Quaternioni

Basilio Bona

DAUIN-Politecnico di Torino

2008

Introduzione

I *quaternioni* furono “scoperti” nel 1843 da Hamilton, che cercava di trovare un sistema di numeri che generalizzasse allo spazio tridimensionale i numeri complessi e il loro significato di operatori di rotazione nel piano.

Il generico quaternione verrà identificato con il simbolo q.

Definizione

Il quaternione è un elemento dello spazio lineare $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ a quattro dimensioni, definito sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, con base $\{1 \;\; i \;\; j \;\; k\}$.

i, j e k sono numeri *ipercomplessi* che soddisfano la seguente legge di moltiplicazione *anticommutativa*

$$
\begin{array}{l}
i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\
ij = -ji = k \\
jk = -kj = i \\
ki = -ik = j
\end{array}
\tag{1}
$$

Si è voluto indicare i numeri ipercomplessi con i simboli i, j e k per marcare la loro differenza rispetto ai versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$

Definizione

Il *quaternione* $\mathrm{q} \in \mathbb{H}$ è definito come una combinazione lineare espressa nella base $\{1 \;\; i \;\; j \;\; k\}$:

$$\mathrm{q} = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{2}$$

dove i coefficienti $\{q_i\}_{i=0}^{3}$ sono reali.

In analogia con i numeri complessi, dove $c = a + jb$ è rappresentabile da una coppia di reali, (a, b), il generico quaternione è rappresentabile da una quadrupla di reali, (q_0, q_1, q_2, q_3).

Definizione

Il quaternione viene anche definito come il "numero complesso" i cui coefficienti sono due numeri complessi, ossia

$$\mathrm{q} = c_1 + jc_2,$$

dove $c_1 = q_0 + kq_3$ e $c_2 = q_2 + kq_1$.

Perciò, considerando le relazioni (1), si ha:

$$\mathrm{q} = c_1 + jc_2 = q_0 + kq_3 + jq_2 + jkq_1 = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k.$$

Analogamente ai numeri complessi che sono formati da una parte reale e da una parte immaginaria, i quaternioni sono formati da una parte reale e da una parte *vettoriale*.

Si indica con q_r la *parte reale* del quaternione, definita da $q_r = q_0$, e con $\mathbf{q}_v$ la *parte immaginaria* o *vettoriale*, definita da $\mathbf{q}_v = q_1 i + q_2 j + q_3 k$.

Definizione

Si scrive dunque $\mathrm{q} = (q_r,\, \mathbf{q}_v)$ oppure $\mathrm{q} = q_r + \mathbf{q}_v$; notate che non è stato usato il segno di trasposto per la parte vettoriale $\mathbf{q}_v$ in quanto la definizione convenzionale di "parte vettoriale di un quaternione" è una riga.

Volendo usare le convenzioni per cui i vettori sono vettori colonna, potremmo scrivere $\mathrm{q} = (q_r,\, \mathbf{q}_v^{\mathsf{T}})$.

I quaternioni sono entità matematiche generali, che comprendono i numeri reali

$$r = (r,\, 0,\, 0,\, 0)\,, \quad r \in \mathbb{R}$$

i numeri complessi

$$a + j\,b = (a,\, 0,\, b,\, 0)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

ed i vettori in $\mathbb{R}^3$ (con alcuni pericoli di interpretazione)

$$\mathbf{v} = (0,\, v_1,\, v_2,\, v_3)\,, \quad v_i \in \mathbb{R}.$$

In quest'ultimo caso si interpretano gli elementi $\{i \quad j \quad k\}$ come i versori $\{\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}\}$ di un sistema di riferimento cartesiano destrorso.

Definizione

Le regole di moltiplicazione tra gli elementi i, j, k hanno le stesse proprietà del prodotto vettoriale o esterno tra i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$
\begin{array}{rcl}
ij = k & \Leftrightarrow & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \\
ji = -k & \Leftrightarrow & -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \\
 & \text{ecc.} &
\end{array}
$$

Nel seguito faremo uso di tutte le notazioni alternative per indicare i quaternioni; scriveremo dunque

$$
\mathrm{q} = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = (q_r, \mathbf{q}_v) = q_r + \mathbf{q}_v = (q_0, q_1, q_2, q_3) \tag{3}
$$

per indicare il fatto che il quaternione può essere visto in tre modi distinti: a) come un numero ipercomplesso definito su una base composta da un reale e tre immaginari; b) come la somma di una parte scalare e una parte vettoriale; e c) come una quadrupla di numeri reali.

