Diagramma di Nichols**



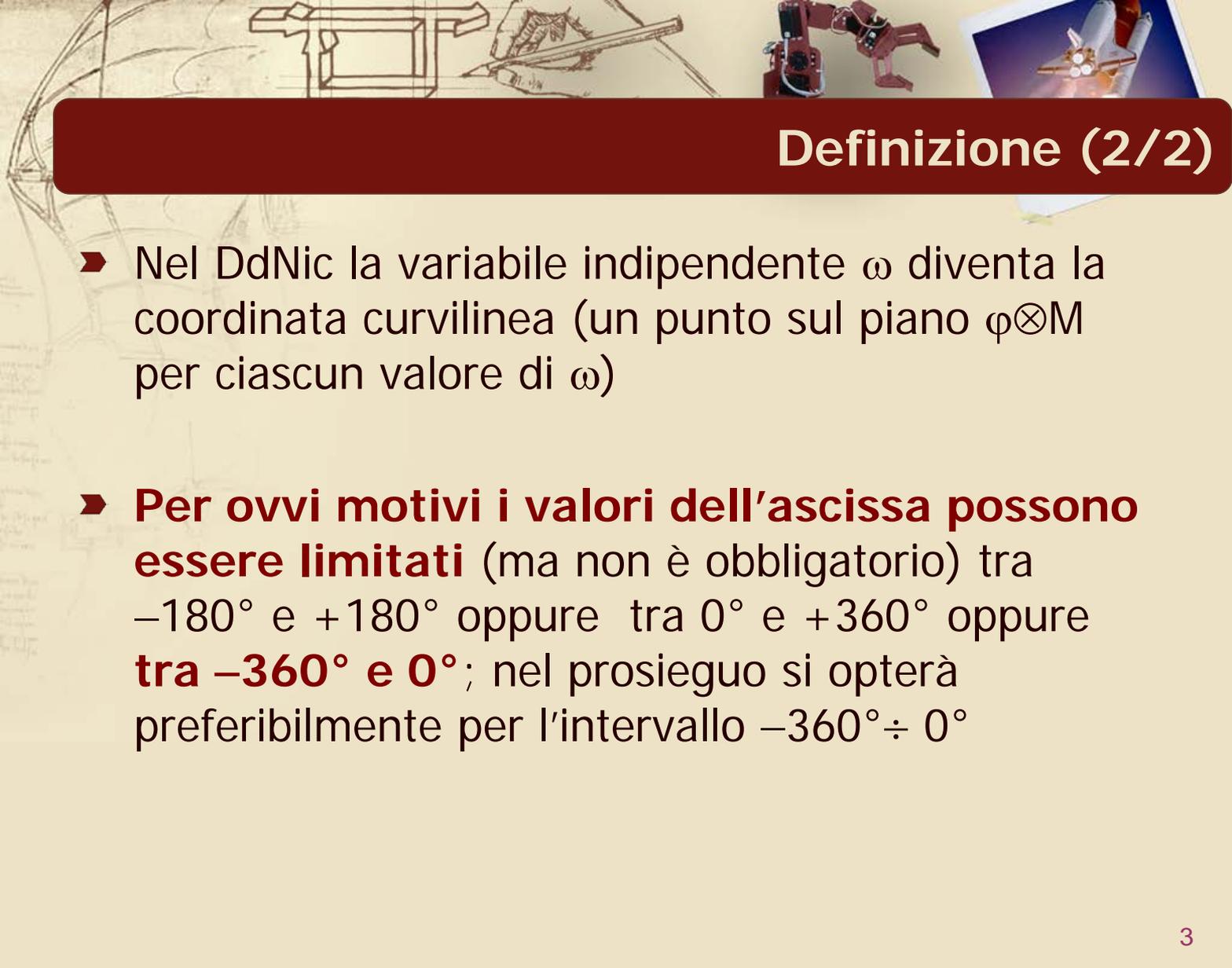
## Definizione (1/2)

- Il diagramma di Nichols (**DdNic**) di una fdt consiste nella rappresentazione grafica di

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \text{ per } \omega \in (0, \infty)$$

sul piano cartesiano

$$\varphi_{\text{gradi}} \otimes M_{\text{dB}}$$

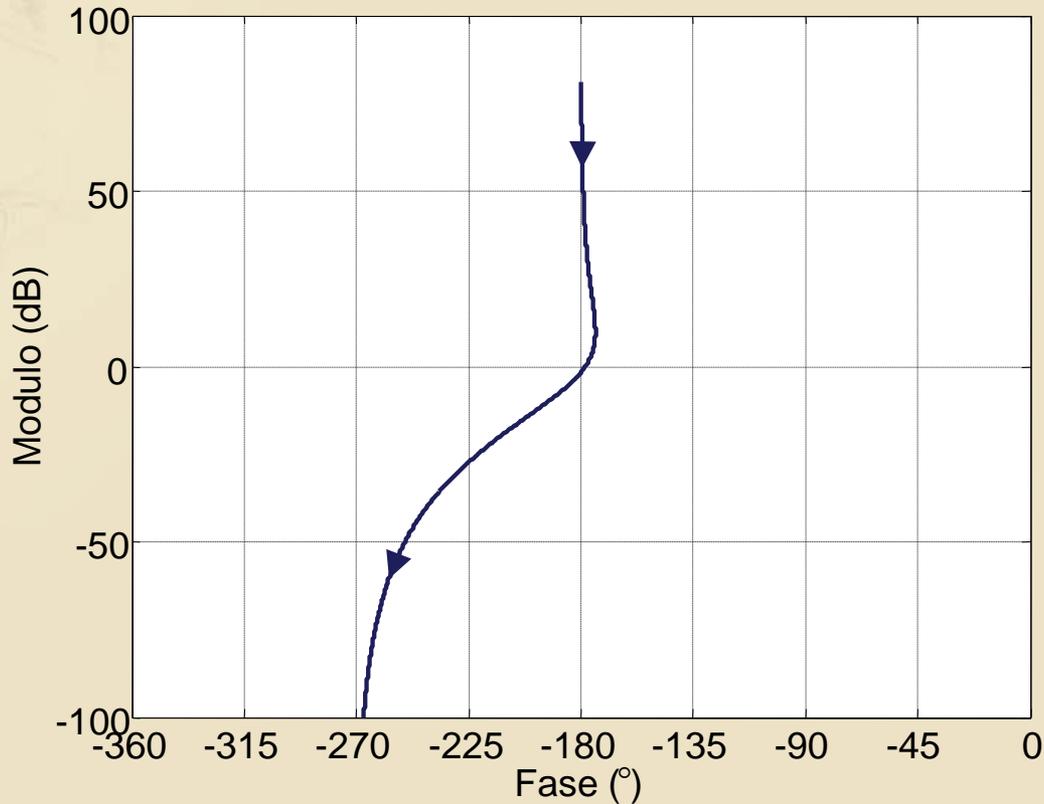


## Definizione (2/2)

- ▶ Nel DdNic la variabile indipendente  $\omega$  diventa la coordinata curvilinea (un punto sul piano  $\varphi \otimes M$  per ciascun valore di  $\omega$ )
- ▶ **Per ovvi motivi i valori dell'ascissa possono essere limitati** (ma non è obbligatorio) tra  $-180^\circ$  e  $+180^\circ$  oppure tra  $0^\circ$  e  $+360^\circ$  oppure **tra  $-360^\circ$  e  $0^\circ$** ; nel prosieguo si opterà preferibilmente per l'intervallo  $-360^\circ \div 0^\circ$

