

## Fondamenti di Automatica

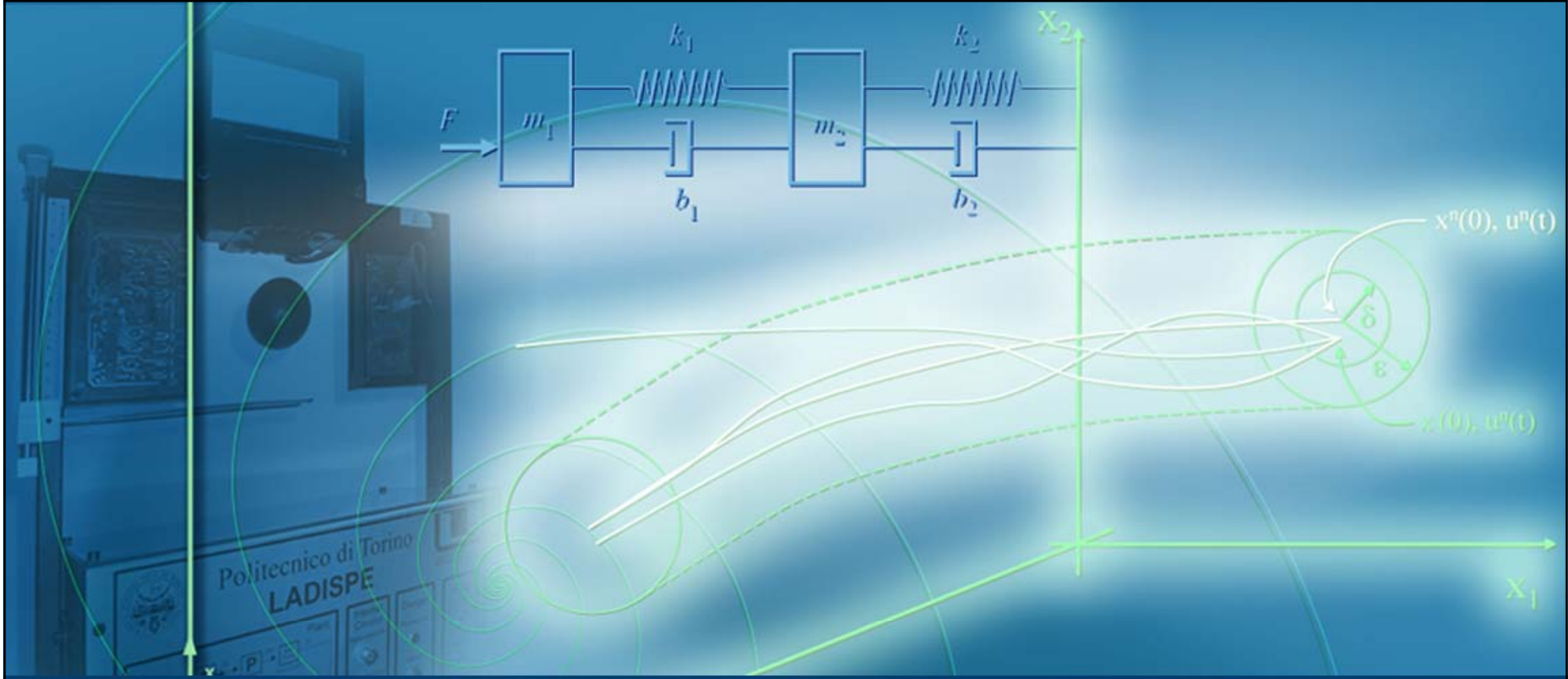
### Unità 4

# Proprietà strutturali e leggi di controllo

$$y(t) = Cx(t)$$

## Proprietà strutturali e leggi di controllo

- Raggiungibilità e controllabilità
- Retroazione statica dallo stato
- Osservabilità e rilevabilità
- Stima dello stato e regolatore dinamico



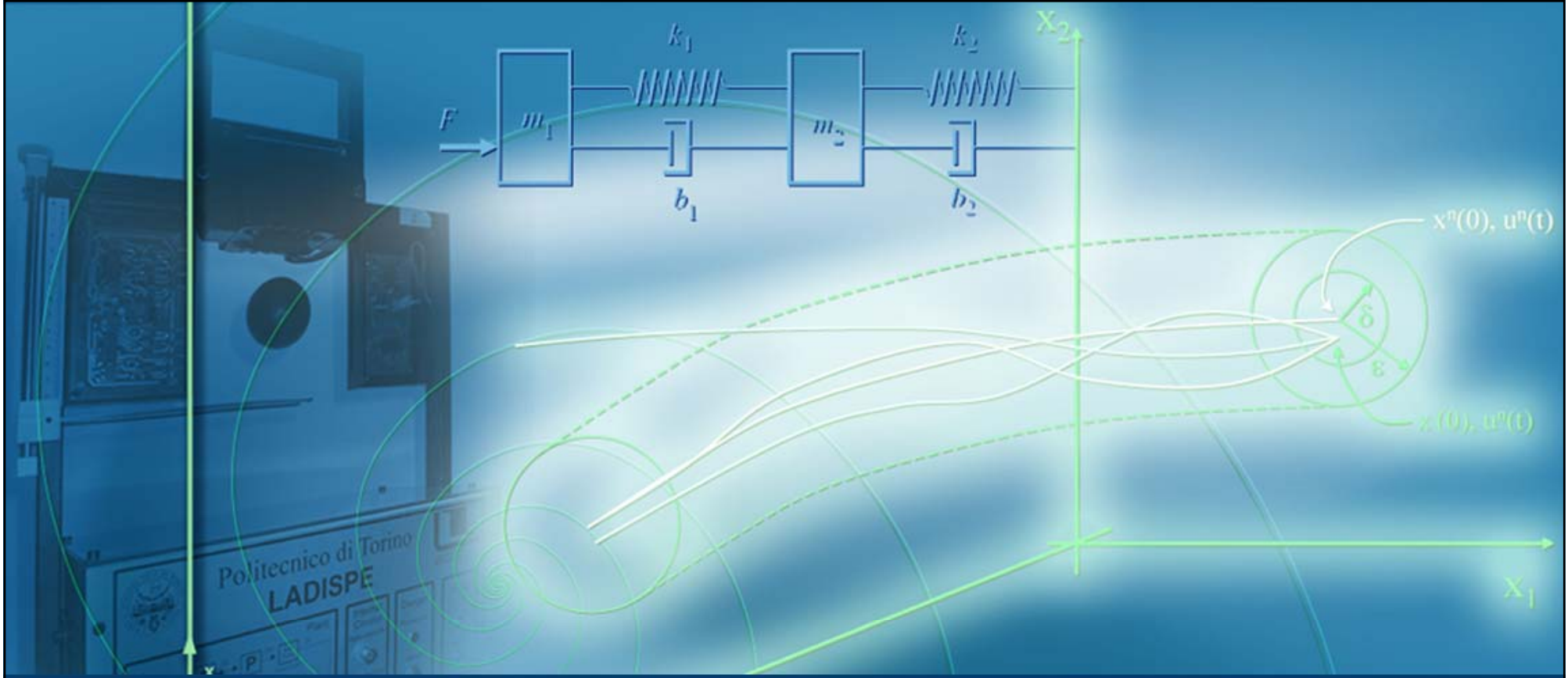
**Proprietà strutturali e leggi di controllo**