Algebra dei quaternioni

Dato un quaternione $\mathrm{q} = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_r + \mathbf{q}_v = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, sono definite le seguenti proprietà:

- esiste il quaternione *nullo* o *zero*, definito come

$$0 = 01 + 0i + 0j + 0k = (0, \mathbf{0}) = 0 + \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0) \tag{4}$$

- esiste il *quaternione coniugato*, indicato con il simbolo q^*, che ha la stessa parte reale di q e parte vettoriale opposta:

$$\mathrm{q}^* = q_0 - (q_1 i + q_2 j + q_3 k) = (q_r, \mathbf{q}_v) = q_r - \mathbf{q}_v = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3) \tag{5}$$

  Il coniugato soddisfa alla proprietà $(\mathrm{q}^*)^* = \mathrm{q}$.

Algebra dei quaternioni

- esiste una funzione non negativa, chiamata *norma del quaternione* q e indicata con il simbolo $\|\mathrm{q}\|$, definita come

$$\|\mathrm{q}\| = \sqrt{\mathrm{q}\mathrm{q}^*} = \sqrt{\mathrm{q}^*\mathrm{q}} = \sqrt{\sum_{\ell=0}^{3} q_\ell^2} = \sqrt{q_0^2 + \mathbf{q}_v^\mathsf{T}\mathbf{q}_v} \tag{6}$$

  Un quaternione con norma $\|\mathrm{q}\| = 1$ è chiamato *quaternione unitario*. Il quaternione q e il suo coniugato q^* hanno la stessa norma

$$\|\mathrm{q}\| = \|\mathrm{q}^*\| \tag{7}$$

Il quaternione

$$\mathrm{q}_v = 01 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = (0, \mathbf{q}_v) = 0 + \mathbf{q}_v = (0, q_1, q_2, q_3),$$

che ha parte reale nulla, viene chiamato *quaternione puro* o *vettore*. Il coniugato di un quaternione puro q_v risulta essere l'opposto del quaternione puro originale

$$\mathrm{q}_v^* = -\mathrm{q}_v \tag{8}$$

Algebra dei quaternioni

Dati due quaternioni

$$\mathsf{h} = h_0 1 + h_1 i + h_2 j + h_3 k = (h_r, \mathbf{h}_v) = h_r + \mathbf{h}_v = (h_0, h_1, h_2, h_3)$$

e

$$\mathsf{g} = g_0 1 + g_1 i + g_2 j + g_3 k = (g_r, \mathbf{g}_v) = g_r + \mathbf{g}_v = (g_0, g_1, g_2, g_3)$$

possiamo definire le seguenti operazioni

Somma

Somma o addizione $\mathsf{h} + \mathsf{g}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{h} + \mathsf{g} &= (h_0 + g_0)1 + (h_1 + g_1)i + (h_2 + g_2)j + (h_3 + g_3)k \\
&= ((h_r + g_r), (\mathbf{h}_v + \mathbf{g}_v)) \\
&= (h_r + g_r) + (\mathbf{h}_v + \mathbf{g}_v) \\
&= (h_0 + g_0, h_1 + g_1, h_2 + g_2, h_3 + g_3)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Differenza

Differenza o sottrazione

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h} - \mathrm{g} &= (h_0 - g_0)1 + (h_1 - g_1)i + (h_2 - g_2)j + (h_3 - g_3)k \\
&= ((h_r - g_r), (\mathbf{h}_v - \mathbf{g}_v)) \\
&= (h_r - g_r) + (\mathbf{h}_v - \mathbf{g}_v) \\
&= (h_0 - g_0, h_1 - g_1, h_2 - g_2, h_3 - g_3)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Prodotto

