

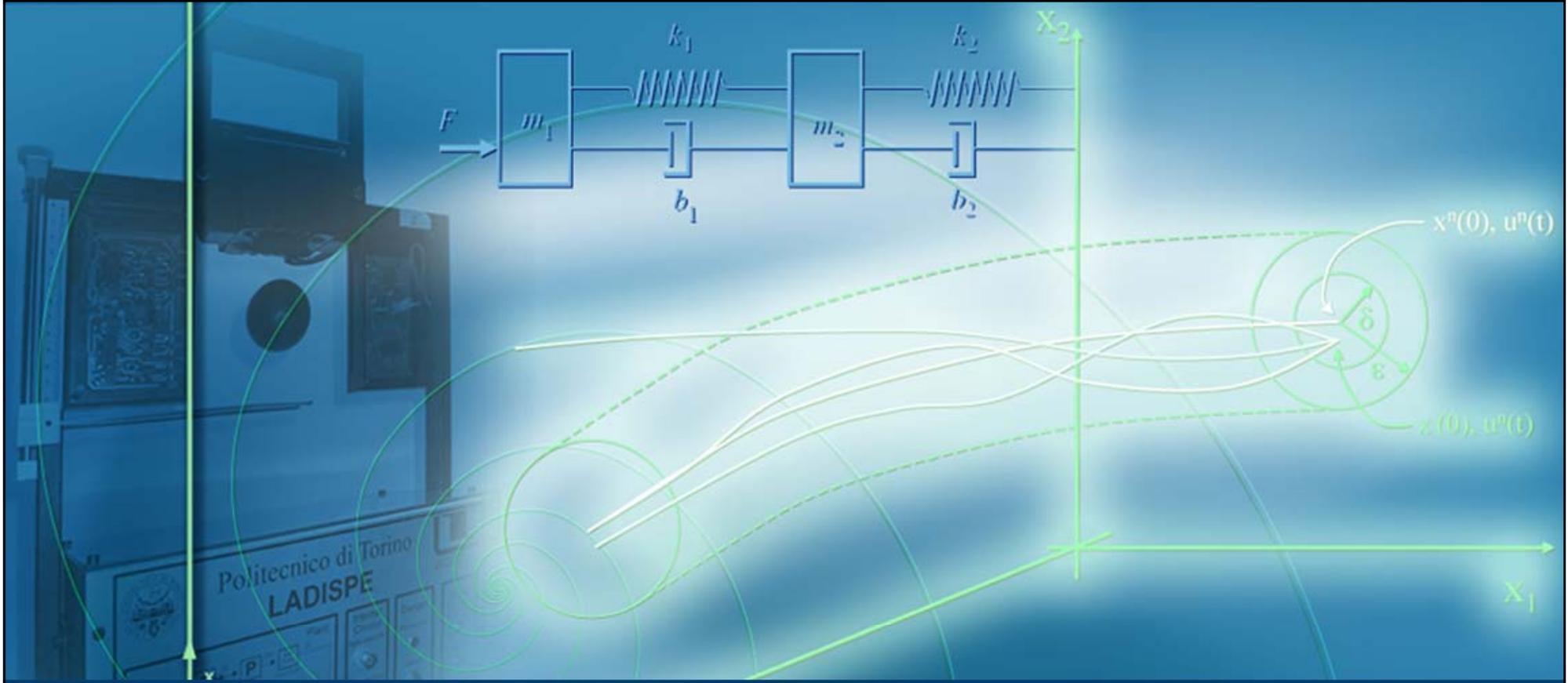
Equilibrio e stabilità di sistemi dinamici

Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

$$y(t) = Cx(t)$$

Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

- Introduzione ai criteri di stabilità
- Regola dei segni di Cartesio
- Criterio di Routh-Hurwitz
- Esempi di applicazione del criterio di Routh
- Criterio di Jury
- Esempi di applicazione del criterio di Jury



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Introduzione ai criteri di stabilità

Introduzione ai criteri di stabilità (1/2)