## Esempio (1/2)

$$G(s) = \frac{10(s + 1)}{s^2(s + 2)(s + 4)}$$



# Esempio in Matlab

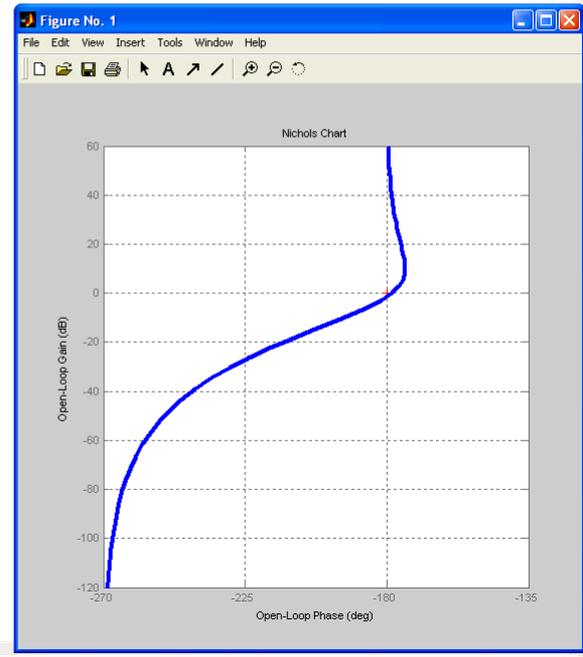
```
Command Window
>> s=tf('s')

Transfer function:
s

>> G=10*(s+1)/s^2/(s+2)/(s+4)

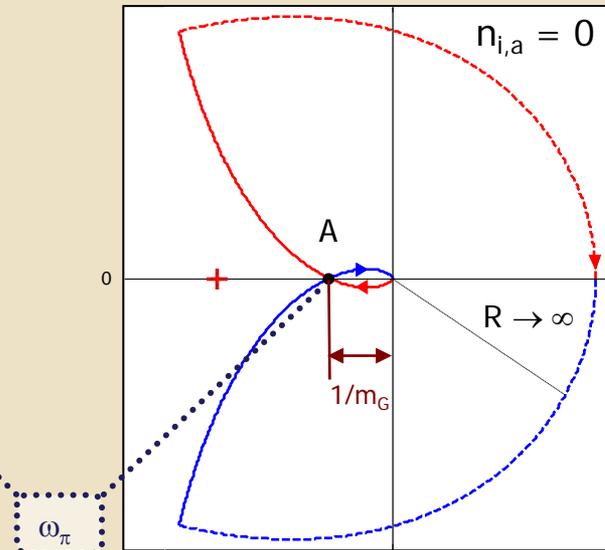
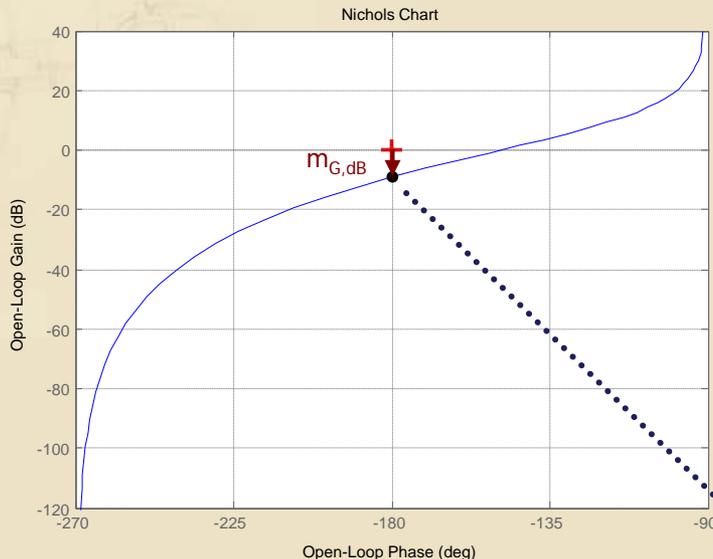
Transfer function:
    10 s + 10
-----
s^4 + 6 s^3 + 8 s^2

>> nichols(G)
>> set(gca,'XGrid','on')
>> set(gca,'YGrid','on')
>>
```



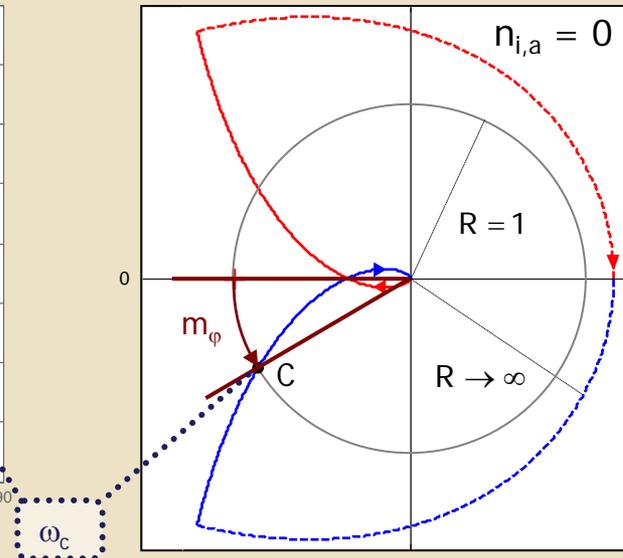
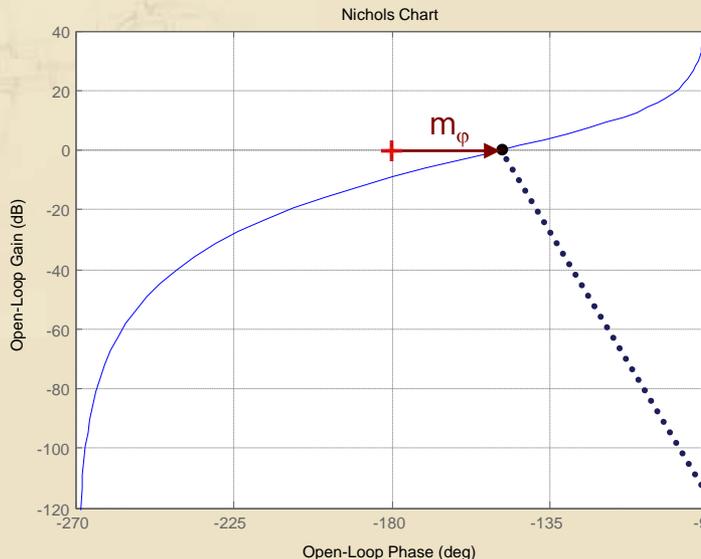
# Lettura di $m_G$ sul DdNic

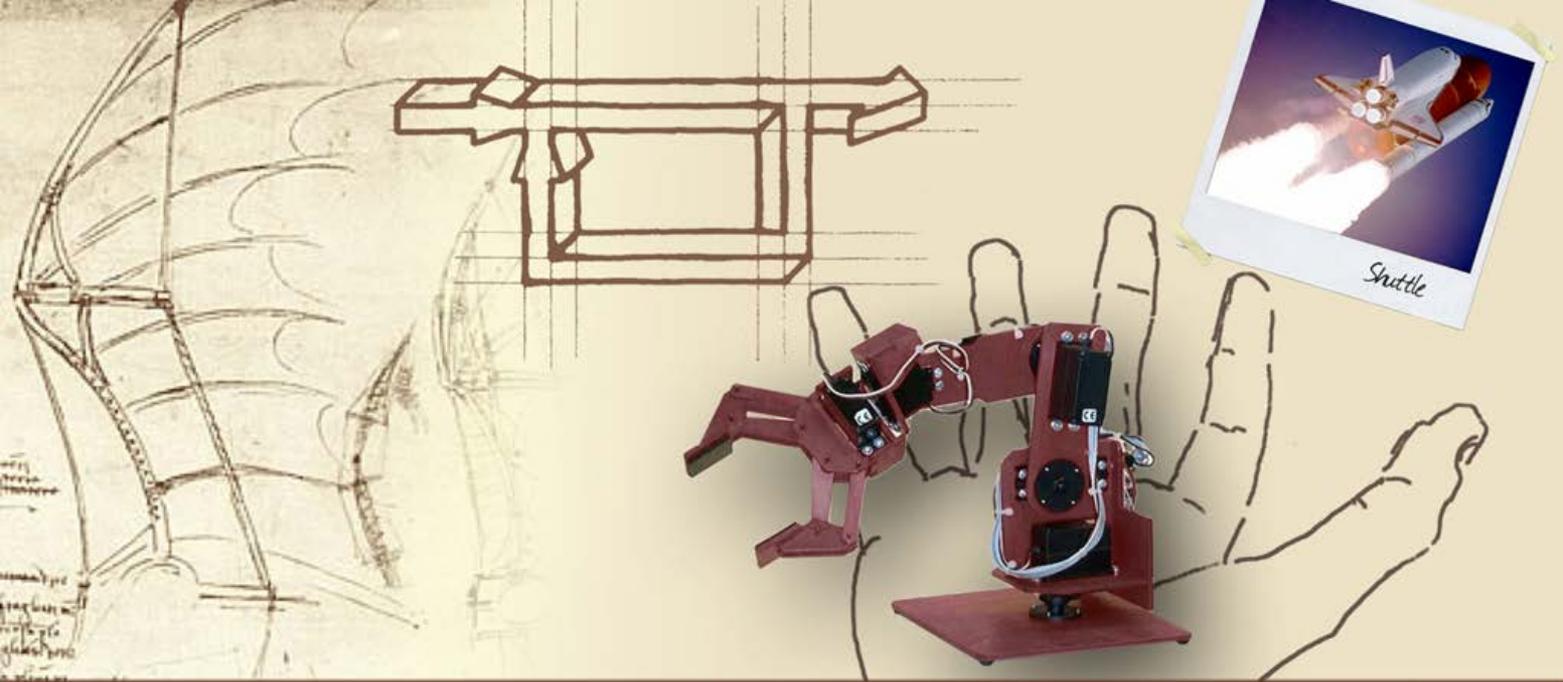
- Il margine di guadagno può essere letto anche sul diagramma di Nichols di  $G_a(j\omega)$ , osservando che il punto A corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse verticale a fase  $-180^\circ$



# Lettura di $m_\varphi$ sul DdNic

- Il margine di fase può essere letto anche sul diagramma di Nichols di  $G_a(j\omega)$ , osservando che il punto C corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse orizzontale a 0 dB





