

## Fondamenti di Automatica

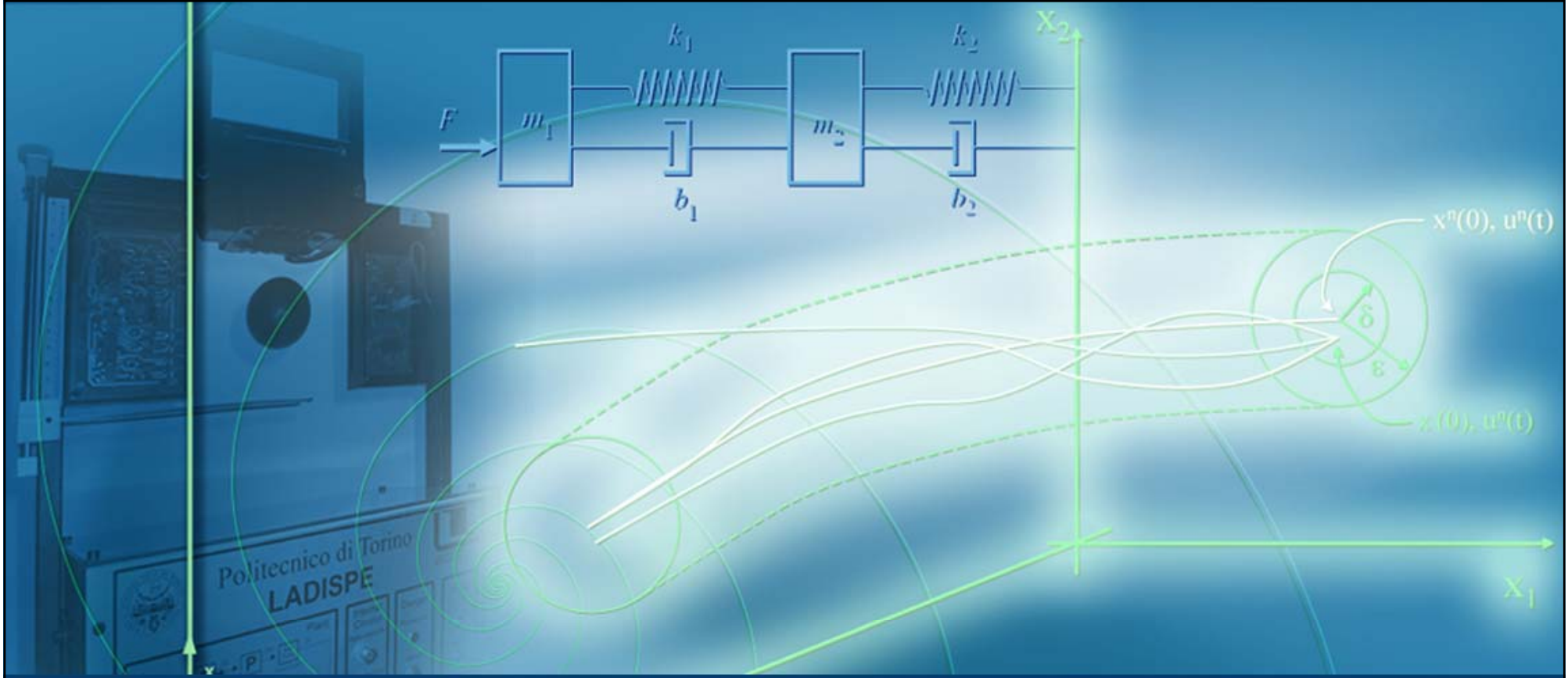
### Unità 5

# Stabilità esterna e analisi della risposta

$$y(t) = Cx(t)$$

## Stabilità esterna e analisi della risposta

- Stabilità esterna e risposta a regime
- Risposte di sistemi del I e II ordine



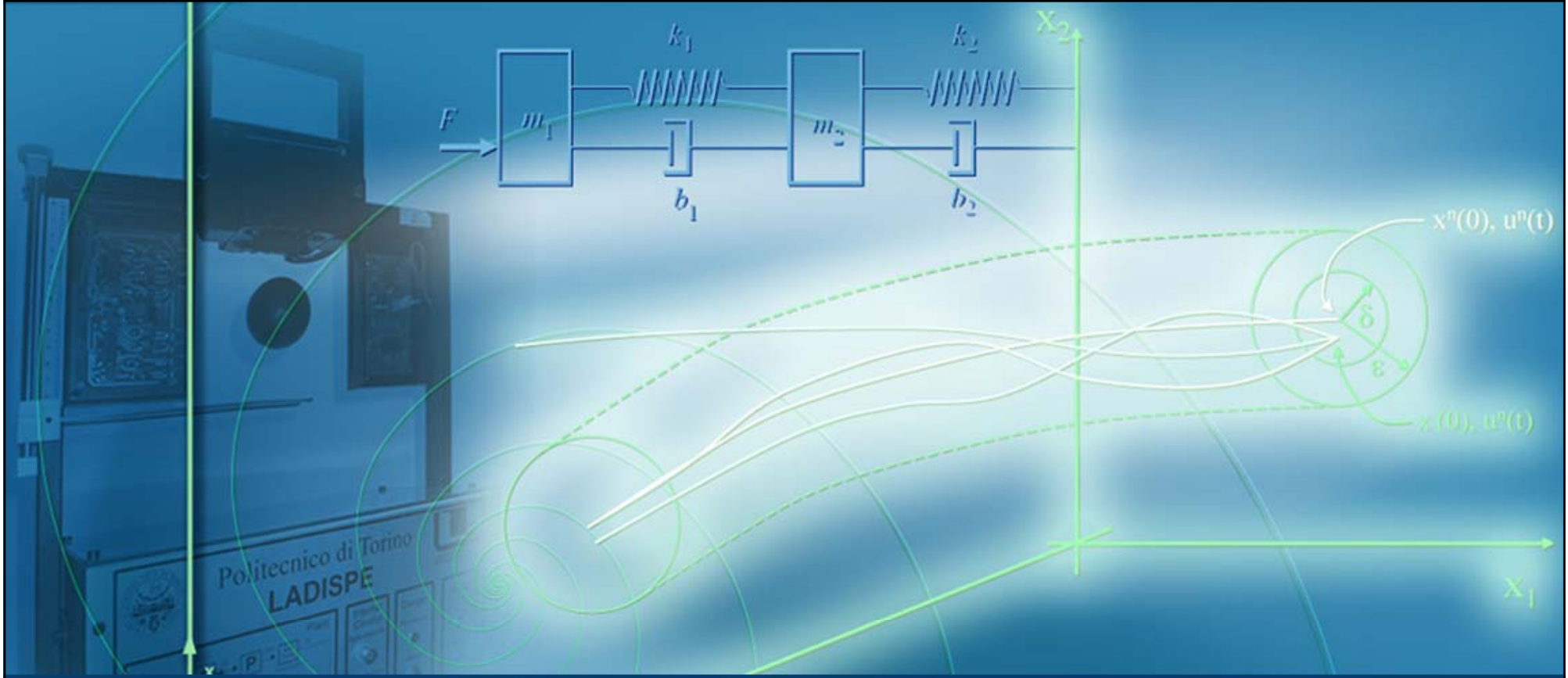
## Stabilità esterna e analisi della risposta

### Stabilità esterna e risposta a regime

$$y(t) = Cx(t)$$

## Stabilità esterna e risposta a regime

- Relazioni fra rappresentazioni di sistemi
- Stabilità esterna di sistemi dinamici LTI
- Risposta in regime permanente
- Esempi di calcolo della risposta a regime



## Stabilità esterna e risposta a regime

**Relazioni fra rappresentazioni di sistemi**

$$y(t) = Cx(t)$$

## Relazioni fra rappresentazioni di sistemi

- ▶ La **rappresentazione in variabili di stato** (o **rappresentazione interna**) di un sistema dinamico LTI permette di analizzarne la proprietà di stabilità interna nonché le proprietà strutturali (in particolare, la raggiungibilità e l'osservabilità)
- ▶ La **rappresentazione mediante funzioni di trasferimento** (o **rappresentazione esterna**) di un sistema dinamico LTI fornisce in generale una descrizione parziale del comportamento del sistema rispetto a quella ricavabile dalla rappresentazione interna, poiché permette di analizzarne solamente la risposta forzata  $\Rightarrow$  dipende soltanto dalla parte raggiungibile ed osservabile del sistema dinamico

$$y(t) = Cx(t)$$

## Sistema dinamico in forma minima

- Un sistema dinamico LTI è detto in **forma minima** se e soltanto se è completamente raggiungibile e completamente osservabile
- La rappresentazione interna di un sistema dinamico in forma minima contiene sempre il numero minimo di variabili di stato
- La funzione di trasferimento di un sistema dinamico SISO in forma minima non presenta mai cancellazioni zero-polo  $\Rightarrow$  tutti gli autovalori della matrice di stato compaiono come poli della funzione di trasferimento
- La funzione di trasferimento di un sistema dinamico SISO non in forma minima presenta invece sempre almeno una cancellazione zero-polo