- I criteri fino ad ora considerati per lo studio della stabilità interna di sistemi dinamici, a dimensione finita, MIMO, lineari e stazionari (LTI), richiedono la conoscenza degli autovalori della matrice A di stato del sistema \Rightarrow richiedono il calcolo esplicito delle radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

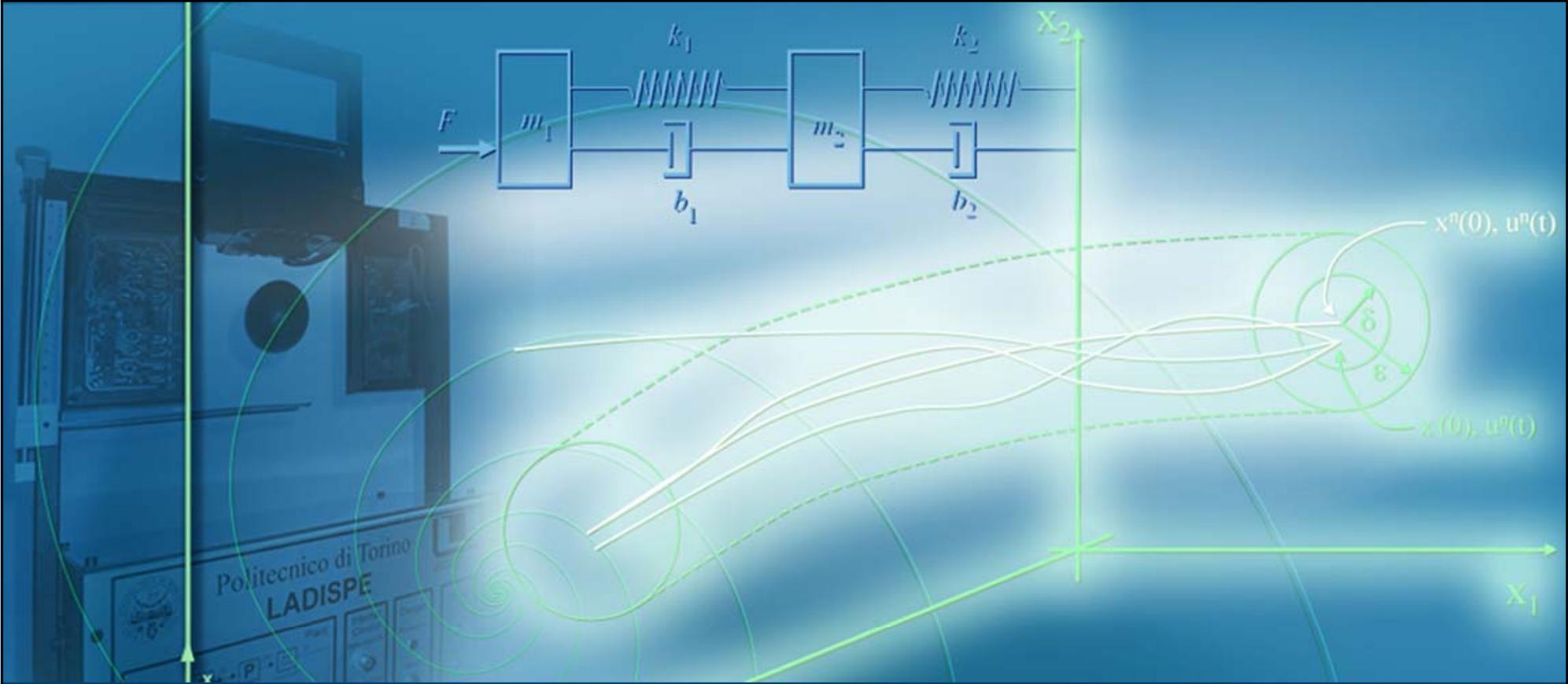
- I criteri che verranno ora introdotti permettono di studiare la stabilità dei sistemi dinamici LTI senza richiedere il calcolo esplicito delle radici di $p(\lambda)$
 \Rightarrow sono di particolare utilità nei casi in cui
 - Non si abbiano a disposizione strumenti di calcolo
 - Il polinomio $p(\lambda)$ dipenda da parametri variabili

$$y(t) = Cx(t)$$

Introduzione ai criteri di stabilità (2/2)