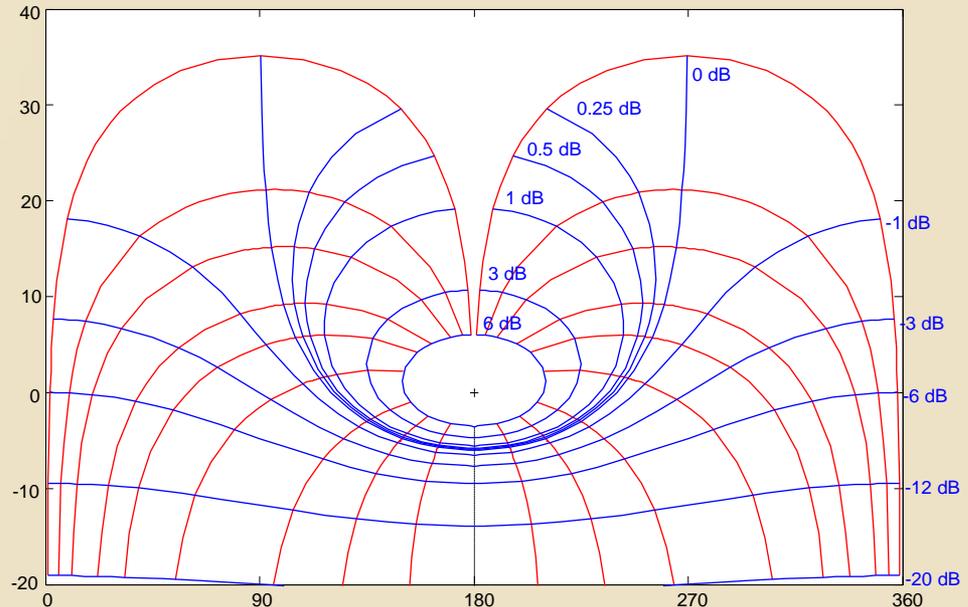
**Margini di stabilità**

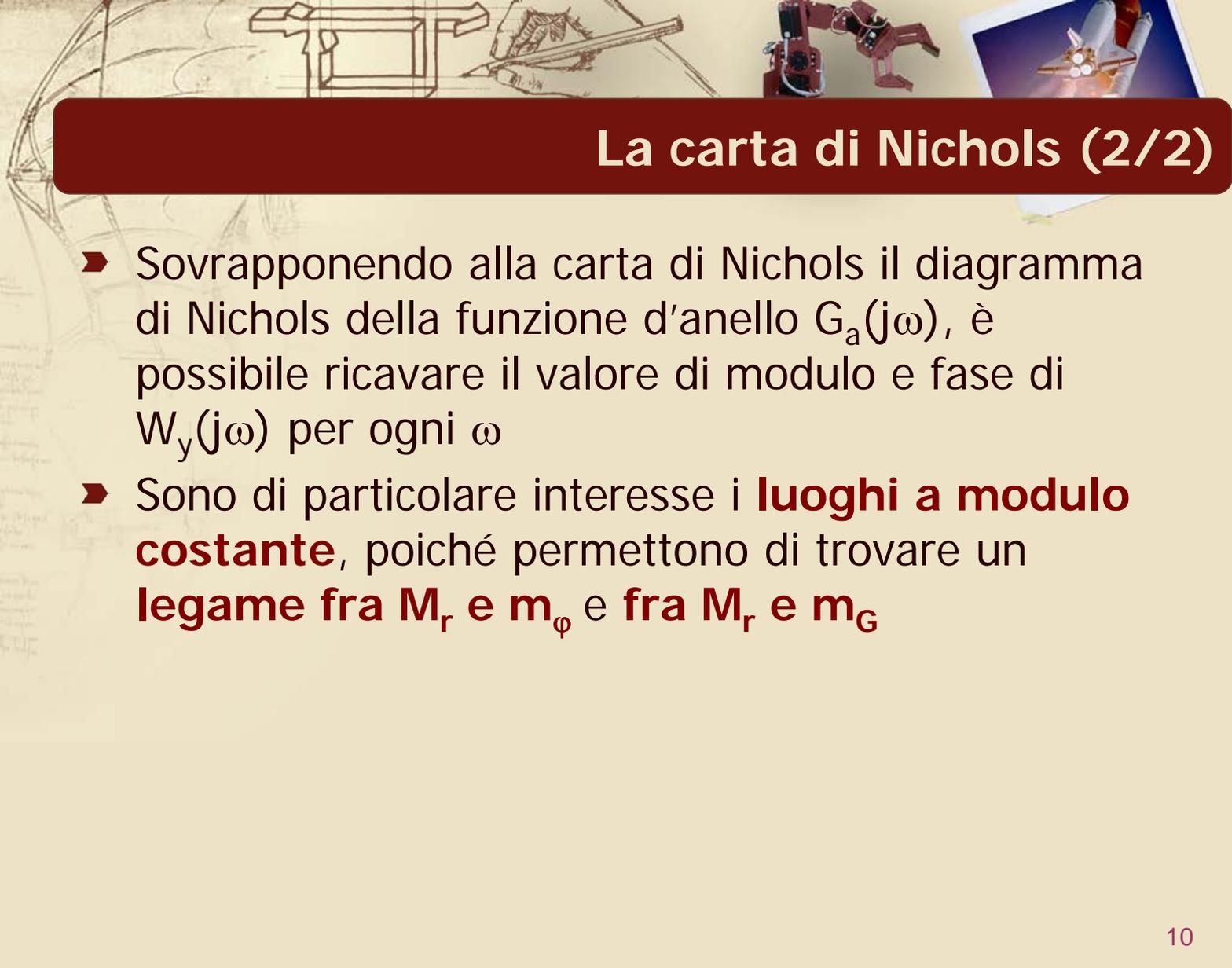
**La carta di Nichols**

# La carta di Nichols (1/2)

- I luoghi a  $M$  (modulo) costante e a  $N$  (fase) costante possono essere tracciati anche sul piano di Nichols: il loro insieme costituisce la **carta di Nichols**