$$
\begin{aligned}
\text{hg} &= (h_0 g_0 - h_1 g_1 - h_2 g_2 - h_3 g_3)1 + \\
&\quad (h_1 g_0 + h_0 g_1 - h_3 g_2 + h_2 g_3)i + \\
&\quad (h_2 g_0 + h_3 g_1 + h_0 g_2 - h_1 g_3)j + \\
&\quad (h_3 g_0 - h_2 g_1 + h_1 g_2 + h_0 g_3)k \\
&= (h_r g_r - \mathbf{h}_v \cdot \mathbf{g}_v,\, h_r \mathbf{g}_v + g_r \mathbf{h}_v + \mathbf{h}_v \times \mathbf{g}_v)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

dove $\mathbf{h}_v \cdot \mathbf{g}_v$ è il prodotto scalare

$$
\mathbf{h}_v \cdot \mathbf{g}_v = \sum_i h_{vi} g_{vi} = \mathbf{h}_v^{\mathsf{T}} \mathbf{g}_v = \mathbf{g}_v^{\mathsf{T}} \mathbf{h}_v
$$

definito in $\mathbb{R}^n$, dove n può essere qualsiasi, e $\mathbf{h}_v \times \mathbf{g}_v$ è il prodotto vettoriale (definito solamente in $\mathbb{R}^3$)

$$
\mathbf{h}_v \times \mathbf{g}_v = \begin{pmatrix} h_2 g_3 - h_3 g_2 \\ h_3 g_1 - h_1 g_3 \\ h_1 g_2 - h_2 g_1 \end{pmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{h}_v)\mathbf{g}_v
$$

Prodotto

e

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

è una matrice antisimmetrica, funzione del generico vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Il prodotto tra quaternioni non è commutativo, in quanto, essendo $\mathbf{g}_v \times \mathbf{h}_v = -\mathbf{h}_v \times \mathbf{g}_v$, risulta

$$\mathrm{gh} = (h_r g_r - \mathbf{h}_v \cdot \mathbf{g}_v,\, h_r \mathbf{g}_v + g_r \mathbf{h}_v - \mathbf{h}_v \times \mathbf{g}_v) \neq \mathrm{hg};$$

si nota che la parte reale rimane identica, mentre la parte vettoriale cambia. Il prodotto commuta soltanto se $\mathbf{h}_v \times \mathbf{g}_v = \mathbf{0}$, cioè quando le parti vettoriali sono parallele.

Altre proprietà del prodotto sono elencate nei lucidi successivi

Prodotto

- proprietà associativa:
$$(\mathrm{gh})\mathrm{p} = \mathrm{g}(\mathrm{hp})$$
- prodotto per lo scalare unitario:
$$1\mathrm{q} = \mathrm{q}1 = (1, \mathbf{0})(q_r, \mathbf{q}_v) = (1q_r, 1\mathbf{q}_v) = (q_r, \mathbf{q}_v)$$
- prodotto per un reale λ:
$$\lambda \mathrm{q} = (\lambda, \mathbf{0})(q_r, \mathbf{q}_v) = (\lambda q_r, \lambda \mathbf{q}_v)$$
- bilinearità, con λ_1, λ_2 reali:
$$\begin{aligned} \mathrm{g}(\lambda_1 \mathrm{h}_1 + \lambda_2 \mathrm{h}_2) &= \lambda_1 \mathrm{gh}_1 + \lambda_2 \mathrm{gh}_2 \\ (\lambda_1 \mathrm{g}_1 + \lambda_2 \mathrm{g}_2)\mathrm{h} &= \lambda_1 \mathrm{g}_1 \mathrm{h} + \lambda_2 \mathrm{g}_2 \mathrm{h} \end{aligned}$$

Prodotto

Il prodotto può essere scritto anche in forma matriciale:

$$\mathrm{hg} = \begin{pmatrix} h_0 & -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ h_1 & h_0 & -h_3 & h_2 \\ h_2 & h_3 & h_0 & -h_1 \\ h_3 & -h_2 & h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 & -\mathbf{h}_v^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{h}_v & h_0\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{h}_v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}_L(\mathrm{h})\mathrm{g} \tag{14}$$

oppure

$$\mathrm{hg} = \begin{pmatrix} g_0 & -g_1 & -g_2 & -g_3 \\ g_1 & g_0 & g_3 & -g_2 \\ g_2 & -g_3 & g_0 & g_1 \\ g_3 & g_2 & -g_1 & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 & -\mathbf{g}_v^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{g}_v & g_0\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{g}_v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}_R(\mathrm{g})\mathrm{h} \tag{15}$$