**Raggiungibilità e controllabilità**

$$y(t) = Cx(t)$$

## Raggiungibilità e controllabilità

- Definizioni ed esempi introduttivi
- Analisi della raggiungibilità di sistemi dinamici LTI
- Esempi di studio della raggiungibilità
- Il problema della realizzazione



## Raggiungibilità e controllabilità

### Definizioni ed esempi introduttivi



$$y(t) = Cx(t)$$

## Introduzione

- Le proprietà di **raggiungibilità** e di **controllabilità** descrivono le possibilità di azione della funzione di ingresso  $u(\cdot)$  al fine di influenzare il movimento dello stato
- La proprietà di **raggiungibilità** descrive le possibilità di modificare lo stato del sistema a partire da un particolare stato iniziale prefissato agendo opportunamente sull'ingresso  $u(\cdot)$
- La proprietà di **controllabilità** descrive le possibilità di trasferire lo stato del sistema ad un particolare stato finale prefissato agendo opportunamente sull'ingresso  $u(\cdot)$

## Definizione di stato raggiungibile

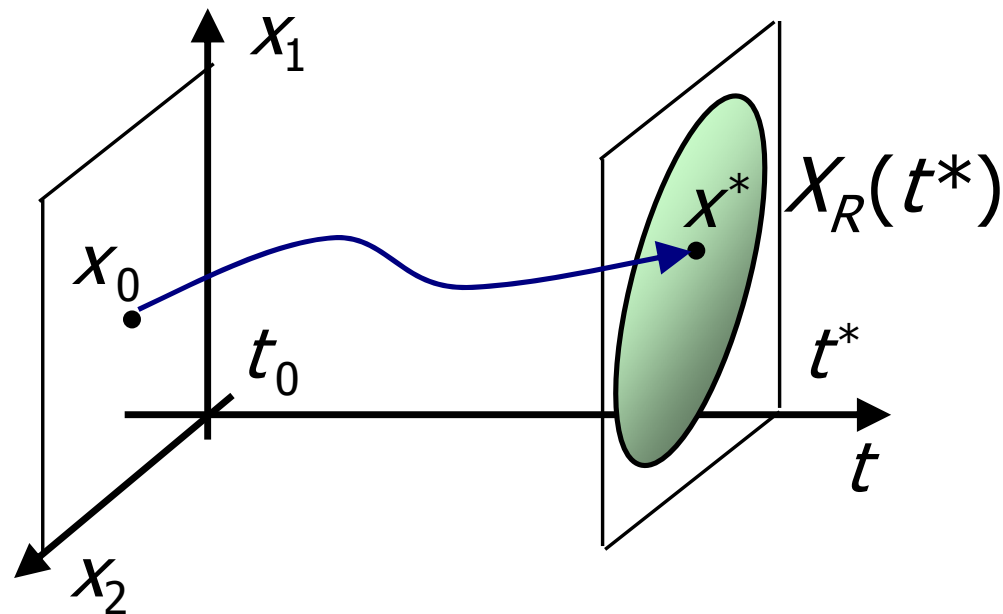
- Uno stato  $x^*$  si dice **raggiungibile** (dallo stato zero  $x_0$  al tempo  $t^*$ ) se esistono:
- Un istante di tempo  $t^* \in [t_0, \infty)$
  - Una funzione di ingresso  $u^*(t)$  definita in  $t \in [t_0, t^*]$
- tali che, detto  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t^*]$  il movimento dello stato generato da  $u^*(t)$  a partire dallo stato  $x_0$  ( $x(t_0) = x_0$ ), risulti:

$$x(t^*) = x^*$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## L'insieme di raggiungibilità

- L'insieme di tutti gli stati raggiungibili (dallo stato zero  $x_0$  al tempo  $t^*$ ) rappresenta **l'insieme di raggiungibilità**  $X_R(t^*)$  al tempo  $t^*$
- L'insieme  $X_R(t^*)$  costituisce un sottospazio lineare dello spazio di stato  $X$





$$y(t) = Cx(t)$$

## La completa raggiungibilità

- Si definisce **il sottospazio di raggiungibilità**  $X_R$  come l'insieme di raggiungibilità  $X_R(t)$  di dimensione massima:

$$X_R = \max_{t \in [t_0, \infty)} X_R(t)$$

- Un sistema è **completamente raggiungibile** se

$$X_R = X$$

- Per i sistemi non completamente raggiungibili si definisce **il sottospazio di non raggiungibilità**  $X_{NR}$  come il complemento ortogonale di  $X_R$ :

$$X_{NR} = X_R^\perp$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Definizione di stato controllabile