Generata in Matlab con il comando:  
`ngrid('new')`

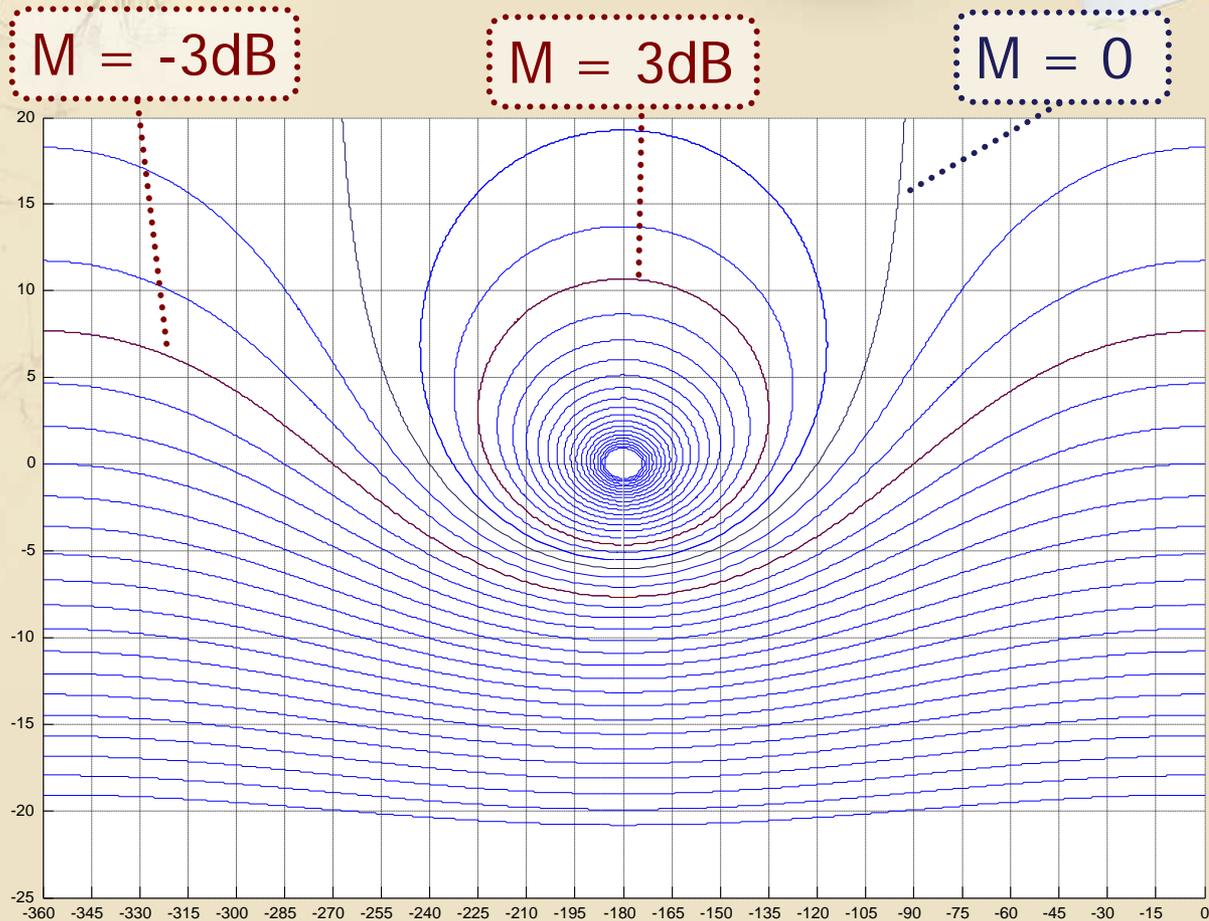




## La carta di Nichols (2/2)

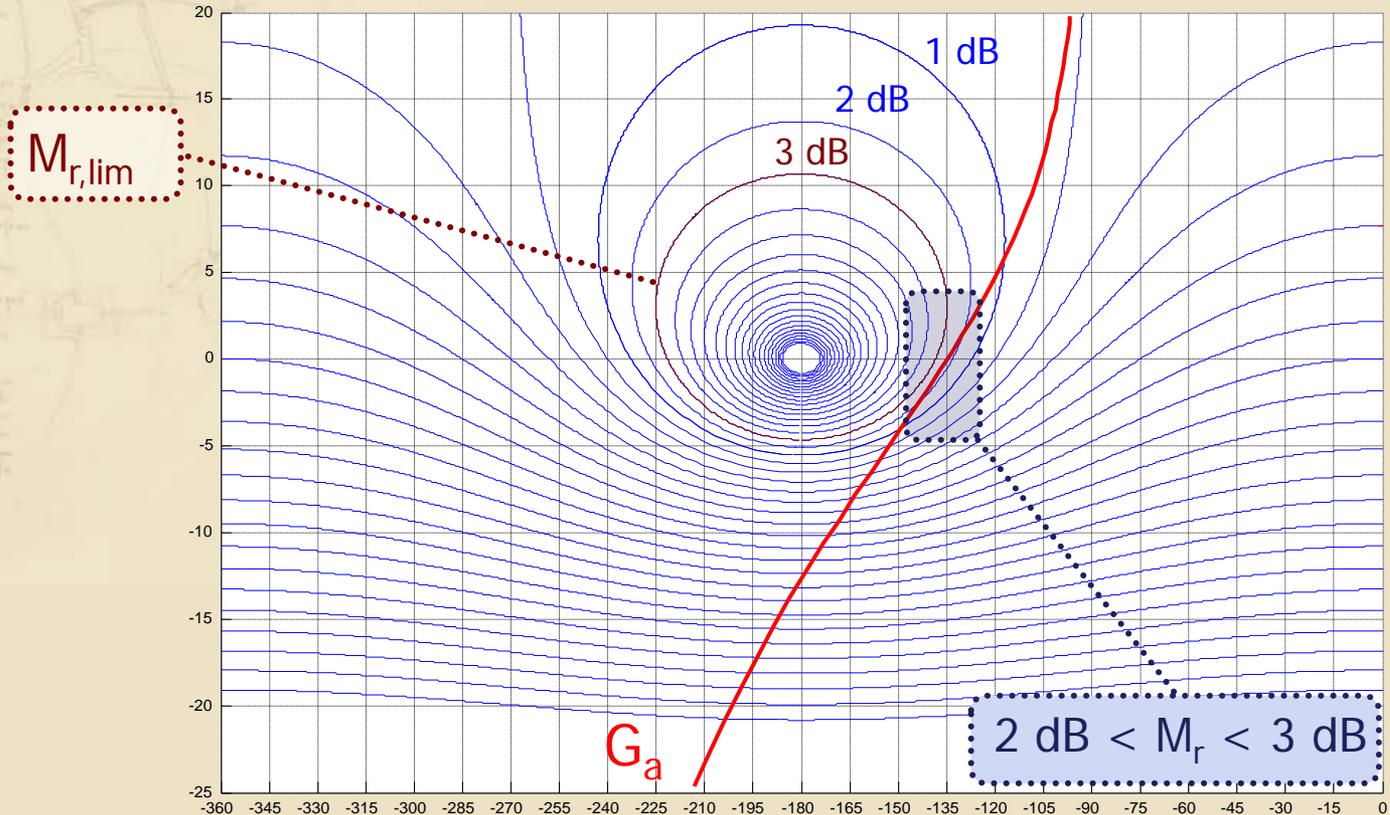
- Sovrapponendo alla carta di Nichols il diagramma di Nichols della funzione d'anello  $G_a(j\omega)$ , è possibile ricavare il valore di modulo e fase di  $W_y(j\omega)$  per ogni  $\omega$
- Sono di particolare interesse i **luoghi a modulo costante**, poiché permettono di trovare un **legame fra  $M_r$  e  $m_\varphi$  e fra  $M_r$  e  $m_G$**

# I luoghi a M costante sul piano di Nichols



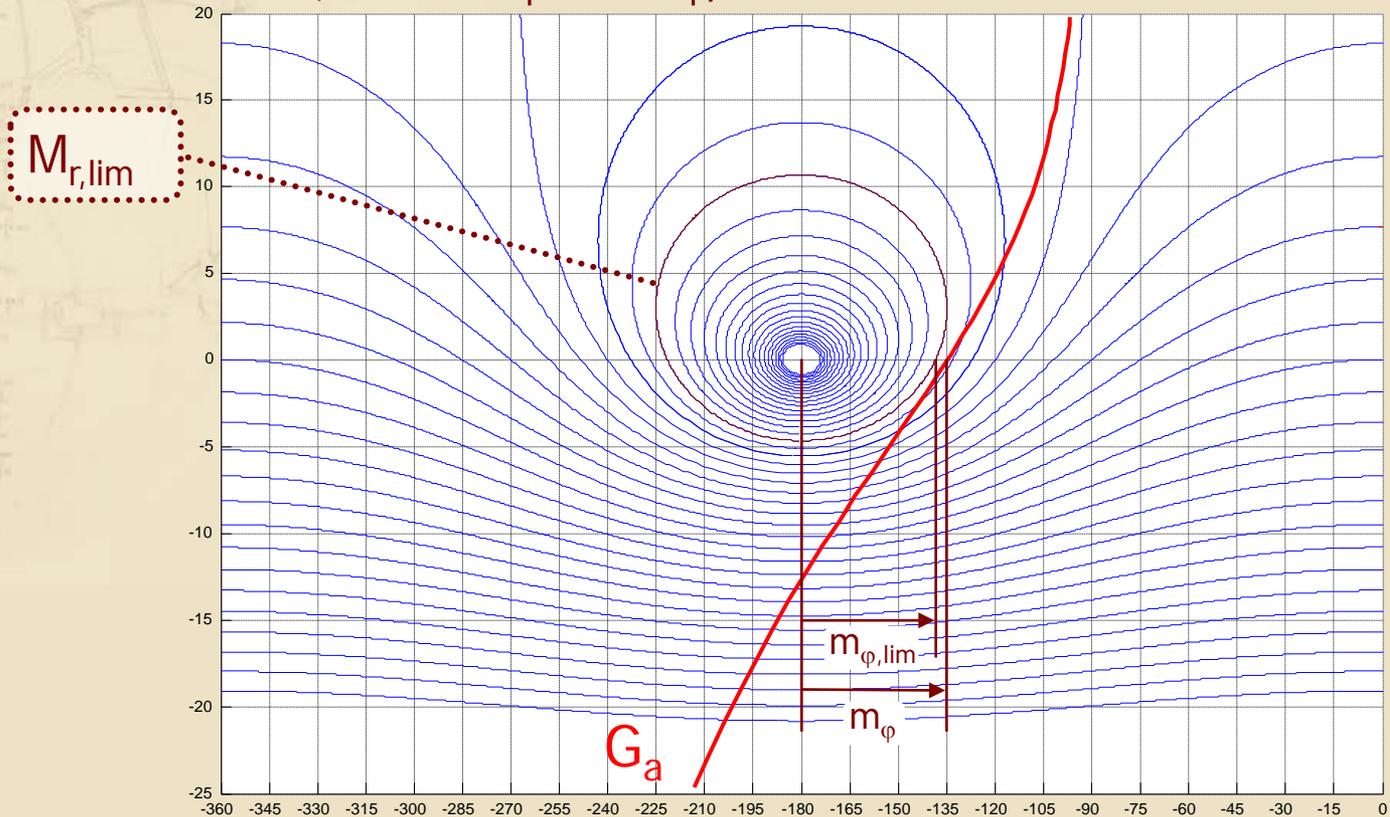
# Legame fra $M_r$ e $m_\varphi$ (1/3)