## Esempio di sistema in forma minima

- Il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [2 \quad -1] x(t)$$

è completamente raggiungibile ed osservabile:

$$M_R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho(M_R) = \rho(M_O) = n = 2$$

- La sua funzione di trasferimento è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{s + 13}{(s - 1)(s + 1)}$$





## Esempio di sistema non in forma minima

- Il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad -1] x(t)$$

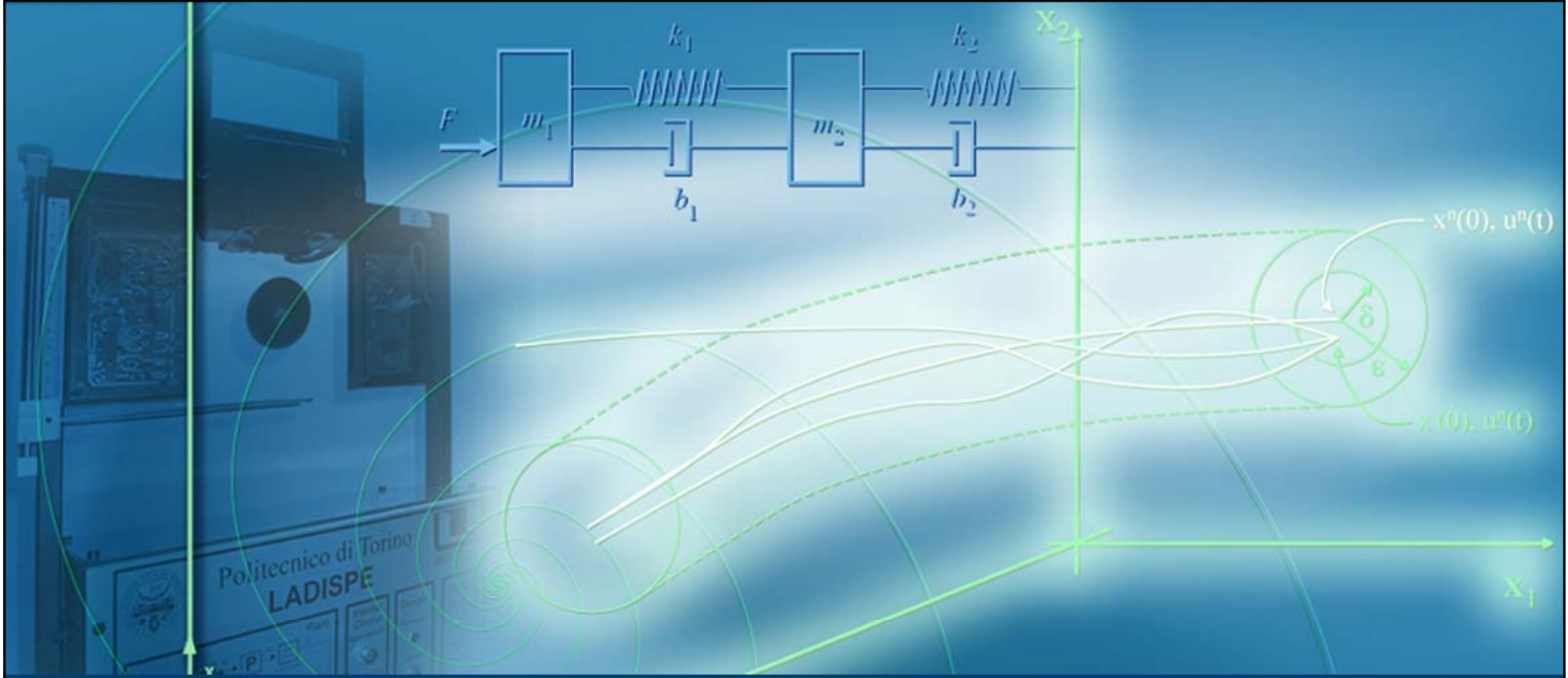
è completamente raggiungibile ma non osservabile:

$$M_R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho(M_R) = n = 2, \quad \rho(M_O) = 1 < n$$

- La sua funzione di trasferimento è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-3\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{-3}{s+1}$$