► In particolare:

- La Regola dei segni di Cartesio fornisce in generale solo una condizione necessaria affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano a parte reale strettamente minore di 0
- Il Criterio di Routh-Hurwitz fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano a parte reale strettamente minore di 0
- Il Criterio di Jury fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Regola dei segni di Cartesio

Regola dei segni di Cartesio (1/3)

- Dato il polinomio a coefficienti reali di grado n

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

il numero di radici reali **positive** è pari al numero ν di variazioni di segno fra coefficienti consecutivi non nulli o è inferiore a ν per un multiplo intero di 2

- Esempio:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$$

c'è una sola variazione di segno in $p(\lambda) \Rightarrow$
 $p(\lambda)$ ha una sola radice reale positiva; infatti

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

Regola dei segni di Cartesio (2/3)

- **Corollario:** dato il polinomio a coefficienti reali

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

il numero di radici reali **negative** è pari al numero w di variazioni di segno fra coefficienti consecutivi non nulli del polinomio $p(-\lambda)$ o è inferiore a w per un multiplo intero di 2

- **Esempio:**

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) \Rightarrow$$

$$p(-\lambda) = (-\lambda)^3 + (-\lambda)^2 - (-\lambda) - 1 = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$$

ci sono 2 variazioni di segno in $p(-\lambda) \Rightarrow$
 $p(\lambda)$ ha 2 o 0 radici reali negative

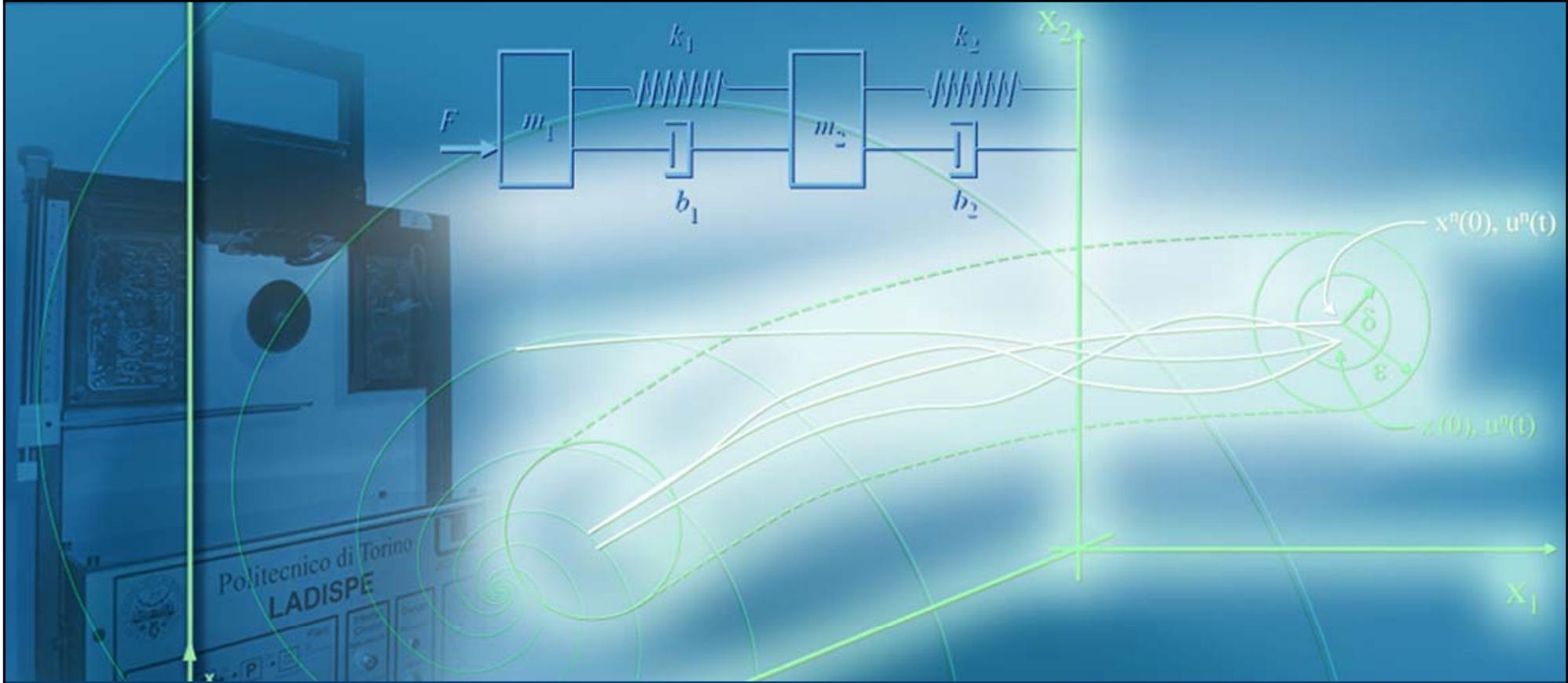
Regola dei segni di Cartesio (3/3)