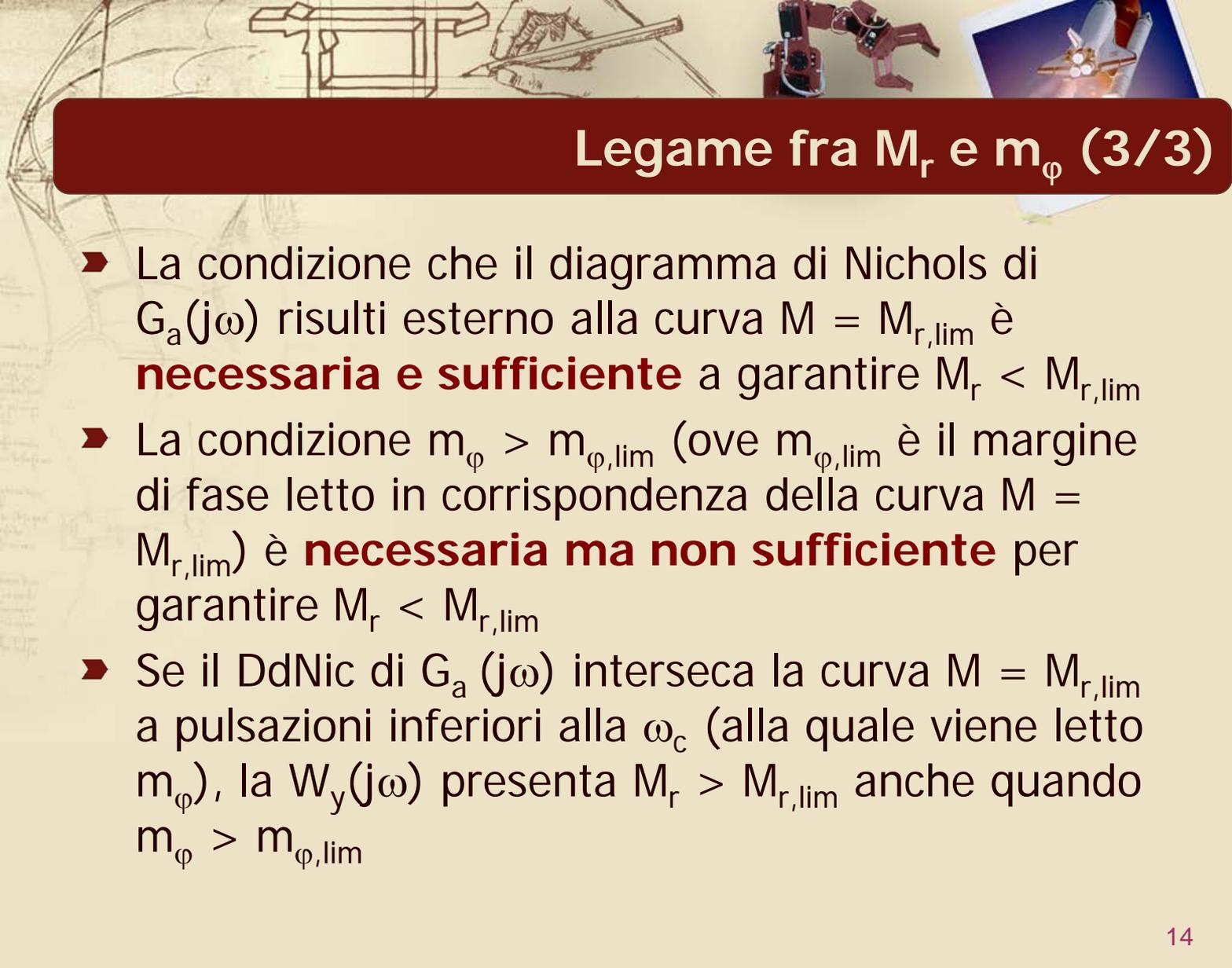
►  $M < M_{r,lim} \Rightarrow$  DdNic di  $G_a$  **esterno** alla curva  $M_{r,lim}$



## Legame fra $M_r$ e $m_\varphi$ (2/3)

►  $M < M_{r,lim} \Rightarrow m_\varphi > m_{\varphi,lim}$





## Legame fra $M_r$ e $m_\varphi$ (3/3)

- ▶ La condizione che il diagramma di Nichols di  $G_a(j\omega)$  risulti esterno alla curva  $M = M_{r,\text{lim}}$  è **necessaria e sufficiente** a garantire  $M_r < M_{r,\text{lim}}$
- ▶ La condizione  $m_\varphi > m_{\varphi,\text{lim}}$  (ove  $m_{\varphi,\text{lim}}$  è il margine di fase letto in corrispondenza della curva  $M = M_{r,\text{lim}}$ ) è **necessaria ma non sufficiente** per garantire  $M_r < M_{r,\text{lim}}$
- ▶ Se il DdNic di  $G_a(j\omega)$  interseca la curva  $M = M_{r,\text{lim}}$  a pulsazioni inferiori alla  $\omega_c$  (alla quale viene letto  $m_\varphi$ ), la  $W_y(j\omega)$  presenta  $M_r > M_{r,\text{lim}}$  anche quando  $m_\varphi > m_{\varphi,\text{lim}}$

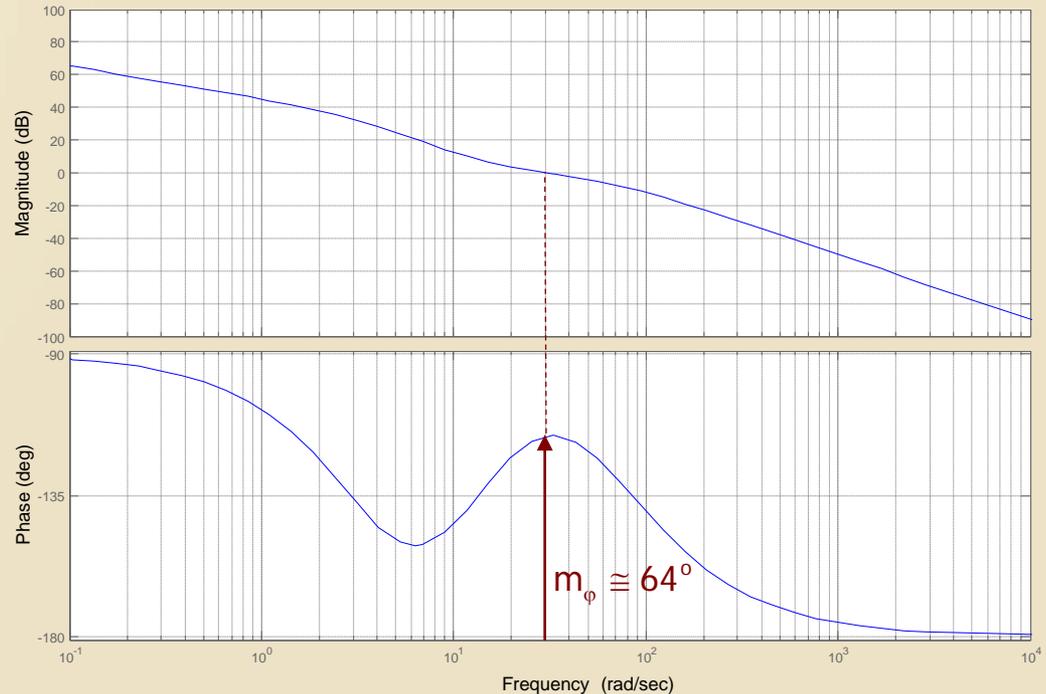
## Un esempio (1/3)

$$F(s) = \frac{2(s+5)(s+12)}{s(s+4)(s^2+7.2s+16)}; \quad C(s) = 100 \frac{(1+0.07s)^2}{(1+0.0175s)^2}$$

Si vorrebbe  
ottenere in  
catena chiusa:  
 $M_r < 2$  dB

DdB della fdt  
d'anello:

$$G_a(s) = C(s)F(s)$$



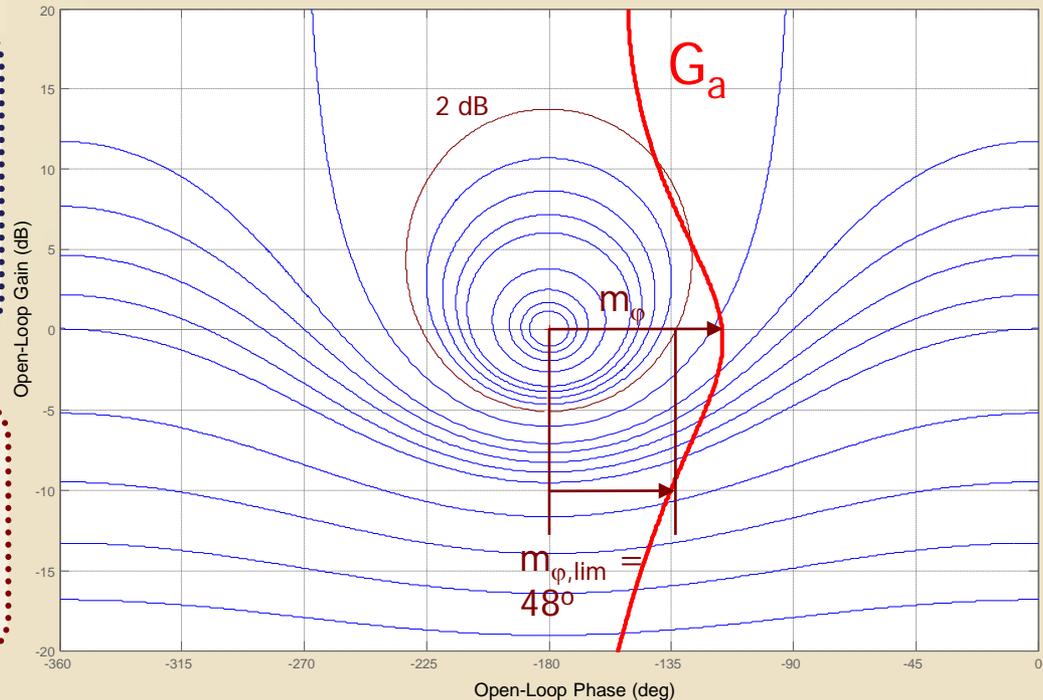
## Un esempio (2/3)

$$F(s) = \frac{2(s+5)(s+12)}{s(s+4)(s^2+7.2s+16)}; \quad C(s) = 100 \frac{(1+0.07s)^2}{(1+0.0175s)^2}$$