## Stabilità esterna e risposta a regime

**Stabilità esterna di sistemi dinamici LTI**

$$y(t) = Cx(t)$$

## Stabilità esterna di sistemi dinamici LTI

- Un sistema dinamico, a dimensione finita, LTI, inizialmente a riposo, è **esternamente stabile** o **BIBO stabile** (Bounded Input – Bounded Output) se la sua risposta forzata ad un qualsiasi ingresso limitato si mantiene sempre limitata nel tempo:

$$\forall \bar{u} \in (0, \infty), \quad \exists \bar{y} \in (0, \infty) :$$

$$\|u(t)\| \leq \bar{u}, \quad \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \|y(t)\| \leq \bar{y}, \quad \forall t \geq 0$$

- Per ipotesi, il sistema è inizialmente a riposo  $\Rightarrow$   
 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$  (sistema a tempo continuo)  
 $y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)U(z)\}$  (sistema a tempo discreto)  
con  $H(s), H(z)$ : funzioni di trasferimento del sistema

$$y(t) = Cx(t)$$

## Condizioni per la stabilità esterna

- Un sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo continuo, LTI, inizialmente a riposo, è **BIBO stabile** se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento  $H(s)$ , dopo aver eseguito le cancellazioni zero-polo, sono a parte reale strettamente minore di 0
- Un sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo discreto, LTI, inizialmente a riposo, è **BIBO stabile** se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento  $H(z)$ , dopo aver eseguito le cancellazioni zero-polo, sono in modulo strettamente minori di 1

$$y(t) = Cx(t)$$

## Relazioni fra stabilità interna ed esterna

- Se un sistema dinamico, a dimensione finita, LTI, è asintoticamente stabile  $\Rightarrow$  è esternamente stabile. Infatti, i poli della funzione di trasferimento sono in generale soltanto un sottoinsieme degli autovalori della matrice di stato, che in questo caso sono tutti asintoticamente stabili per ipotesi
- Se un sistema dinamico, a dimensione finita, LTI, è in forma minima ed esternamente stabile  $\Rightarrow$  è asintoticamente stabile. Infatti, gli autovalori della matrice di stato in questo caso coincidono proprio con i poli della funzione di trasferimento, che sono tutti asintoticamente stabili per ipotesi



## Esempio di sistema non BIBO stabile

- Il sistema dinamico LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [2 \quad -1] x(t)$$

considerato in precedenza è in forma minima e la sua funzione di trasferimento è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{s + 13}{(s - 1)(s + 1)}$$

- I poli di  $H(s)$  sono  $+1$ ,  $-1$ , e coincidono con gli autovalori della matrice di stato  $A$  del sistema  $\Rightarrow$  il sistema non è esternamente (o BIBO) stabile, mentre è (internamente) instabile