Prodotto

Il coniugato del prodotto tra quaternioni soddisfa la proprietà:

$$(\mathrm{gh})^* = \mathrm{h}^*\mathrm{g}^*. \tag{16}$$

La norma del prodotto soddisfa la proprietà

$$\|\mathrm{hg}\| = \|\mathrm{h}\| \, \|\mathrm{g}\| \, . \tag{17}$$

Quoziente

Quoziente o divisione Poichè il prodotto tra due quaternioni non è commutativo, bisogna distinguere tra quoziente destro e quoziente sinistro.

Dati due quaternioni h e p, si dice *quoziente sinistro* di p per h il quaternione q_s per cui

$$\mathsf{h}\mathsf{q}_s = \mathsf{p}$$

mentre si dice *quoziente destro* di p per h il quaternione q_d per cui

$$\mathsf{q}_d\mathsf{h} = \mathsf{p}$$

Risulta

$$\mathsf{q}_s = \frac{\mathsf{h}^*}{\|\mathsf{h}\|^2}\mathsf{p}; \qquad \mathsf{q}_d = \mathsf{p}\frac{\mathsf{h}^*}{\|\mathsf{h}\|^2}$$

Inverso

Quaternione inverso

Dato un quaternione q, in linea di principio dovremmo definire l'inverso sinistro q_s^{-1} e l'inverso destro q_d^{-1}, definiti da

$$\mathsf{q}\mathsf{q}_s^{-1} = 1 = (1,0,0,0); \qquad \mathsf{q}_d^{-1}\mathsf{q} = 1 = (1,0,0,0)$$

Poiché dalla (6) si ha che $\mathsf{q}\mathsf{q}^* = \mathsf{q}^*\mathsf{q} = \|\mathsf{q}\|^2 = \|\mathsf{q}\| \, \|\mathsf{q}^*\|$, potremo scrivere

$$\frac{\mathsf{q}}{\|\mathsf{q}\|}\frac{\mathsf{q}^*}{\|\mathsf{q}^*\|} = \frac{\mathsf{q}^*}{\|\mathsf{q}^*\|}\frac{\mathsf{q}}{\|\mathsf{q}\|} = 1 = (1,0,0,0) \qquad (18)$$

risulta che inverso destro e inverso sinistro coincidono e otteniamo

$$\mathsf{q}_s^{-1} = \mathsf{q}_d^{-1} = \mathsf{q}^{-1} = \frac{\mathsf{q}^*}{\|\mathsf{q}\|^2} \qquad (19)$$

Inverso

È immediato osservare che, per un quaternione unitario, l'inverso coincide con il coniugato

$$q^{-1} = q^*, \quad \|q\| = 1 \tag{20}$$

e per un quaternione puro unitario, che coincide con un versore, vale

$$q_v^{-1} = q_v^* = -q_v. \tag{21}$$

L'inverso soddisfa le proprietà

$$(q^{-1})^{-1} = q; \qquad (pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$$

Funzione di selezione

È utile definire la *funzione di selezione*

$$\rho(\mathrm{q}) = q_0 = q_r$$

che “estrae” la parte reale del quaternione.

Questa funzione ha la proprietà che

$$\rho(\mathrm{q}) = \frac{\mathrm{q} + \mathrm{q}^*}{2}.$$

Prodotto di Hamilton

Osserviamo che, moltiplicando due quaternioni puri
$\mathrm{u}_v = (0, \mathbf{u}_v) = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ e $\mathrm{v}_v = (0, \mathbf{v}_v) = v_1 i + v_2 j + v_3 k$, cioè due vettori, si ottiene

$$\mathrm{u}_v \mathrm{v}_v = (-\mathbf{u}_v \cdot \mathbf{v}_v, \mathbf{u} \times \mathbf{v}). \tag{22}$$

Di conseguenza, con un leggero abuso di notazione, possiamo definire un nuovo prodotto tra vettori, detto *prodotto di Hamilton*, che soddisfa la seguente relazione:

$$\mathbf{uv} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \tag{23}$$

Questo prodotto implica però che $\mathbf{uu} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, ovvero che il quadrato di un vettore reale non nullo risulti negativo

Per questa ed altre ragioni, i quaternioni furono abbandonati in favore di altre notazioni vettoriali più “convenienti”.