- Condizione necessaria ma in generale non sufficiente affinché $p(\lambda)$ abbia tutte le n radici a parte reale strettamente negativa è che non ci siano variazioni di segno fra coefficienti consecutivi non nulli

- **Caso particolare:** nel caso $n=2$

$$p(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

condizione necessaria e sufficiente affinché $p(\lambda)$ abbia entrambe le radici a parte reale strettamente negativa è che i 3 coefficienti a_2 , a_1 e a_0 siano di segno concorde (cioè tutti > 0 oppure tutti < 0) e quindi non presentino alcuna variazione di segno



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Criterio di Routh-Hurwitz

Criterio di Routh-Hurwitz (1/3)

- **Premessa:** condizione necessaria affinché tutte le n radici del polinomio a coefficienti reali di grado n

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

siano a parte reale strettamente minore di 0 è che tutti gli $n+1$ coefficienti $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ siano di segno concorde (cioè tutti > 0 oppure tutti < 0)

- Il **criterio di Routh** si esprime con riferimento al segno degli elementi della prima colonna della **tabella di Routh** avente le seguenti caratteristiche:
- È costituita in generale da $n+1$ righe
 - Gli elementi delle prime due righe sono costituiti dai coefficienti di $p(\lambda)$, opportunamente distribuiti
 - L'ultima riga è costituita dal coefficiente a_0 di $p(\lambda)$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterio di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots

$$b_{n-2} = - \left| \begin{array}{c|c} a_n & a_{n-2} \\ \hline a_{n-1} & a_{n-3} \end{array} \right| / a_{n-1}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterio di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots

$$b_{n-2} = - \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \quad b_{n-4} = - \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \dots$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	\dots

$$b_{n-2} = - \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \quad b_{n-4} = - \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \dots$$

$$c_{n-3} = - \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} / b_{n-2}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	\dots

$$b_{n-2} = - \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \quad b_{n-4} = - \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \dots$$

$$c_{n-3} = - \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} / b_{n-2}, \quad c_{n-5} = - \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix} / b_{n-2}, \dots$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
0	a_0	0	0	\dots

$$b_{n-2} = - \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \quad b_{n-4} = - \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \dots$$

$$c_{n-3} = - \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} / b_{n-2}, \quad c_{n-5} = - \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix} / b_{n-2}, \dots$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterio di Routh-Hurwitz (3/3)