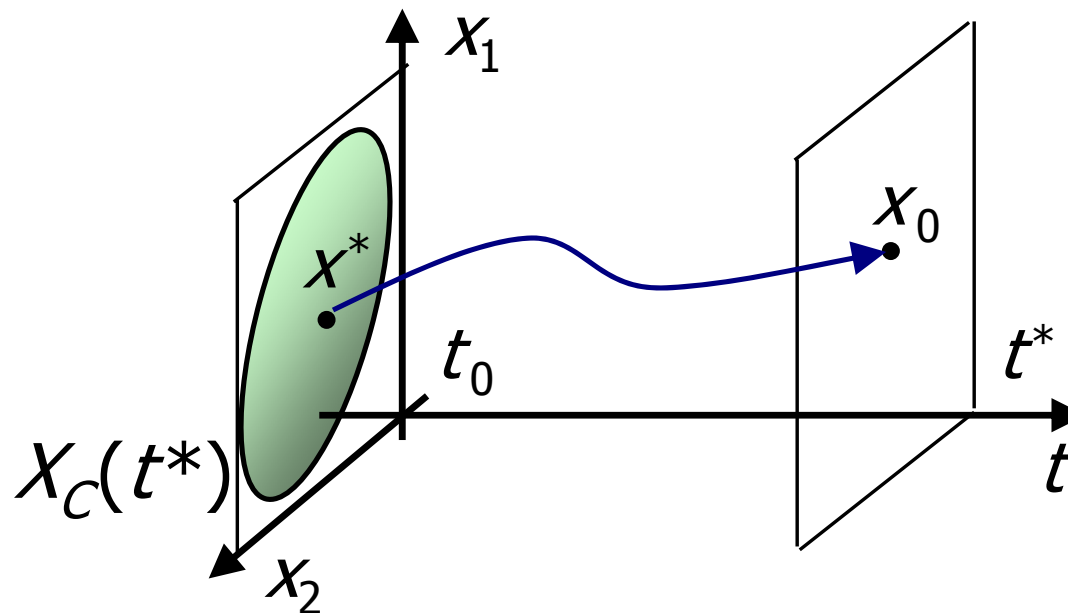
- Uno stato  $x^*$  si dice **controllabile** (allo stato zero  $x_0$  al tempo  $t^*$ ) se esistono:
- Un istante di tempo  $t^* \in [t_0, \infty)$
  - Una funzione di ingresso  $u^*(t)$  definita in  $t \in [t_0, t^*]$
- tali che, detto  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t^*]$  il movimento dello stato generato da  $u^*(t)$  a partire dallo stato  $x^*$  ( $x(t_0) = x^*$ ), risulti:

$$x(t^*) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## L'insieme di controllabilità

- L'insieme di tutti gli stati controllabili (allo stato zero  $x_0$  al tempo  $t^*$ ) rappresenta **l'insieme di controllabilità**  $X_C(t^*)$  al tempo  $t^*$
- L'insieme  $X_C(t^*)$  costituisce un sottospazio lineare dello spazio di stato  $X$



$$y(t) = Cx(t)$$

## La completa controllabilità

- Si definisce **il sottospazio di controllabilità**  $X_C$  come l'insieme di controllabilità  $X_C(t)$  di dimensione massima:

$$X_C = \max_{t \in [t_0, \infty)} X_C(t)$$

- Un sistema dinamico è **completamente controllabile** se

$$X_C = X$$

- Per i sistemi non completamente controllabili si definisce **il sottospazio di non controllabilità**  $X_{NC}$  come il complemento ortogonale di  $X_C$ :

$$X_{NC} = X_C^\perp$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Il concetto di stato zero

- Lo **stato zero**  $x_0$  è uno stato prefissato considerato come "obiettivo"
- Tipicamente si tratta di uno stato di equilibrio non coincidente, in generale, con l'origine dello spazio di stato:  $x_0 \neq 0$
- Tuttavia, per semplicità di trattazione e senza perdere generalità, si assumerà  $x_0$  coincidente con lo stato nullo
- In modo analogo, si può assumere:  $t_0 = 0$



$$y(t) = Cx(t)$$

## Relazioni tra raggiungibilità e controllabilità

- Per i sistemi LTI TC si ha:

$$X_R = X_C$$

- Per i sistemi LTI TD si ha in generale:

$$X_R \subseteq X_C$$

- Se la matrice  $A$  è non singolare

$$X_R = X_C$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Studio della raggiungibilità

- Per i sistemi LTI si ha quindi in generale:

$$X_R \subseteq X_C$$

- Quindi, se un sistema LTI è completamente raggiungibile è anche completamente controllabile
- Pertanto, si studieranno sempre le proprietà di raggiungibilità

$$y(t) = Cx(t)$$

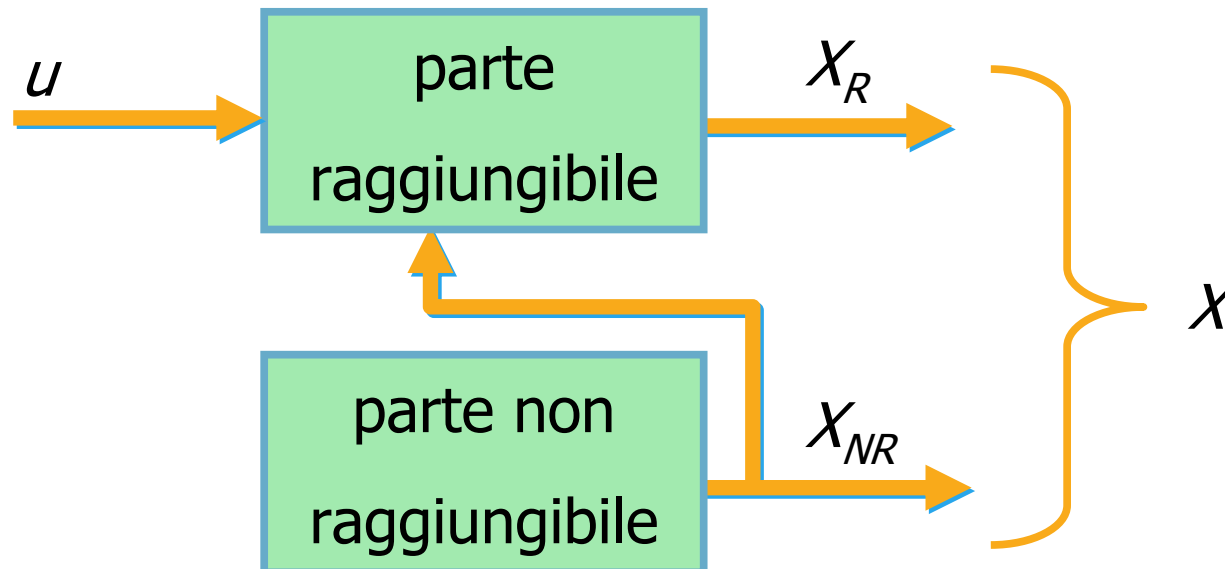
## Parte raggiungibile e non raggiungibile