Tuttavia il prodotto tra quaternioni svolge un ruolo importante nella rappresentazione delle rotazioni.

Quaternioni unitari

Prima di passare a descrivere le relazioni tra quaternioni e rotazioni, analizziamo più in dettaglio le proprietà dei quaternioni unitari, che identifichiamo con il simbolo u.

Come abbiamo già detto, un quaternione unitario è quello per cui $\|\mathsf{u}\| = 1$; l'inverso di un quaternione unitario e il prodotto di due quaternioni unitari, per le proprietà (17) e (20), risultano ancora unitari.

Un quaternione unitario può essere rappresentato dalla relazione

$$\mathsf{u} = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta \tag{24}$$

dove $\mathbf{u}$ è un vettore a norma unitaria e θ è un angolo generico.

Va notata la somiglianza della (24) con l'analoga espressione di un numero complesso unitario

$$c = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta.$$

Quaternioni unitari

L'analogia si estende anche all'espressione esponenziale $c = e^{\mathrm{j}\theta}$, a cui corrisponde per i quaternioni

$$\mathrm{u} = e^{\mathbf{u}\theta} = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta \tag{25}$$

dove l'esponenziale viene calcolato sostituendo simbolicamente il termine $\mathbf{u}\theta$ al termine x dello sviluppo in serie di e^x e ricordando che $\mathrm{uu} = -1$.

La (25) mostra l'identità formale tra un quaternione unitario u e l'esponenziale di un versore unitario $\mathbf{u}$, moltiplicato scalarmente per un angolo θ.

Quaternioni unitari

Dalla (25) si deduce la definizione di potenza di un quaternione unitario

$$\mathrm{u}^t = (\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta)^t = e^{\mathbf{u}\theta t} = \cos(\theta t) + \mathbf{u}\sin(\theta t) \tag{26}$$

e di logaritmo di un quaternione unitario

$$\log \mathrm{u} = \log(\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta) = \log(e^{\mathbf{u}\theta}) = \mathbf{u}\theta \tag{27}$$

Va notato che la non commutatività del prodotto di quaternioni impedisce l'uso delle identità standard per calcolare esponenziali e logaritmi.

Ad esempio, $e^{\mathrm{u}_1}e^{\mathrm{u}_2}$ non è necessariamente uguale a $e^{\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2}$, come pure $\log(\mathrm{u}_1\mathrm{u}_2)$ non è necessariamente uguale a $\log(\mathrm{u}_1)+\log(\mathrm{u}_2)$.

Quaternioni e rotazioni

Vediamo ora come sia possibile mettere in relazione una rotazione con un quaternione unitario e viceversa.

Dato un quaternione unitario

$$\mathrm{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3) = (u_0, \mathbf{u}) = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta \tag{28}$$

questo rappresenta la rotazione di un angolo 2θ intorno all'asse rappresentato del versore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$

Viceversa, data una rotazione di angolo θ intorno all'asse individuato dal versore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, il quaternione unitario

$$\mathrm{u} = \left(\cos\frac{\theta}{2}, u_1\sin\frac{\theta}{2}, u_2\sin\frac{\theta}{2}, u_3\sin\frac{\theta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2} \tag{29}$$

rappresenta la medesima rotazione.

Quaternioni e rotazioni

Sappiamo che una rotazione rigida nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ può venire rappresentata dalla *matrice di rotazione* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, che ha la proprietà di essere ortonormale e a determinante unitario positivo, $\det(\mathbf{R}) = +1$.

Potremo allora associare ad ogni matrice di rotazione un quaternione unitario e viceversa, indicando questa corrispondenza con il simbolo $\mathbf{R}(\mathrm{u})$.

Ogni quaternione unitario rappresenta una rotazione nello spazio tridimensionale, così come ogni numero complesso unitario rappresenta una rotazione nel piano.