$m_\phi$  soddisfa la condizione necessaria per avere  $M_r < 2$  dB:

$$m_\phi > 48^\circ$$

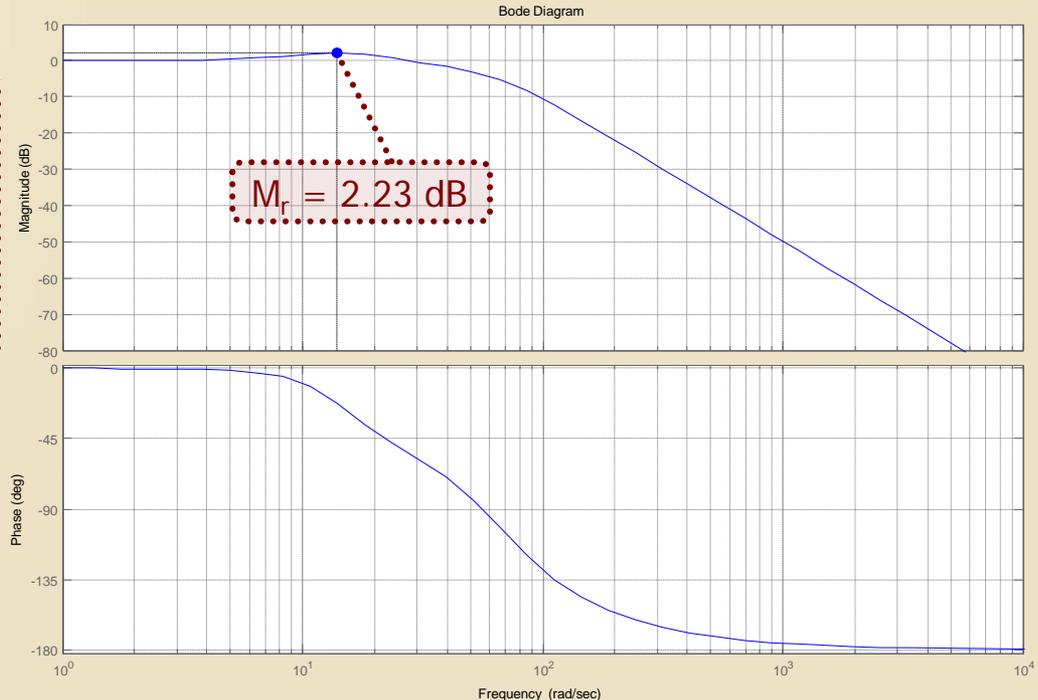
Nonostante ciò, il DdNic di  $G_a(j\omega)$  interseca la curva  $M = 2$  dB



## Un esempio (3/3)

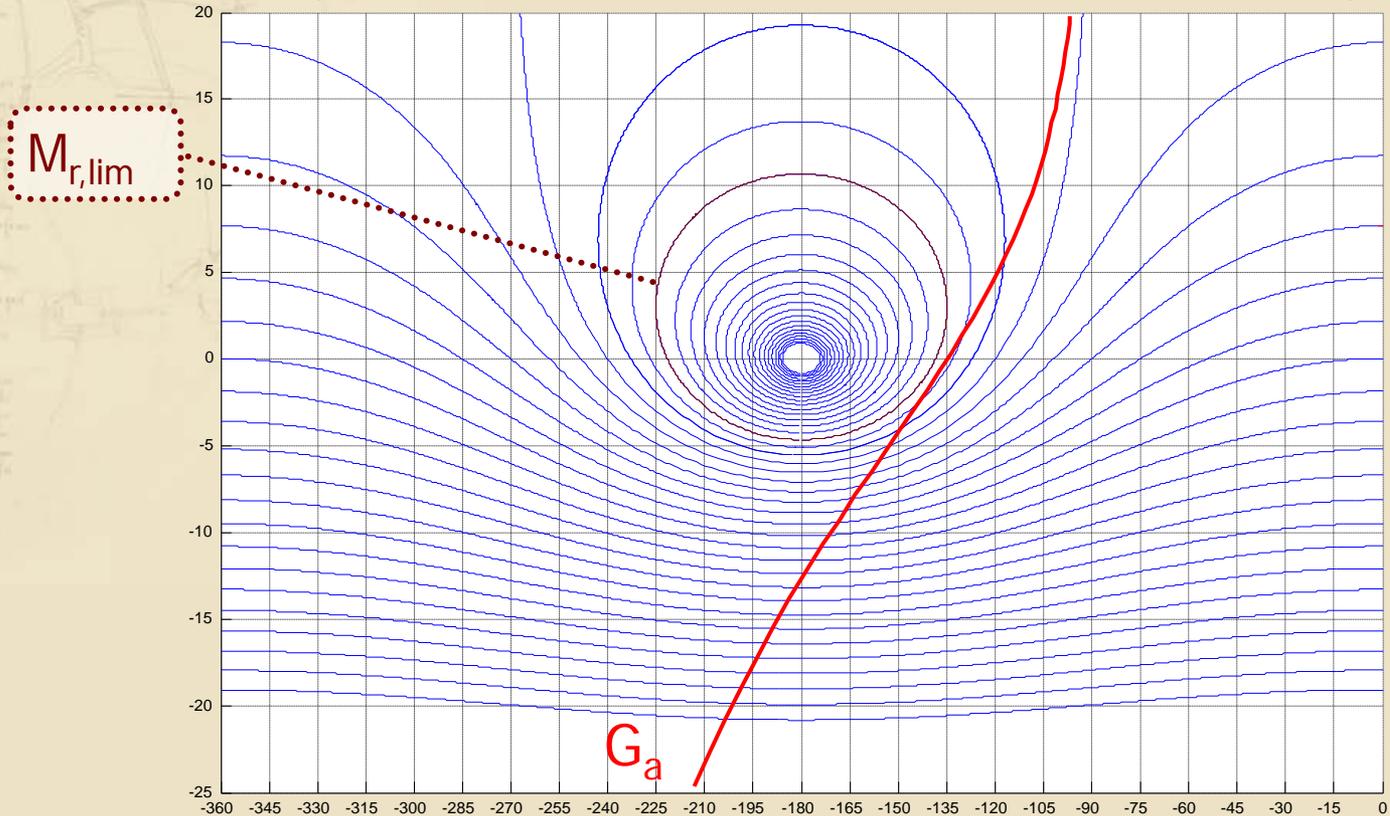
$$F(s) = \frac{2(s+5)(s+12)}{s(s+4)(s^2+7.2s+16)}; \quad C(s) = 100 \frac{(1+0.07s)^2}{(1+0.0175s)^2}$$

**Il picco di risonanza**  
della fdt in  
catena chiusa è  
superiore a  
**2 dB**



# Legame fra $M_r$ e $m_G$ (1/4)

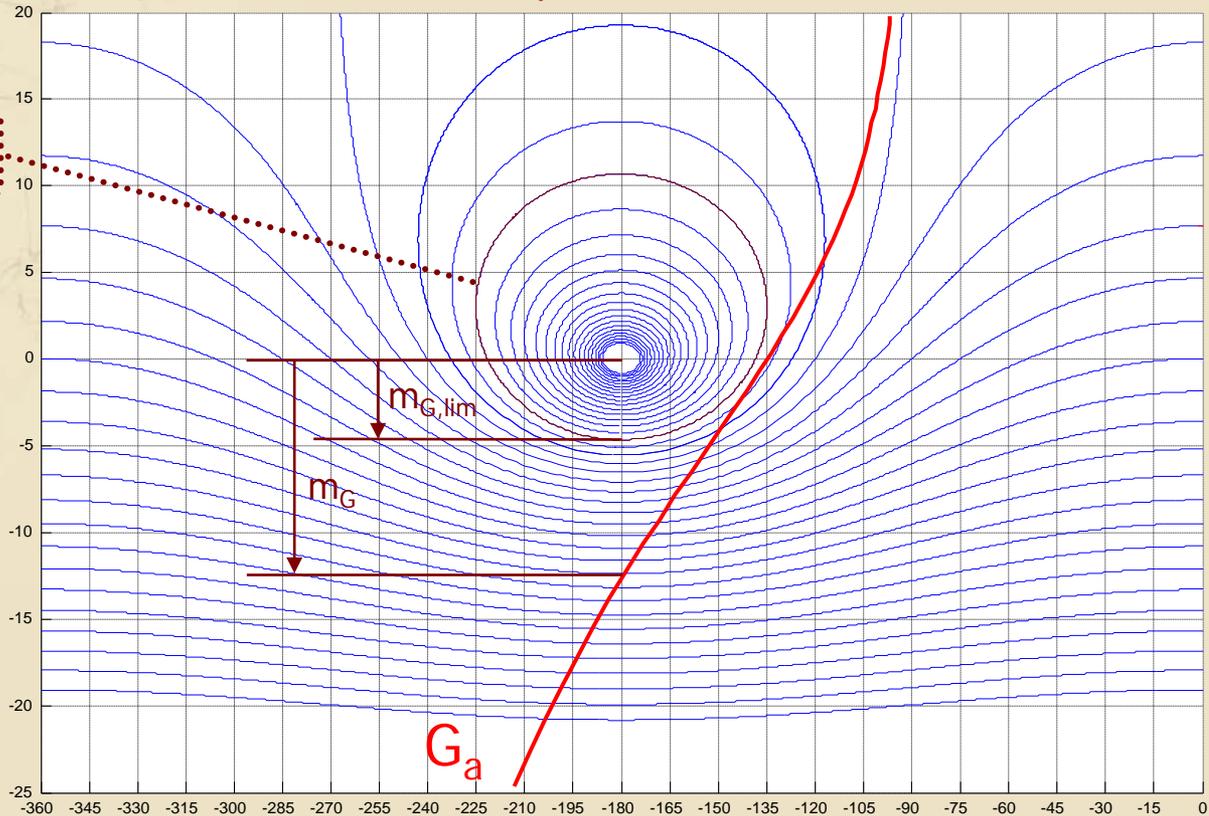
►  $M < M_{r,lim} \Rightarrow$  DdNic di  $G_a$  **esterno** alla curva  $M_{r,lim}$