- In un sistema LTI con dimensione finita  $n$  e non completamente raggiungibile sono stati definiti:
  - Il **sottospazio di raggiungibilità**  $X_R$   
( $\dim(X_R) = r < n$ ) → **parte raggiungibile**
  - Il **sottospazio di non raggiungibilità**  $X_{NR}$   
( $\dim(X_{NR}) = n - r$ ) → **parte non raggiungibile**
  - Al **sottospazio di raggiungibilità** sono associati  $r$  degli  $n$  autovalori della matrice  $A$
  - Al **sottospazio di non raggiungibilità** sono associati  $n - r$  degli  $n$  autovalori della matrice  $A$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Parte raggiungibile e non raggiungibile

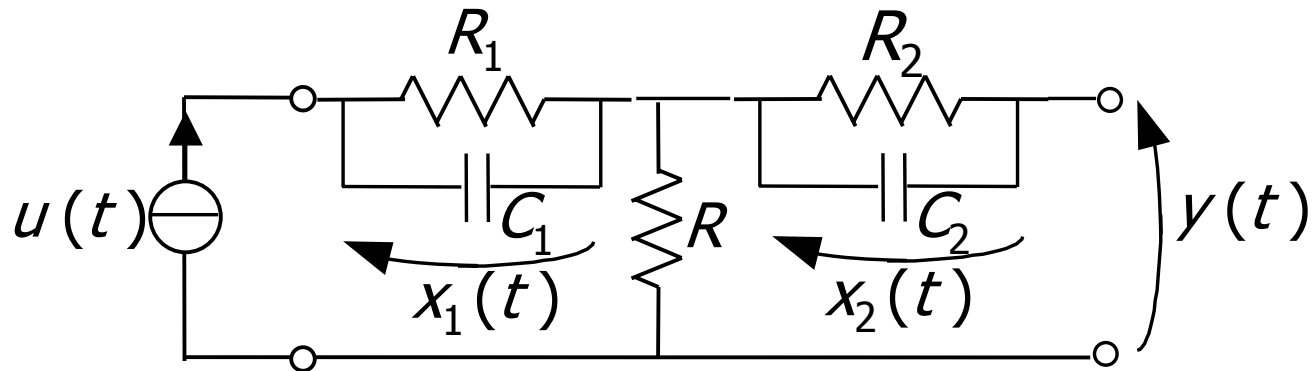
- L'ingresso  $u(\cdot)$  agisce sulla sola **parte raggiungibile**
- Gli stati raggiungibili non influenzano la parte non raggiungibile
- Gli stati non raggiungibili possono influenzare la parte raggiungibile



$$y(t) = Cx(t)$$

## Esempio introduttivo 1

- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



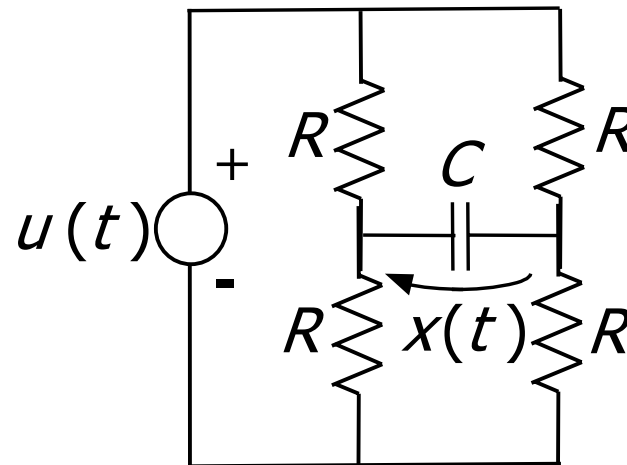
- Il circuito aperto su  $y(t)$  impedisce all'ingresso  $u(t)$  di agire sulla variabile di stato  $x_2(t)$
- La variabile di stato  $x_2(t)$  non è **controllabile** dall'ingresso  $u(t)$



$$y(t) = Cx(t)$$

## Esempio introduttivo 2

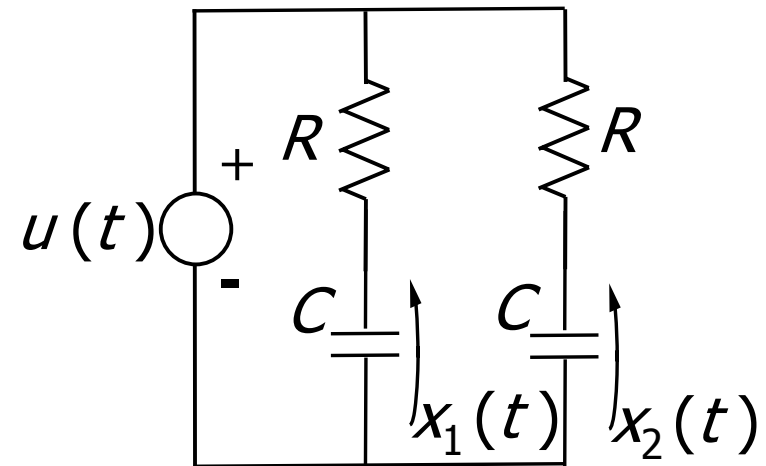
- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