Per passare da un quaternione $\mathrm{u} = (u_0, \mathbf{u})$ alla matrice corrispondente $\mathbf{R}(\mathrm{u})$, si applica la relazione

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}(\mathrm{u}) = (u_0^2 - \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\mathsf{T} - 2u_0\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \\
&\qquad \begin{pmatrix} u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 & 2\,(u_1 u_2 - u_3 u_0) & 2\,(u_1 u_3 + u_2 u_0) \\ 2\,(u_1 u_2 + u_3 u_0) & u_0^2 - u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 & 2\,(u_2 u_3 - u_1 u_0) \\ 2\,(u_1 u_3 - u_2 u_0) & 2\,(u_2 u_3 + u_1 u_0) & u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

dove $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ è già stata definita.

Inversamente, per passare dagli elementi r_{ij} della matrice $\mathbf{R}(\mathrm{u})$ al corrispondente quaternione u, si usa la relazione seguente:

$$\begin{aligned} u_0 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 + r_{11} + r_{22} + r_{33})} \\ u_1 &= \frac{1}{4u_0}(r_{32} - r_{23}) \\ u_2 &= \frac{1}{4u_0}(r_{13} - r_{31}) \\ u_3 &= \frac{1}{4u_0}(r_{21} - r_{12}) \end{aligned} \tag{31}$$

In alternativa

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{(1 + r_{11} + r_{22} + r_{33})} \\
u_1 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(r_{32} - r_{23})\sqrt{(1 + r_{11} - r_{22} - r_{33})} \\
u_2 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(r_{13} - r_{31})\sqrt{(1 - r_{11} + r_{22} - r_{33})} \\
u_3 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(r_{21} - r_{12})\sqrt{(1 - r_{11} - r_{22} + r_{33})}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

dove $\mathrm{sign}(x)$ è la funzione segno di x.

Quaternioni e rotazioni

Le rotazioni elementari intorno ai tre assi di un sistema di riferimento cartesiano, $\mathbf{R}(\mathbf{i},\alpha)$, $\mathbf{R}(\mathbf{j},\beta)$ e $\mathbf{R}(\mathbf{k},\gamma)$, corrispondono ai seguenti *quaternioni elementari*

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{i},\alpha) &\rightarrow \mathrm{u}_x = \left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2},\ 0,\ 0\right)\\
\mathbf{R}(\mathbf{j},\beta) &\rightarrow \mathrm{u}_y = \left(\cos\frac{\beta}{2},\ 0,\ \sin\frac{\beta}{2},\ 0\right)\\
\mathbf{R}(\mathbf{k},\gamma) &\rightarrow \mathrm{u}_z = \left(\cos\frac{\gamma}{2},\ 0,\ 0,\ \sin\frac{\gamma}{2}\right)
\end{aligned} \tag{33}$$

e quindi risulta anche che la “base vettoriale” dei quaternioni corrisponde alle diverse rotazioni elementari di 180° intorno agli assi principali:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i} = (0,\ 1,\ 0,\ 0) &\rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{i},\pi)\\
\mathrm{j} = (0,\ 0,\ 1,\ 0) &\rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{j},\pi)\\
\mathrm{k} = (0,\ 0,\ 0,\ 1) &\rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{k},\pi)
\end{aligned} \tag{34}$$

Quaternioni e rotazioni

Il lettore attento osserverà che, mentre il prodotto di quaternioni della base soddisfa le relazioni

$$\mathsf{ii} = \mathsf{jj} = \mathsf{kk} = \mathsf{ijk} = (-1,\ 0,\ 0,\ 0)\,,$$

l'analogo prodotto di rotazioni fornisce la rotazione identità:

$$\mathbf{R}(\mathbf{i},\pi)\mathbf{R}(\mathbf{i},\pi) = \mathbf{R}(\mathbf{j},\pi)\mathbf{R}(\mathbf{j},\pi) = \mathbf{R}(\mathbf{k},\pi)\mathbf{R}(\mathbf{k},\pi) = \mathbf{R}(\mathbf{i},\pi)\mathbf{R}(\mathbf{j},\pi)\mathbf{R}(\mathbf{k},\pi) = \mathbf{I} \tag{35}$$

a cui corrisponde il quaternione $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$; questa apparente discrepanza, pur essendo spiegabile, non verrà discussa.