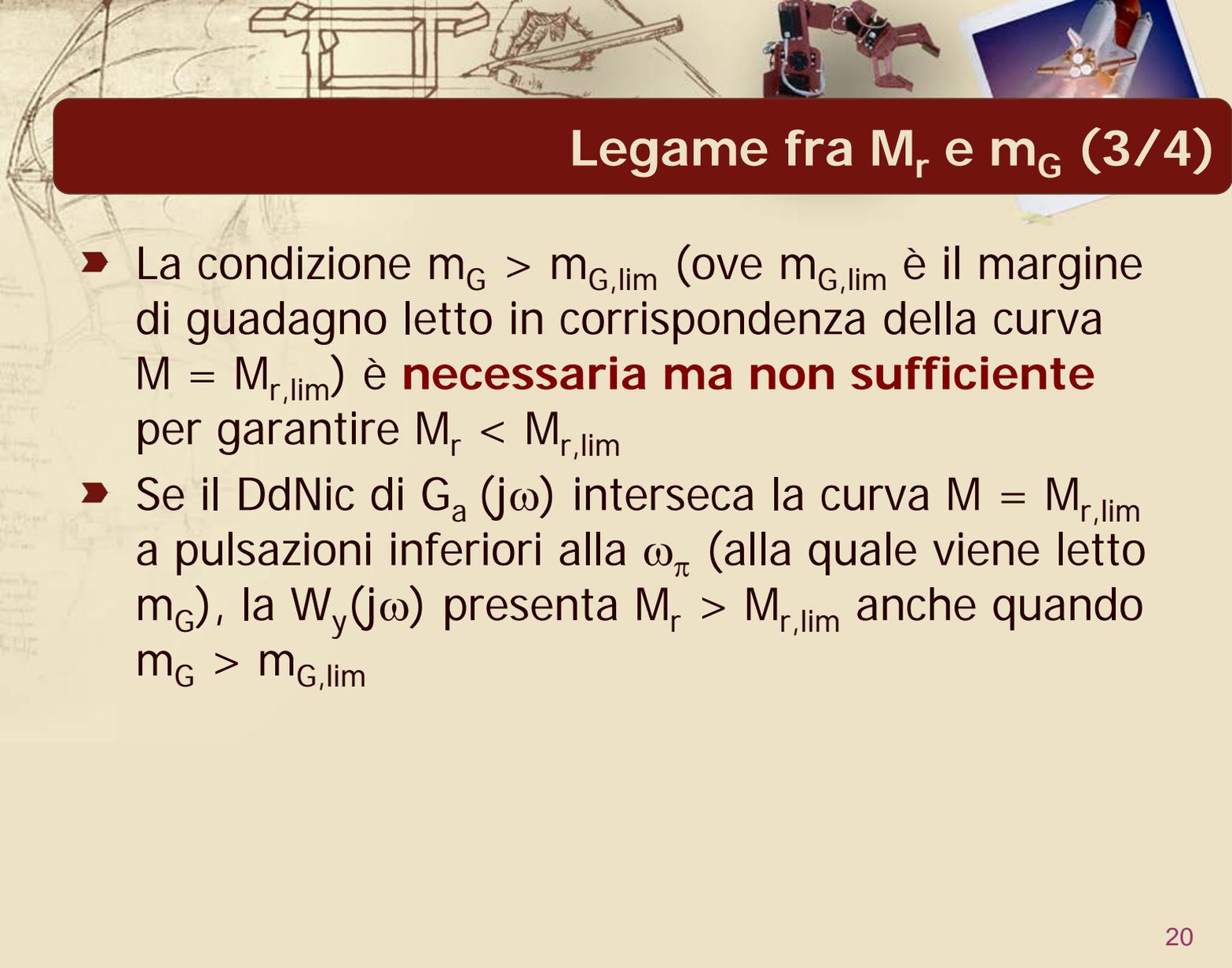


## Legame fra $M_r$ e $m_G$ (2/4)

►  $M < M_{r,lim} \Rightarrow m_G > m_{G,lim}$

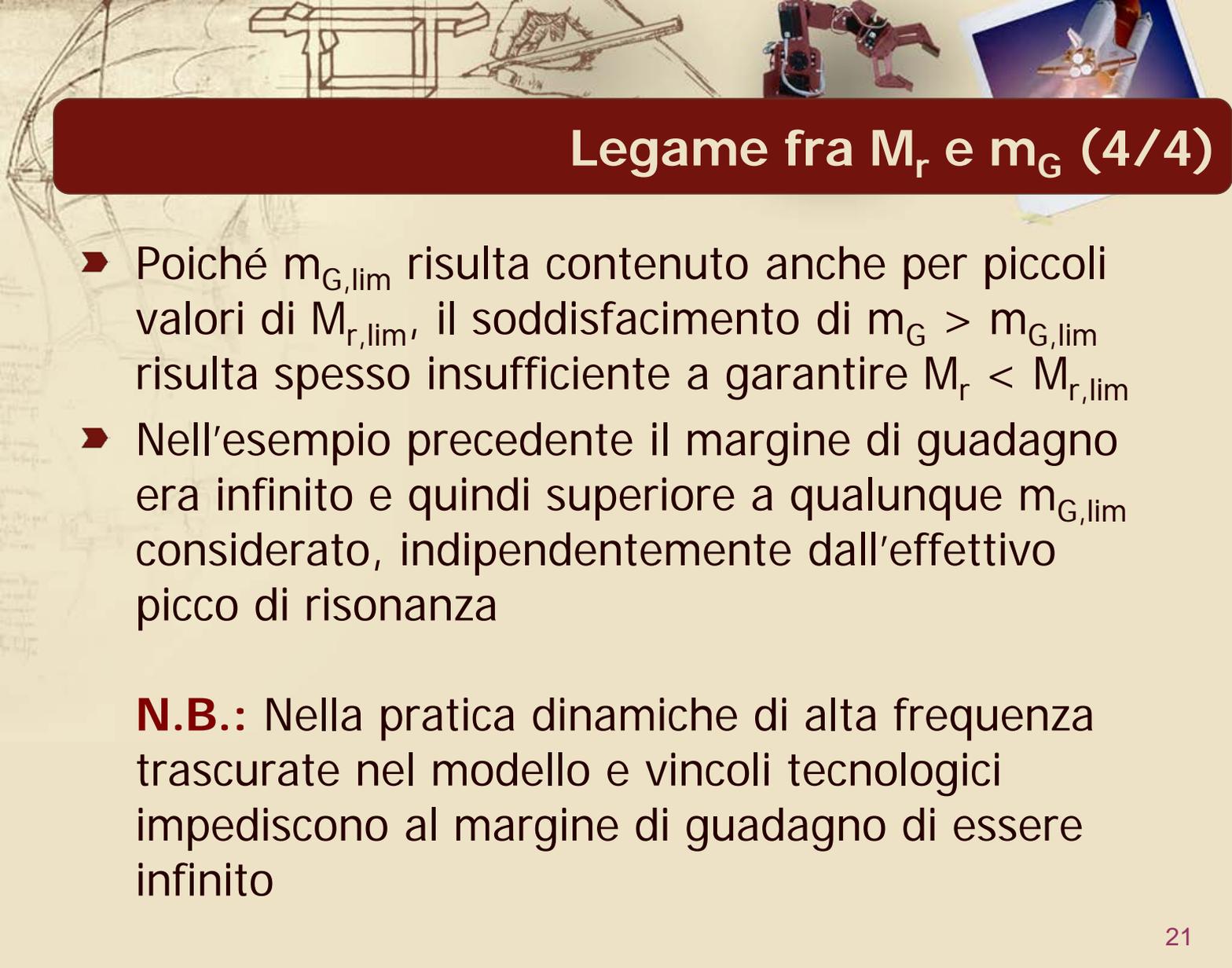
$M_{r,lim}$





## Legame fra $M_r$ e $m_G$ (3/4)

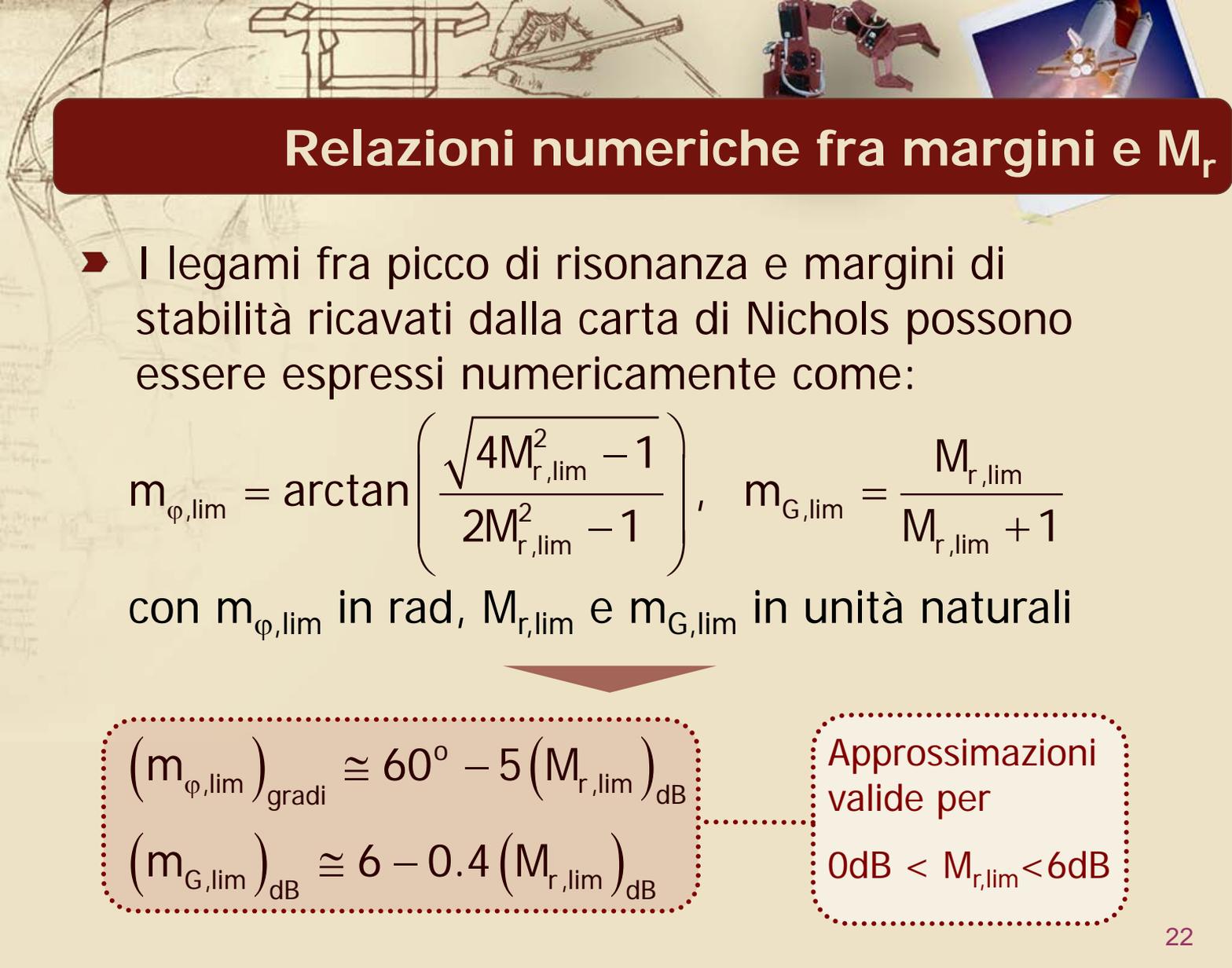
- La condizione  $m_G > m_{G,\text{lim}}$  (ove  $m_{G,\text{lim}}$  è il margine di guadagno letto in corrispondenza della curva  $M = M_{r,\text{lim}}$ ) è **necessaria ma non sufficiente** per garantire  $M_r < M_{r,\text{lim}}$
- Se il DdNic di  $G_a(j\omega)$  interseca la curva  $M = M_{r,\text{lim}}$  a pulsazioni inferiori alla  $\omega_\pi$  (alla quale viene letto  $m_G$ ), la  $W_y(j\omega)$  presenta  $M_r > M_{r,\text{lim}}$  anche quando  $m_G > m_{G,\text{lim}}$



## Legame fra $M_r$ e $m_G$ (4/4)

- Poiché  $m_{G,lim}$  risulta contenuto anche per piccoli valori di  $M_{r,lim}$ , il soddisfacimento di  $m_G > m_{G,lim}$  risulta spesso insufficiente a garantire  $M_r < M_{r,lim}$
- Nell'esempio precedente il margine di guadagno era infinito e quindi superiore a qualunque  $m_{G,lim}$  considerato, indipendentemente dall'effettivo picco di risonanza