## Esempio di sistema BIBO stabile

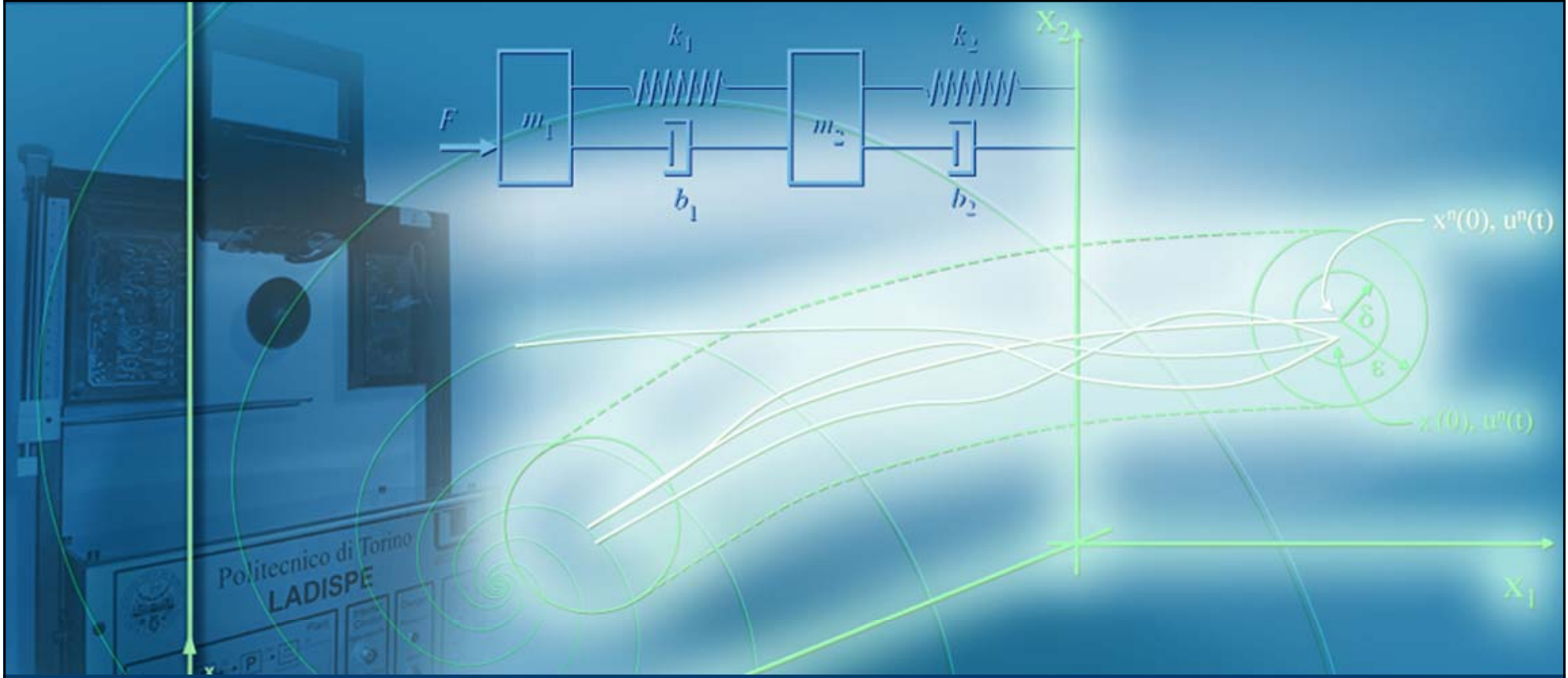
- Il sistema dinamico LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad -1] x(t)$$

considerato in precedenza non è in forma minima e la sua funzione di trasferimento è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{-3\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{-3}{s+1}$$

- Dopo aver eseguito tutte le cancellazioni zero-polo,  $H(s)$  ha un polo in  $-1$ , che è uno dei due autovalori  $(+1, -1)$  della matrice di stato  $A$  del sistema  $\Rightarrow$  il sistema risulta esternamente (o BIBO) stabile, mentre è (internamente) instabile



## Stabilità esterna e risposta a regime

### Risposta in regime permanente



## Risposta in regime permanente (1/6)

- Si consideri il sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo continuo, LTI, proprio, descritto da

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

- Il movimento  $x(t)$ , soluzione dell'equazione di stato, può essere espresso come:

$$x(t) = x_{omog}(t) + x_{part}(t)$$

- $x_{omog}(t)$  è una soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di stato, in cui  $u(t) = 0$
  - $x_{part}(t)$  è una soluzione particolare dell'equazione di stato e dipende dall'ingresso  $u(t)$  applicato
- La risposta  $y(t)$  può essere allora espressa come:

$$y(t) = C \left[ x_{omog}(t) + x_{part}(t) \right] = y_{omog}(t) + y_{part}(t)$$

## Risposta in regime permanente (2/6)

- Come conseguenza dei risultati dell'analisi modale, il termine  $y_{omog}(t)$  è combinazione lineare dei modi propri del sistema  $\Rightarrow$  dipende dagli autovalori  $\lambda_j(A)$  della matrice di stato  $A$ :

$$y_{omog}(t) = C x_{omog}(t) = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{\mu'_i=1}^{\mu_i} \alpha_{i,\mu'_i} m_{i,\mu'_i}(t)$$

$$m_{i,\mu'_i}(t) = t^{\mu'_i-1} e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)t + \varphi_i)$$

- Se il sistema è asintoticamente stabile, cioè se tutti gli autovalori hanno  $\operatorname{Re}(\lambda_j(A)) < 0$ , allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{omog}(t) = 0$$

$\Rightarrow$  per tempi sufficientemente grandi,  $y(t) \cong y_{part}(t)$ , cioè tende a una **risposta in regime permanente**