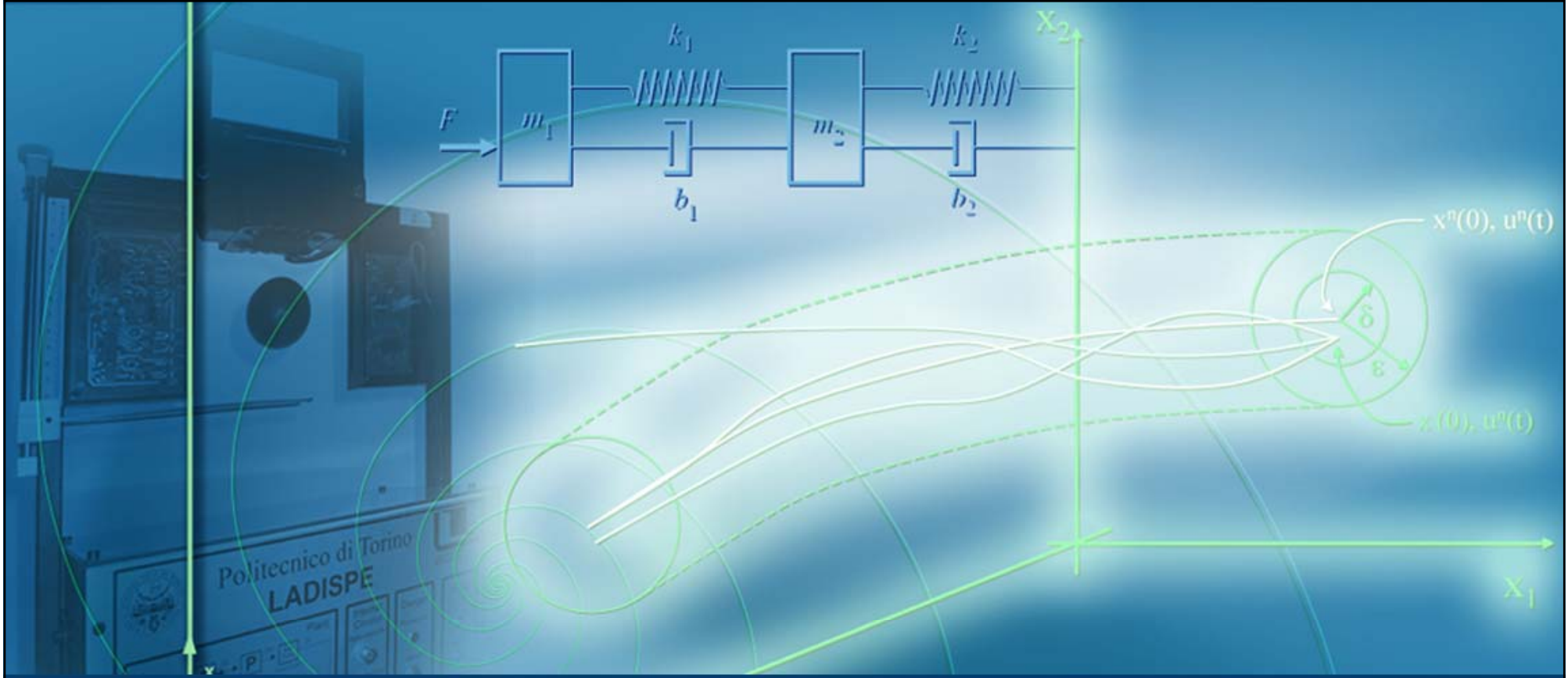
- Il circuito rappresenta un ponte simmetrico
- Se  $x(0) = 0 \rightarrow x(t) = 0 \forall t, \forall u(t)$
- $u(t)$  non ha nessun effetto su  $x(t) \rightarrow$   
 $x(t)$  non è **controllabile** dall'ingresso  $u(t)$

## Esempio introduttivo 3

- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



- Nel circuito sono presenti due impedenze identiche in parallelo ad un generatore di tensione
- Se  $x_1(0) = x_2(0) = 0 \rightarrow x_1(t) = x_2(t) \forall t, \forall u(t)$
- Mediante  $u(t)$  posso imporre qualsiasi valore a  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  con il vincolo che siano identici
- La variabile  $x_1(t) - x_2(t)$  non è **controllabile**



## Raggiungibilità e controllabilità

**Analisi della raggiungibilità di sistemi dinamici LTI**

$$y(t) = Cx(t)$$

## Determinazione di $X_R$ per sistemi LTI TD (1/6)

- Consideriamo un sistema dinamico LTI TD descritto dalle equazioni di stato:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

- Vogliamo determinare:
  - L'insieme di raggiungibilità  $X_R(\ell)$  al tempo  $\ell$
  - Il sottospazio di raggiungibilità  $X_R$
  - Una condizione necessaria e sufficiente per la completa raggiungibilità del sistema

$$y(t) = Cx(t)$$

## Determinazione di $X_R$ per sistemi LTI TD (2/6)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

- Consideriamo, per semplicità, il caso in cui:
  - Il sistema abbia un solo ingresso ( $p = 1 \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ )
  - La condizione iniziale sia nulla:  $x_0 = x(0) = 0$
- Si ha:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

⋮

$$x(\ell) = A^{\ell-1}Bu(0) + \dots + ABu(\ell-2) + Bu(\ell-1)$$



$$y(t) = Cx(t)$$

## Determinazione di $X_R$ per sistemi LTI TD (3/6)

$$x(\ell) = A^{\ell-1}Bu(0) + \dots + ABu(\ell-2) + Bu(\ell-1)$$

► Si può compattare l'espressione in forma matriciale:

$$x(\ell) = \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix}}_{M_R(\ell)} \underbrace{\begin{bmatrix} u(\ell-1) \\ u(\ell-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{U(\ell)} =$$
$$x(\ell) = M_R(\ell)U(\ell)$$

## Determinazione di $X_R$ per sistemi LTI TD (4/6)

- La matrice

$$M_R(\ell) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,\ell}$$

rappresenta il legame tra la sequenza di ingresso  $[u(0), u(1), \dots, u(\ell - 1)]$  e lo stato  $x(\ell)$  raggiunto al tempo  $\ell$

- Pertanto, l' **insieme di raggiungibilità**  $X_R(\ell)$  al tempo  $\ell$  corrisponde allo **spazio immagine**  $\mathcal{R}(\cdot)$  generato dalle colonne della matrice  $M_R(\ell)$ :

$$X_R(\ell) = \mathcal{R}(M_R(\ell)) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix}\right)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Determinazione di $X_R$ per sistemi LTI TD (5/6)