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
0	a_0	0	0	\dots

► Criterio di Routh-Hurwitz:

condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano a parte reale strettamente minore di 0 è che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano di segno concorde (cioè tutti > 0 oppure tutti < 0)

$$y(t) = Cx(t)$$

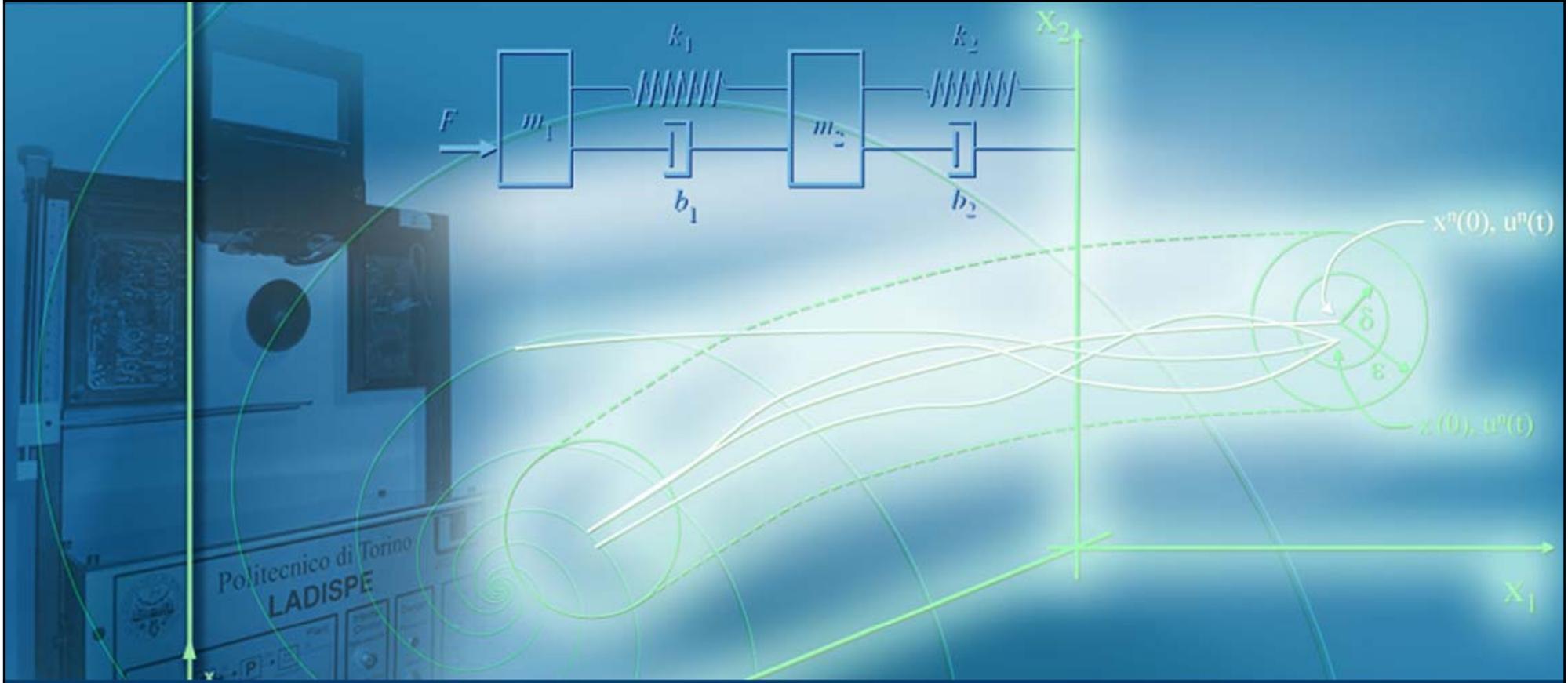
Corollario del criterio di Routh-Hurwitz

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
0	a_0	0	0	\dots

► **Corollario del criterio di Routh-Hurwitz:**

se la tabella di Routh può essere completata (cioè nessun elemento della sua prima colonna è nullo):

- Nessuna radice di $p(\lambda)$ ha parte reale nulla
- Il numero di radici di $p(\lambda)$ a parte reale strettamente maggiore di 0 è dato dal numero delle variazioni di segno presenti nella prima colonna della tabella



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Esempi di applicazione del criterio di Routh