## Risposta in regime permanente (3/6)

- Il termine  $y_{part}(t)$  dipende sempre dal particolare ingresso  $u(t)$  applicato e, nel caso in cui il sistema dinamico sia asintoticamente stabile, costituisce la risposta in regime permanente cui l'uscita  $y(t)$  tende per tempi sufficientemente grandi:
- Se l'ingresso è costante:  $u(t) = \bar{u} \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow$  l'uscita  $y(t)$  del sistema tende all'uscita di equilibrio  $\bar{y} = -CA^{-1}B\bar{u}$  se il sistema è asintoticamente stabile ( $A$  è infatti invertibile poiché  $\det(A) = \prod_i \lambda_i(A) \neq 0$ )  $\Rightarrow$  è costante anche la risposta in regime permanente:

$$y_{part}(t) = \bar{y} \cdot \varepsilon(t) = -CA^{-1}B\bar{u}\varepsilon(t)$$

Si può calcolare  $\bar{y}$  anche col teorema del valore finale:

$$\bar{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} H(s) \bar{u} / \cancel{s} = H(0) \bar{u}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Risposta in regime permanente (4/6)

- Il termine  $y_{part}(t)$  dipende sempre dal particolare ingresso  $u(t)$  applicato e, nel caso in cui il sistema dinamico sia asintoticamente stabile, costituisce la risposta in regime permanente cui l'uscita  $y(t)$  tende per tempi sufficientemente grandi:
  - Se l'ingresso è sinusoidale:  $u(t) = \bar{u} \sin(\omega_0 t + \theta_0) \varepsilon(t) \Rightarrow$  è sinusoidale anche la risposta in regime permanente cui tende  $y(t)$  se il sistema è asintoticamente stabile:

$$y_{part}(t) = \bar{y} \sin(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon(t)$$

$$\bar{y} = |H(j\omega_0)| \cdot \bar{u}$$

$$\varphi = \arg H(j\omega_0) + \theta_0$$

essendo  $H(s)$  la funzione di trasferimento del sistema

## Risposta in regime permanente (5/6)

- Se un sistema dinamico è asintoticamente stabile (oppure esternamente stabile ed in forma minima), la sua risposta  $y(t)$  ad un qualsiasi ingresso  $u(t)$  può quindi essere scomposta in:
  - Un **transitorio iniziale**, che risente anche del contributo del termine  $y_{omog}(t)$
  - Una **risposta in regime permanente**, coincidente con il solo termine  $y_{part}(t)$
- Esempio: dato il sistema BIBO stabile in forma minima

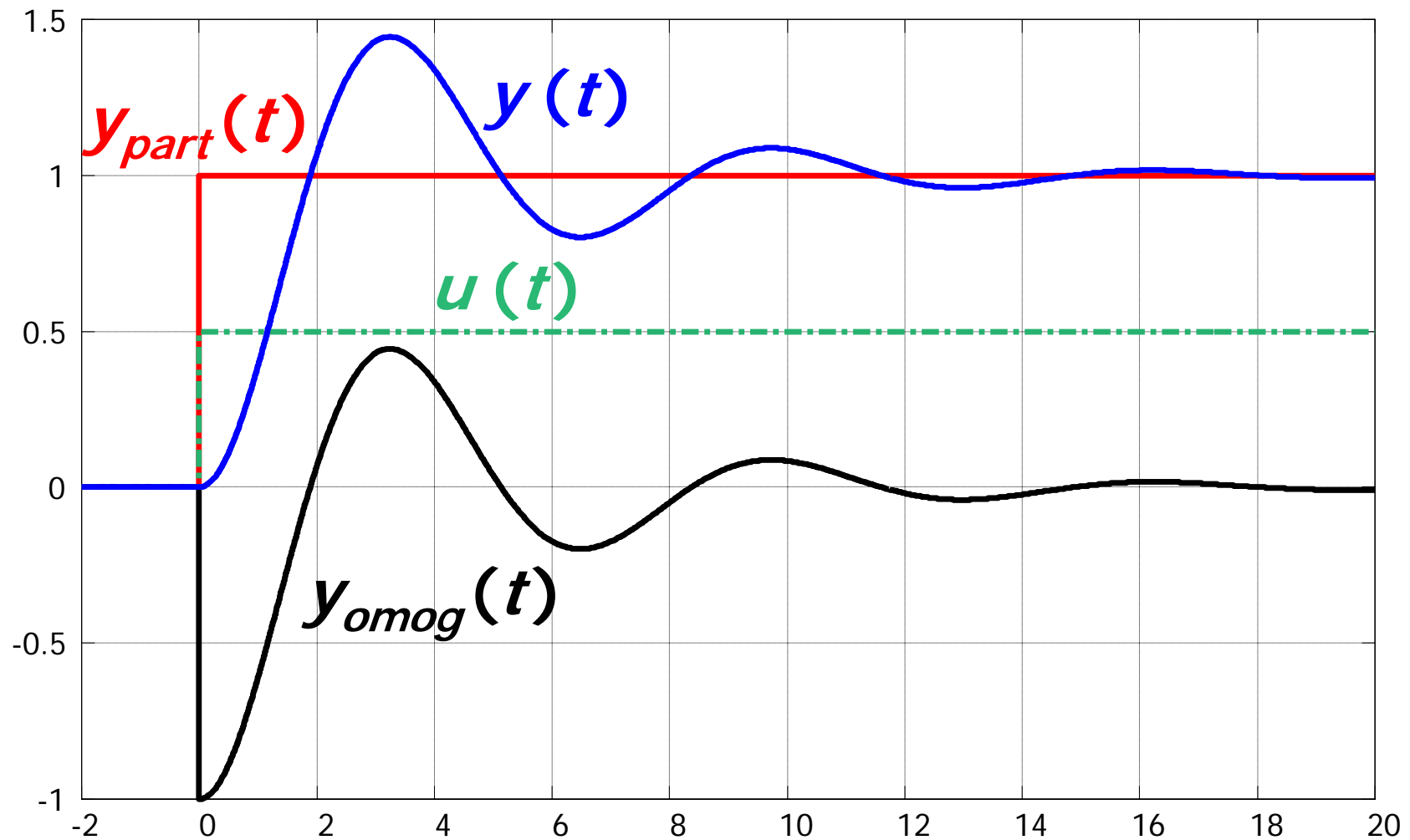
$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 0.5s + 1}$$