- Per determinare il **sottospazio di raggiungibilità**  $X_R$  bisogna trovare l'**insieme di raggiungibilità**  $X_R(\ell)$  avente dimensione massima:

$$X_R = \max_{\ell \in [0, \infty)} X_R(\ell)$$

- Questo corrisponde a determinare per quale istante  $\ell$  la matrice  $M_R(\ell)$  ha rango massimo
- A tal fine, ricordiamo che nel caso considerato ( $p = 1$ ),  $M_R(\ell)$  viene costruita affiancando le  $\ell$  colonne:  $B, AB, \dots, A^{\ell-1}B$

$$M_R(\ell) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Determinazione di $X_R$ per sistemi LTI TD (6/6)

- Ogni volta che viene aggiunta una colonna del tipo  $A^{j-1}B$  ( $j = 1, \dots, \ell$ ) il rango della matrice  $M_R(\ell)$  aumenta di una unità o rimane costante
- Gli eventuali aumenti di rango possono avvenire solo fino a quando il numero delle colonne aggiunte  $\ell$  eguaglia il numero  $n$  di righe di  $M_R(\ell)$  e cioè coincide con la dimensione del sistema
- Pertanto:

$$X_R = X_R(n)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## La matrice di raggiungibilità

- Definiamo la **matrice di raggiungibilità**  $M_R$  come la matrice  $M_R(n)$

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- Il sottospazio di raggiungibilità è quindi definito come:

$$X_R = \mathcal{R}(M_R)$$



$$y(t) = Cx(t)$$

## La condizione di completa raggiungibilità

- Pertanto, la dimensione del **sottospazio di raggiungibilità**  $X_R$  è pari al rango  $r$  della **matrice di raggiungibilità**  $M_R$

$$\dim(X_R) = \rho(M_R) = r$$

- Un sistema dinamico LTI TD è quindi **completamente raggiungibile** (e anche controllabile) se e soltanto se il rango della **matrice di raggiungibilità**  $M_R$  è pari alla dimensione  $n$  del sistema:

$$\rho(M_R) = n$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Generalizzazione

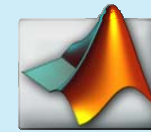
- Il risultato appena enunciato vale anche:
- Nel caso di sistemi dinamici LTI TC del tipo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

per cui la matrice di raggiungibilità è definita allo stesso modo

- Nel caso di sistemi LTI TC e TD a più ingressi ( $p > 1$ ) nei quali la matrice di raggiungibilità  $M_R$  assume la forma più generale:

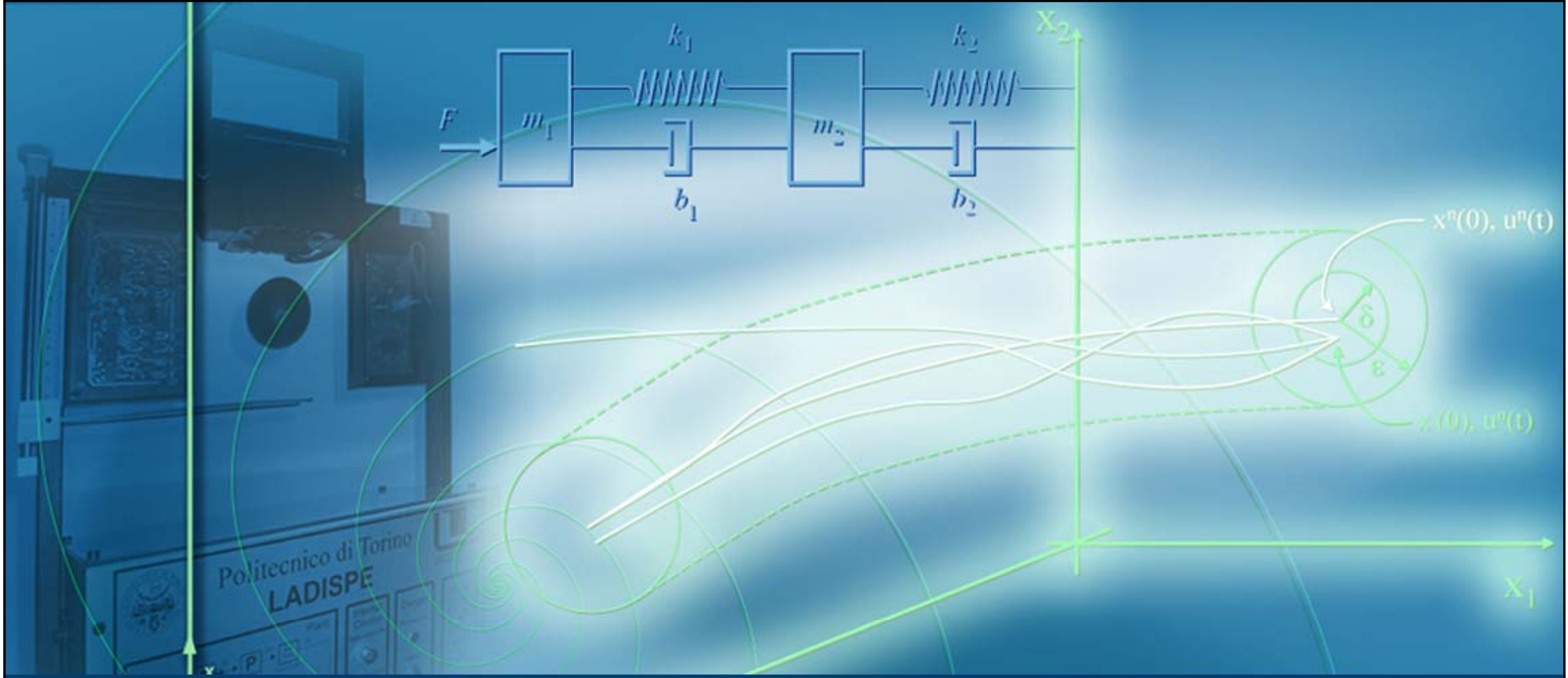
$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-b}B \end{bmatrix}, \quad b = \rho(B)$$