Esempio #1 (1/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	1	0	...
3	6	1	0	0	...
2	b_2	b_0	b_{-2}
1	c_1	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = 1$	0	0

$$b_2 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 6 & 1 \end{array} \right| / 6 = -(1 - 48) / 6 = 47/6$$



Esempio #1 (2/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	1	0	...
3	6	1	0	0	...
2	47/6	b_0	b_{-2}
1	c_1	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = 1$	0	0

$$b_0 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array} \right| / 6 = -(0 - 6) / 6 = 1$$



Esempio #1 (3/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	1	0	...
3	6	1	0	0	...
2	47/6	1	b_{-2}
1	c_1	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = 1$	0	0

$$b_{-2} = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{array} \right| / 6 = 0 = b_{-4} = \dots$$



Esempio #1 (4/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	1	0	...
3	6	1	0	0	...
2	47/6	1	0
1	c_1	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = 1$	0	0

$$c_1 = - \left| \begin{array}{cc|c} 6 & 1 & \\ \hline 47/6 & 1 & \end{array} \right| / 47/6 = - \frac{6 - 47/6}{47/6} = 11/47$$



Esempio #1 (5/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	1	0	...
3	6	1	0	0	...
2	47/6	1	0
1	11/47	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = 1$	0	0

$$c_{-1} = - \left| \begin{array}{cc} 6 & 0 \\ 47/6 & 0 \end{array} \right| / 47/6 = 0 = c_{-3} = \dots$$



Esempio #1 (6/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	1	0	...
3	6	1	0	0	...
2	47/6	1	0	0	...
1	11/47	0	0	0	...
0	$a_0 = 1$	0	0	0	...

- Tutti gli elementi della prima colonna sono concordi
⇒ tutte le radici di $p(\lambda)$ sono a parte reale < 0



Esempio #2 (1/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- Non tutti i coefficienti di $p(\lambda)$ sono di segno concorde poiché $a_1 = 0$
⇒ non tutte le radici di $p(\lambda)$ sono a parte reale < 0



Esempio #2 (2/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

3	0.2	0	0	...
2	1.2	1.2	0	...
1	b_1	b_{-1}
0	$a_0 = 1.2$	0

$$b_1 = - \begin{vmatrix} 0.2 & 0 \\ 1.2 & 1.2 \end{vmatrix} / 1.2 = -(0.24 - 0) / 1.2 = -0.2$$



Esempio #2 (3/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

3	0.2	0	0	...
2	1.2	1.2	0	...
1	-0.2	b_{-1}
0	$a_0 = 1.2$	0

$$b_{-1} = - \left| \begin{array}{cc} 0.2 & 0 \\ 1.2 & 0 \end{array} \right| / 1.2 = 0 = b_{-3} = \dots$$



Esempio #2 (4/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

3		0.2	0	0	...
2		1.2	1.2	0	...
1		-0.2	0	0	...
0		$a_0 = 1.2$	0	0	...

- Ci sono due variazioni di segno nella prima colonna
⇒ due radici di $p(\lambda)$ sono a parte reale > 0



Esempio #2 (5/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

3	0.2	0	0	...
2	1.2	1.2	0	...
1	-0.2	0	0	...
0	$a_0 = 1.2$	0	0	...

- Non ci sono elementi nulli nella prima colonna
⇒ nessuna radice di $p(\lambda)$ è a parte reale nulla
⇒ solo una radice di $p(\lambda)$ è a parte reale < 0



Esempio #3

- Dato il seguente polinomio a coefficienti reali $a_i \neq 0$

$$p(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

analizzarne le radici solo mediante il criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

2	a_2	a_0	...
1	a_1	0	...
0	a_0	0	...