**N.B.:** Nella pratica dinamiche di alta frequenza trascurate nel modello e vincoli tecnologici impediscono al margine di guadagno di essere infinito



## Relazioni numeriche fra margini e $M_r$

- I legami fra picco di risonanza e margini di stabilità ricavati dalla carta di Nichols possono essere espressi numericamente come:

$$m_{\varphi, \text{lim}} = \arctan \left( \frac{\sqrt{4M_{r, \text{lim}}^2 - 1}}{2M_{r, \text{lim}}^2 - 1} \right), \quad m_{G, \text{lim}} = \frac{M_{r, \text{lim}}}{M_{r, \text{lim}} + 1}$$

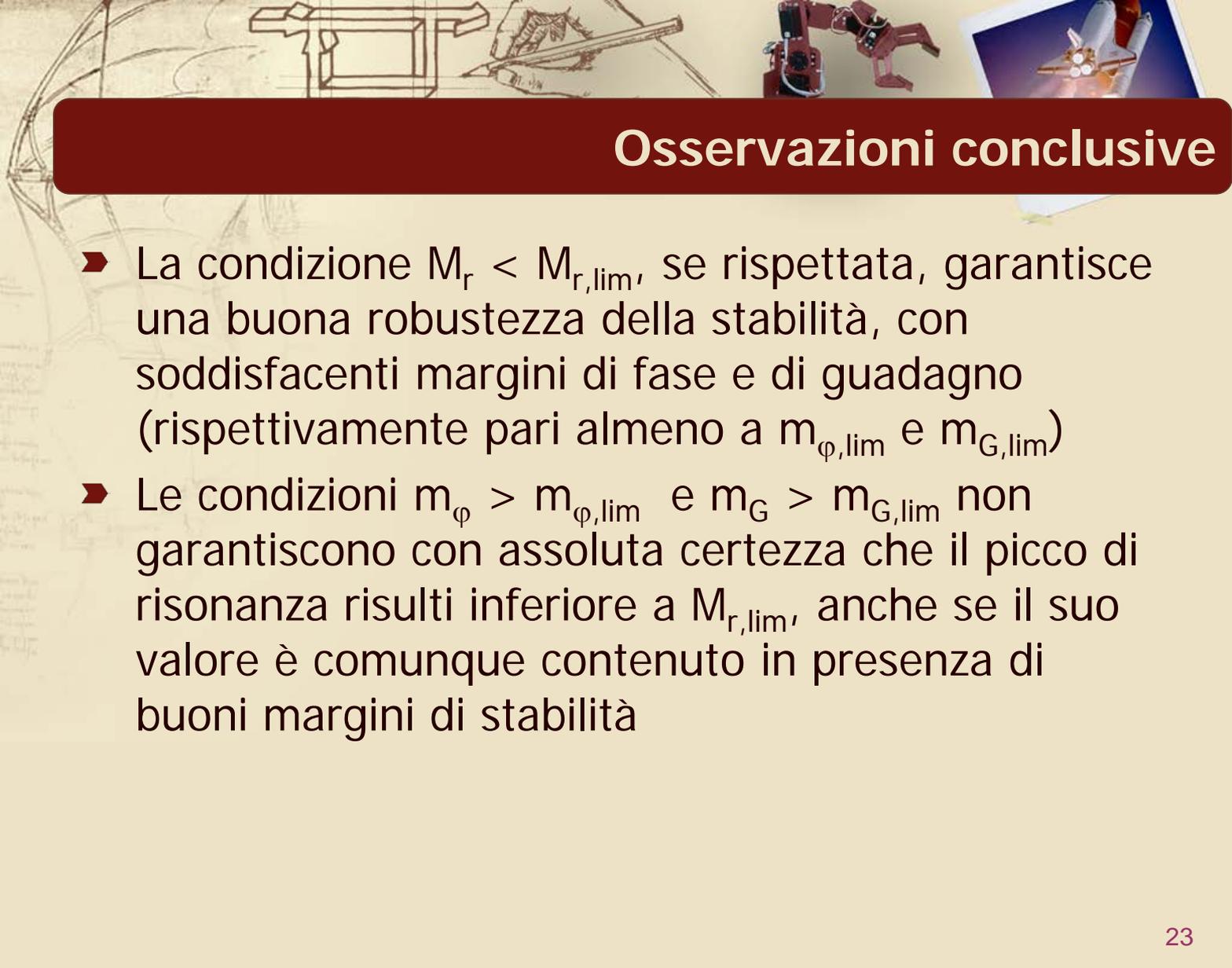
con  $m_{\varphi, \text{lim}}$  in rad,  $M_{r, \text{lim}}$  e  $m_{G, \text{lim}}$  in unità naturali

$$(m_{\varphi, \text{lim}})_{\text{gradi}} \cong 60^\circ - 5 (M_{r, \text{lim}})_{\text{dB}}$$

$$(m_{G, \text{lim}})_{\text{dB}} \cong 6 - 0.4 (M_{r, \text{lim}})_{\text{dB}}$$

Approssimazioni  
valide per

$$0\text{dB} < M_{r, \text{lim}} < 6\text{dB}$$



## Osservazioni conclusive

- La condizione  $M_r < M_{r,lim}$ , se rispettata, garantisce una buona robustezza della stabilità, con soddisfacenti margini di fase e di guadagno (rispettivamente pari almeno a  $m_{\varphi,lim}$  e  $m_{G,lim}$ )
- Le condizioni  $m_{\varphi} > m_{\varphi,lim}$  e  $m_G > m_{G,lim}$  non garantiscono con assoluta certezza che il picco di risonanza risulti inferiore a  $M_{r,lim}$ , anche se il suo valore è comunque contenuto in presenza di buoni margini di stabilità