- La matrice di raggiungibilità  $M_R$  di un sistema dinamico LTI può essere calcolata in MatLab mediante l'istruzione:  $M\_R = \text{ctrb}(A, B)$ 
  - $A, B$ : matrici della rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

- Il rango  $r$  della matrice di raggiungibilità può essere calcolato con l'istruzione:  $r = \text{rank}(M\_R)$
- Per maggiori dettagli sulle istruzioni, digitare `help ctrb`, `help rank` al prompt di MatLab



## Raggiungibilità e controllabilità

**Esempi di studio della raggiungibilità**



## Esempio 1: formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- Studiarne le proprietà di raggiungibilità

$$y(t) = Cx(t)$$



## Esempio 1: procedimento di soluzione

- Per analizzare le proprietà di raggiungibilità occorre:
  - Calcolare la matrice di raggiungibilità  $M_R$  a partire dalle matrici  $A$  e  $B$  delle equazioni di stato
  - Valutare il rango  $r$  di  $M_R$  e confrontarlo con la dimensione  $n$  del sistema; in particolare
    - Se  $r = n$  allora il sistema risulta completamente raggiungibile
    - Se  $r < n$  allora il sistema non è completamente raggiungibile



## Esempio 1: calcolo di $M_R$

- Le matrici  $A$  e  $B$  del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Il sistema è a un ingresso  $p = 1$  e di ordine  $n = 3$
- La matrice di raggiungibilità è quindi del tipo:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$



$$y(t) = Cx(t)$$



## Esempio 1: procedura di calcolo di $M_R$

➤ Per calcolare  $M_R$  conviene procedere alla sua costruzione "per colonne" come segue:

- Si parte dalla colonna  $B$ :

$$M_R = [B \quad \dots \quad \dots]$$

- Si calcola la seconda colonna eseguendo il prodotto  $AB$ :

$$M_R = [B \quad AB \quad \dots]$$

- Si calcola la terza colonna  $A^2B$  eseguendo il prodotto  $A(AB)$ :

$$M_R = [B \quad AB \quad A^2B]$$



## Esempio 1: calcolo di $M_R$ (1/3)

- Nel primo passaggio si riporta la matrice  $B$  come prima colonna di  $M_R$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & & \\ 2 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$B \quad AB \quad A^2B$



## Esempio 1: calcolo di $M_R$ (2/3)

- Nel secondo passaggio si costruisce la seconda colonna di  $M_R$  con il prodotto righe per colonne  $AB$  :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$B \quad AB \quad A^2B$



## Esempio 1: calcolo di $M_R$ (3/3)

- Nel terzo passaggio si costruisce la terza colonna di  $M_R$  con il prodotto righe per colonne  $A^2B$  eseguito tramite il prodotto  $A(AB)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 30 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$B \quad AB \quad A^2B$



## Esempio 1: analisi della raggiungibilità

- Si ottiene la matrice di raggiungibilità:

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 30 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- Poiché:

$$\det(M_R) = 116 \neq 0$$

- Si ha:

$$\rho(M_R) = 3 = n$$

- Il sistema risulta **completamente raggiungibile**



## Esempio 2: formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TD:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

- Studiarne le proprietà di raggiungibilità

$$y(t) = Cx(t)$$



## Esempio 2: procedimento di soluzione

- Per analizzare le proprietà di raggiungibilità occorre:
  - Calcolare la matrice di raggiungibilità  $M_R$  a partire dalle matrici  $A$  e  $B$  delle equazioni di stato
  - Valutare il rango  $r$  di  $M_R$  e confrontarlo con la dimensione  $n$  del sistema; in particolare
    - Se  $r = n$  allora il sistema risulta completamente raggiungibile
    - Se  $r < n$  allora il sistema non è completamente raggiungibile





## Esempio 2: calcolo di $M_R$

- Le matrici  $A$  e  $B$  del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Il sistema è a un ingresso  $p = 1$  e di ordine  $n = 3$
- La matrice di raggiungibilità è quindi del tipo:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$



## Esempio 2: analisi della raggiungibilità (1/2)

- La matrice di raggiungibilità è:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -10 \\ 2 & -10 & 26 \end{bmatrix}$$

- Si ha

$$\det(M_R) = 0 \Rightarrow \rho(M_R) < 3$$

- Si nota che  $M_R$  ha una riga nulla mentre le altre due sono linearmente indipendenti