- La prima colonna della tabella è data esattamente dai coefficienti del polinomio $p(\lambda) \Rightarrow$ il criterio e il corollario di Routh-Hurwitz dimostrano la regola di Cartesio per polinomi di II grado



Esempio #4 (1/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- Condizione necessaria è che tutti i coefficienti di $p(\lambda)$ siano di segno concorde \Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} \bullet a_4 = 1 > 0, \forall k \\ \bullet a_3 = 6 > 0, \forall k \\ \bullet a_2 = 8 > 0, \forall k \\ \bullet a_1 = k > 0 \\ \bullet a_0 = k > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k > 0$$

- Per avere una condizione necessaria e sufficiente, occorre calcolare la tabella di Routh



Esempio #4 (2/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	k	0	...
3	6	k	0	0	...
2	b_2	b_0	b_{-2}
1	c_1	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = k$	0	0

$$b_2 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 6 & k \end{array} \right| / 6 = -(k - 48) / 6 = \frac{48 - k}{6}$$



Esempio #4 (3/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	k	0	...
3	6	k	0	0	...
2	$\frac{48-k}{6}$	b_0	b_{-2}
1	c_1	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = k$	0	0

$$b_0 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & k \\ 6 & 0 \end{array} \right| / 6 = -(0 - 6k) / 6 = k$$



Esempio #4 (4/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	k	0	...
3	6	k	0	0	...
2	$\frac{48 - k}{6}$	k	b_{-2}
1	c_1	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = k$	0	0

$$b_{-2} = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{array} \right| / 6 = 0 = b_{-4} = \dots$$



Esempio #4 (5/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	k	0	...
3	6	k	0	0	...
2	$\frac{48-k}{6}$	k	0
1	c_1	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = k$	0	0

$$c_1 = - \left| \begin{array}{cc} 6 & k \\ \frac{48-k}{6} & k \end{array} \right| / \frac{48-k}{6} = - \frac{36k - (48-k)k}{48-k} = \frac{(12-k)k}{48-k}$$



Esempio #4 (6/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	k	0	...
3	6	k	0	0	...
2	$\frac{48-k}{6}$	k	0
1	$\frac{(12-k)k}{48-k}$	c_{-1}	c_{-3}
0	$a_0 = k$	0	0

$$c_{-1} = - \left| \begin{array}{cc} 6 & 0 \\ \frac{48-k}{6} & 0 \end{array} \right| / \frac{48-k}{6} = 0 = c_{-3} = \dots$$



Esempio #4 (7/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	8	k	0	...
3	6	k	0	0	...
2	$\frac{48 - k}{6}$	k	0	0	...
1	$\frac{(12 - k)k}{48 - k}$	0	0	0	...
0	$a_0 = k$	0	0	0	...

⇒ occorre vedere per quali k tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono concordi



Esempio #4 (8/9)

4	1	8	k	0	...
3	6	k	0	0	...
2	$\frac{48 - k}{6}$	k	0	0	...
1	$\frac{(12 - k)k}{48 - k}$	0	0	0	...
0	$a_0 = k$	0	0	0	...

- $1 > 0, \forall k$
- $6 > 0, \forall k$
- $(48 - k)/6 > 0 \Rightarrow k < 48$
- $\frac{(12 - k)k}{48 - k} > 0 \Rightarrow (12 - k)k > 0$, poiché $k < 48 \Rightarrow 0 < k < 12$
- $a_0 = k > 0 \Rightarrow k > 0$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio #4 (9/9)

- Tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono di segno concorde (e in particolare > 0) per

$$0 < k < 12$$

⇒ per tali valori di k le radici del polinomio $p(\lambda)$ sono tutte a parte reale strettamente negativa



Esempio #5 (1/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + k\lambda^2 + (15k + 1)\lambda + 50k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- Condizione necessaria è che tutti i coefficienti di $p(\lambda)$ siano di segno concorde \Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} \bullet a_3 = 1 > 0, \forall k \\ \bullet a_2 = k > 0 \\ \bullet a_1 = 15k + 1 > 0 \Rightarrow k > -1/15 \\ \bullet a_0 = 50k > 0 \Rightarrow k > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k > 0$$

- Per avere una condizione necessaria e sufficiente, occorre calcolare la tabella di Routh



Esempio #5 (2/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + k\lambda^2 + (15k + 1)\lambda + 50k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

3	1	$15k + 1$	0	...
2	k	$50k$	0	...
1	b_1	0
0	$a_0 = 50k$	0

$$b_1 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 15k + 1 \\ k & 50k \end{array} \right| / k = - \frac{50k - k(15k + 1)}{k} = 15k - 49$$



Esempio #5 (3/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + k\lambda^2 + (15k + 1)\lambda + 50k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

3	1	$15k + 1$	0	...
2	k	$50k$	0	...
1	$15k - 49$	0	0	...
0	$a_0 = 50k$	0	0	...