Quaternioni e rotazioni

Vediamo ora alcune corrispondenze tra le operazioni con i quaternioni e le operazioni con le matrici di rotazione:

- **Prodotto di rotazioni**
  Date n rotazioni $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\cdots$, $\mathbf{R}_n$ ed i corrispondenti quaternioni unitari u_1, u_2, $\cdots$, u_n, la rotazione prodotto $\mathbf{R}(\mathrm{u}) = \mathbf{R}(\mathrm{u}_1)\mathbf{R}(\mathrm{u}_2)\cdots\mathbf{R}(\mathrm{u}_n)$ corrisponde al prodotto dei quaternioni unitari $\mathrm{u} = \mathrm{u}_1\mathrm{u}_2\cdots\mathrm{u}_n$, nell'ordine indicato.
- **Matrice trasposta**
  Data la rotazione $\mathbf{R}(\mathrm{u})$ ed il corrispondente quaternione unitario u, la matrice trasposta (che coincide con l'inversa) $\mathbf{R}^{\mathsf{T}}$ corrisponde al quaternione unitario coniugato (che coincide con l'inverso) u^*.

- **Rotazione di un vettore**
  Dato un vettore qualsiasi $\mathbf{x}$, a cui corrisponde il quaternione composto dalla sola parte vettoriale $\mathrm{u}_x = \left(0, \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\right) = (0, x_1, x_2, x_3)$ e data una rotazione $\mathbf{R}(\mathrm{u})$ a cui corrisponde il quaternione unitario u, il vettore ruotato $\mathbf{y} = \mathbf{R}(\mathrm{u})\mathbf{x}$ coincide con la parte vettoriale del quaternione prodotto $\mathrm{y} = (y_r, \mathbf{y}_v) = \mathrm{u}\mathrm{u}_x\mathrm{u}^*$, ovvero

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}(\mathrm{u})\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_v.$$

Quaternioni e rotazioni

Più in generale, se per esprimere il vettore **x** si usano le coordinate omogenee

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} wx_1 & wx_2 & wx_3 & w \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

e si definisce il quaternione x come

$$\mathrm{x} = (w, w\mathbf{x})$$

il prodotto $\mathrm{u}\mathrm{x}\mathrm{u}^*$ fornisce il quaternione y, definito come

$$\mathrm{y} = (w, w\mathbf{R}(\mathrm{u})\mathbf{x})$$

che permette di esprimere il vettore risultante **y**, in coordinate omogenee

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} wy_1 & wy_2 & wy_3 & w \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

- **Matrici prodotto**
  Il prodotto tra due quaternioni, godendo della proprietà di bilinearità, può essere rappresentato da operatori lineari (matrici).
  Dalla (14), osserviamo che il prodotto $\mathrm{qp} = \mathbf{F}_L(\mathrm{q})\mathrm{p}$ può essere interpretato come il *prodotto a sinistra* di q per p; analogamente il *prodotto a destra*, che vale pq, può essere espresso, considerando la (15), come $\mathrm{pq} = \mathbf{F}_R(\mathrm{q})\mathrm{p}$.

Quaternioni e rotazioni

Queste espressioni consentono poi di ricavare il prodotto $\mathsf{p}\mathsf{q}^*$ come $\mathbf{F}_R(\mathsf{q}^*)\mathsf{p}$ e successivamente il prodotto $\mathsf{q}\mathsf{p}\mathsf{q}^*$ come $\mathbf{F}_L(\mathsf{q})\mathbf{F}_R(\mathsf{q}^*)\mathsf{p} = \mathbf{Q}\mathsf{p}$, dove si è introdotta la matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}_L(\mathsf{q})\mathbf{F}_R(\mathsf{q}^*) =$$
$$\begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2\left(q_1q_2-q_3q_0\right) & 2\left(q_1q_3+q_2q_0\right) & 0 \\ 2\left(q_1q_2+q_3q_0\right) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2\left(q_2q_3-q_1q_0\right) & 0 \\ 2\left(q_1q_3-q_2q_0\right) & 2\left(q_2q_3+q_1q_0\right) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \|\mathsf{q}\|^2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Nelle applicazioni spaziali spesso si usano i quaternioni avendo "organizzato" le componenti in modo diverso da quello qui introdotto, ossia ponendo la parte reale come ultimo elemento del quaternione invece che come primo.