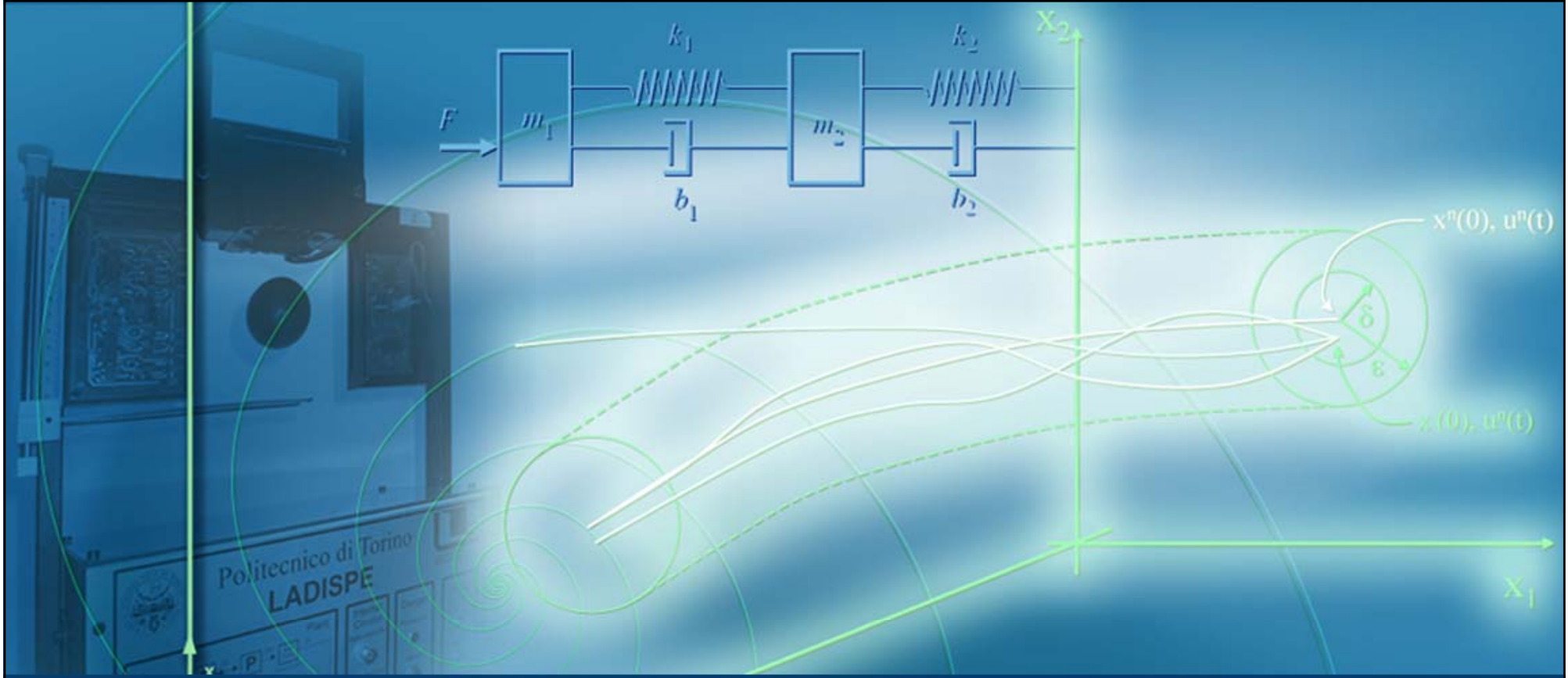
la risposta in regime permanente a  $u(t) = 0.5\varepsilon(t)$  è:

$$y_{part}(t) = \bar{y} \varepsilon(t) = H(0) \bar{u} \varepsilon(t) = 2 \cdot 0.5 \varepsilon(t) = \varepsilon(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Risposta in regime permanente (6/6)





## Stabilità esterna e risposta a regime

**Esempi di calcolo della risposta a regime**



## Esempio #1

- Dato il sistema dinamico in forma minima avente

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$$

calcolare, qualora sia possibile, la risposta in regime permanente ad un ingresso costante di ampiezza 2

- Tutti i poli di  $H(s)$  hanno parte reale strettamente minore di 0, in quanto valgono  $-2$  e  $-10$ 
  - ⇒ il sistema è BIBO stabile nonché in forma minima
  - ⇒ il sistema è asintoticamente stabile
  - ⇒ esiste la risposta in regime permanente
- Poiché  $u(t) = \bar{u}\varepsilon(t) = 2\varepsilon(t) \Rightarrow$  la risposta a regime è:

$$y_{part}(t) = \bar{y}\varepsilon(t) = H(0)\bar{u}\varepsilon(t) = \frac{1}{20}2\varepsilon(t) = 0.1\varepsilon(t)$$





## Esempio #2 (1/2)

- Dato il sistema dinamico in forma minima avente

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$$

calcolare, qualora sia possibile, la risposta in regime permanente all'ingresso  $u(t) = 2 \sin(0.5t) \varepsilon(t)$

- Il sistema è asintoticamente stabile (v. Esempio #1)  
⇒ esiste la risposta in regime permanente

- Poiché  $u(t) = \bar{u} \sin(\omega_0 t + \theta_0) \varepsilon(t) = 2 \sin(0.5t) \varepsilon(t)$   
⇒ la risposta in regime permanente è sinusoidale:

$$y_{part}(t) = \bar{y} \sin(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon(t) = \bar{y} \sin(0.5t + \varphi) \varepsilon(t)$$

$$\bar{y} = |H(j\omega_0)| \cdot \bar{u} = 2 |H(j0.5)|$$

$$\varphi = \arg H(j\omega_0) + \theta_0 = \arg H(j0.5)$$



## Esempio #2 (2/2)

- Dato il sistema dinamico in forma minima avente

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$$

calcolare, qualora sia possibile, la risposta in regime permanente all'ingresso  $u(t) = 2 \sin(0.5t) \varepsilon(t)$

►  $|H(j0.5)| = |(j0.5 + 2)(j0.5 + 10)|^{-1} = |j0.5 + 2|^{-1} |j0.5 + 10|^{-1} =$   
 $= \left( \sqrt{0.5^2 + 2^2} \sqrt{0.5^2 + 10^2} \right)^{-1} = \left( \sqrt{4.25} \sqrt{100.25} \right)^{-1} = 0.0484$

►  $\arg H(j0.5) = \arg \left( \frac{1}{[j0.5 + 2)(j0.5 + 10]} \right) =$   
 $= \arg(1) - \arg(j0.5 + 2) - \arg(j0.5 + 10) =$   
 $= 0 - \arctan(0.5/2) - \arctan(0.5/10) = -0.2949 \text{ rad}$



## Esempio #3

- Dato il sistema dinamico in forma minima avente

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}$$

calcolare, qualora sia possibile, la risposta in regime permanente ad un ingresso costante di ampiezza 2

- Il denominatore di  $H(s)$  ha una variazione di segno  
⇒ per la regola di Cartesio,  $H(s)$  ha:  
un polo con parte reale strettamente minore di 0 e  
un polo con parte reale strettamente maggiore di 0  
⇒ il sistema non è BIBO stabile  
⇒ il sistema non solo non è asintoticamente stabile,  
ma addirittura risulta (internamente) instabile  
⇒ non esiste una risposta in regime permanente