$$\rho(M_R) = 2$$

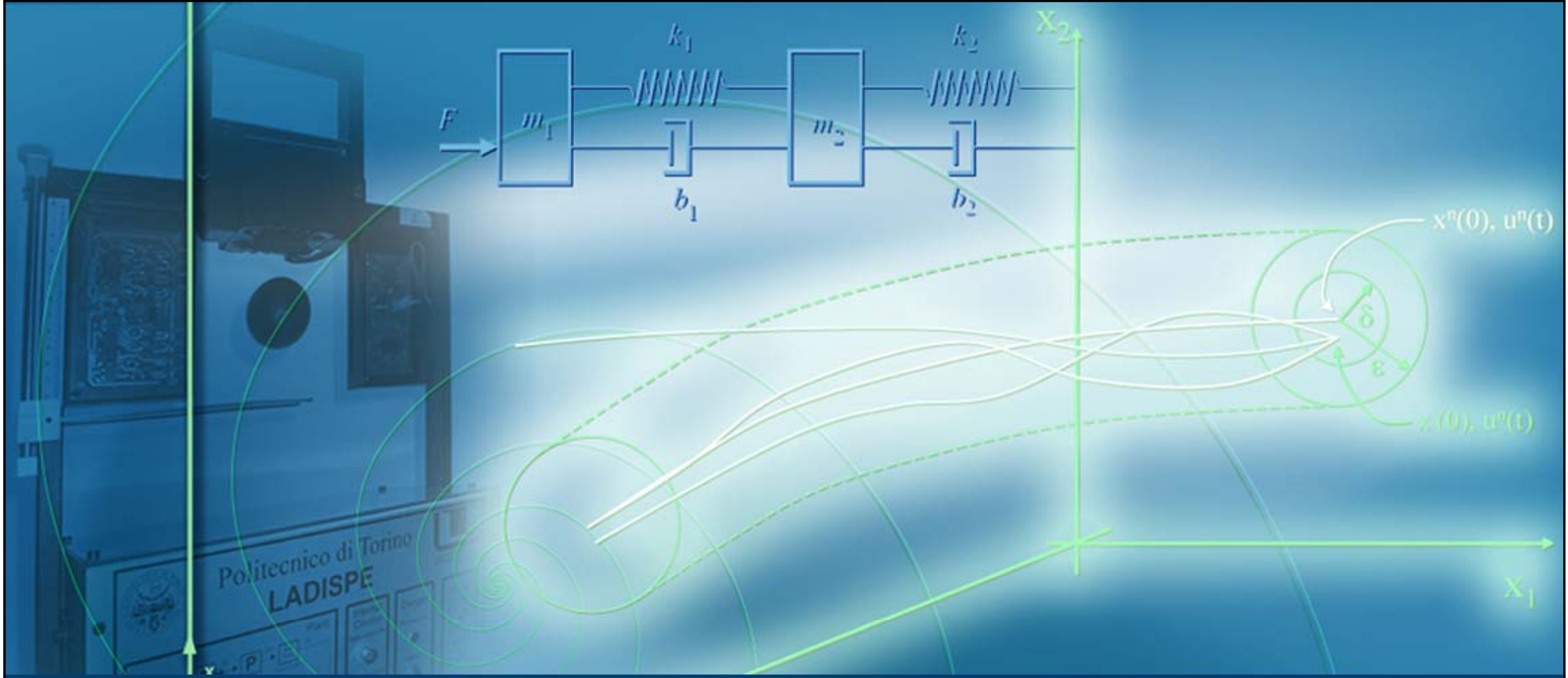


## Esempio 2: analisi della raggiungibilità (2/2)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -10 \\ 2 & -10 & 26 \end{bmatrix}, \rho(M_R) = 2$$

- Il sistema risulta **non completamente raggiungibile**
- Inoltre:

$$\dim(X_R) = \rho(M_R) = 2$$



## Raggiungibilità e controllabilità

### Il problema della realizzazione

$$y(t) = Cx(t)$$

## Rappresentazioni di sistemi dinamici SISO

► Un sistema dinamico SISO LTI si può rappresentare con

- **Equazioni di stato**

(rappresentazione ingresso – stato – uscita)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \end{cases}$$

- **Funzione di trasferimento**

(rappresentazione ingresso – uscita)

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Il problema della realizzazione (1/3)

- Vogliamo studiare come è possibile passare dalla rappresentazione in equazioni di stato a quella in funzione di trasferimento e viceversa.
- **Equazioni di stato** →  
→ **Funzione di trasferimento**

$$\begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{array} \right. \\ \downarrow & \downarrow \\ H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D & H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \end{array}$$

- La soluzione è unica

$$y(t) = Cx(t)$$

## Il problema della realizzazione (2/3)

- **Funzione di trasferimento** →  
→ **Equazioni di stato**

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$



$$A = ??, B = ??, C = ??, D = ??$$

$$A = ??, B = ??, C = ??, D = ??$$

- Il problema di determinare un insieme di equazioni di stato a partire da una funzione di trasferimento non ha soluzione unica ed è detto problema della **realizzazione**



$$y(t) = Cx(t)$$

## Il problema della realizzazione (3/3)

- Nel caso in cui la funzione di trasferimento  $H(s)$  non sia strettamente propria (cioè  $m = n$ ), prima di procedere alla **realizzazione** occorre compiere la divisione (polinomiale) tra il numeratore e il denominatore:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \\ &= \frac{b'_{n-1} s^{n-1} + \dots + b'_1 s + b'_0}{s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_1 s + a'_0} + b'_n \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## La forma canonica di raggiungibilità

► Data la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{b'_{n-1}s^{n-1} + \dots + b'_1s + b'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_1s + a'_0} + b'_n$$

la **forma canonica di raggiungibilità**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a'_0 & -a'_1 & \dots & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b'_0 & b'_1 & \dots & b'_{n-1} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b'_n \end{bmatrix}$$

costituisce una sua possibile **realizzazione**

$$y(t) = Cx(t)$$

## Forma canonica di raggiungibilità: proprietà

► Nella **forma canonica di raggiungibilità**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a'_0 & -a'_1 & \dots & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [b'_0 \quad b'_1 \quad \dots \quad b'_{n-1}] \quad D = [b'_n]$$

- La matrice  $A$  è in forma compagna inferiore  $\rightarrow$  il polinomio caratteristico è:  $\lambda^n + \dots + a'_1\lambda + a'_0$
  - Il sistema dinamico individuato dalle matrici  $A, B, C, D$  è sempre completamente raggiungibile
- Il medesimo procedimento si applica a sistemi TD

$$y(t) = Cx(t)$$



## Esempio: formulazione del problema

- Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

- Determinarne la realizzazione secondo la forma canonica di raggiungibilità



## Esempio: realizzazione

- La funzione di trasferimento data è di ordine  $n = 3$ :

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{b'_2 s^2 + b'_1 s + b'_0}{s^3 + a'_2 s^2 + a'_1 s + a'_0} + b'_3$$

- La sua realizzazione secondo la forma canonica di raggiungibilità è quindi della forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a'_0 & -a'_1 & -a'_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [b'_0 \quad b'_1 \quad b'_2] \quad D = [b'_3]$$

$$y(t) = Cx(t)$$



## Esempio: calcolo della realizzazione (1/3)

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + b_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \quad D = [b_3]$$

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$y(t) = Cx(t)$$



## Esempio: calcolo della realizzazione (2/3)

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + b_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 3 \ 1] \quad D = [b_3]$$

$$b_2 = 1$$

$$b_1 = 3$$

$$b_0 = 1$$



$$y(t) = Cx(t)$$



## Esempio: calcolo della realizzazione (3/3)

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + b_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 3 \quad 1] \quad D = [0]$$

$$b_3 = 0$$



## Esempio: risultato

- La realizzazione secondo la forma canonica di raggiungibilità della funzione di trasferimento data è quindi:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$