⇒ occorre vedere per quali valori di k tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono di segno concorde



Esempio #5 (4/4)

► La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

3	1	$15k + 1$	0	...
2	k	$50k$	0	...
1	$15k - 49$	0
0	$a_0 = 50k$	0

- $1 > 0, \forall k$
 - $k > 0$
 - $15k - 49 > 0 \Rightarrow k > 49/15$
 - $a_0 = 50k > 0$
- } $\Rightarrow k > 49/15 = 3.2\bar{6}$

\Rightarrow per $k > 49/15$ le radici del polinomio $p(\lambda)$ sono tutte a parte reale strettamente positiva



Esempio #6 (1/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha + 5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$

per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- Condizione necessaria è che tutti i coefficienti di $p(\lambda)$ siano di segno concorde \Rightarrow

$$\bullet a_4 = 1 > 0, \forall \alpha, \forall \beta$$

$$\bullet a_3 = 1 > 0, \forall \alpha, \forall \beta$$

$$\bullet a_2 = \alpha + 5 > 0 \Rightarrow \alpha > -5$$

$$\bullet a_1 = 2 > 0, \forall \alpha, \forall \beta$$

$$\bullet a_0 = \beta + 3 > 0 \Rightarrow \beta > -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha > -5 \\ \beta > -3 \end{cases}$$

- Per avere una condizione necessaria e sufficiente, occorre calcolare la tabella di Routh



Esempio #6 (2/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha + 5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$

per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	$\alpha + 5$	$\beta + 3$	0	...
3	1	2	0	0	...
2	b_2	b_0	0
1	c_1	0	0
0	$a_0 = \beta + 3$	0	0

$$b_2 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & \alpha + 5 \\ 1 & 2 \end{array} \right| / 1 = -(2 - (\alpha + 5)) = \alpha + 3$$



Esempio #6 (3/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha + 5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$

per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	$\alpha + 5$	$\beta + 3$	0	...
3	1	2	0	0	...
2	$\alpha + 3$	b_0	0
1	c_1	0	0
0	$a_0 = \beta + 3$	0	0

$$b_0 = - \begin{vmatrix} 1 & \beta + 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} / 1 = \beta + 3$$



Esempio #6 (4/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha + 5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$

per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	$\alpha + 5$	$\beta + 3$	0	...
3	1	2	0	0	...
2	$\alpha + 3$	$\beta + 3$	0
1	c_1	0	0
0	$a_0 = \beta + 3$	0	0

$$c_1 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \alpha + 3 & \beta + 3 \end{array} \right| / (\alpha + 3) = - \frac{\beta + 3 - 2(\alpha + 3)}{\alpha + 3} = \frac{2\alpha - \beta + 3}{\alpha + 3}$$



Esempio #6 (5/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha + 5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$
 per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

4	1	$\alpha + 5$	$\beta + 3$	0	...
3	1	2	0	0	...
2	$\alpha + 3$	$\beta + 3$	0	0	...
1	$\frac{2\alpha - \beta + 3}{\alpha + 3}$	0	0	0	...
0	$a_0 = \beta + 3$	0	0	0	...

⇒ occorre vedere per quali α, β tutti gli elementi della prima colonna della tabella sono concordi



Esempio #6 (6/7)

4	1	$\alpha + 5$	$\beta + 3$	0	...
3	1	2	0	0	...
2	$\alpha + 3$	$\beta + 3$	0
1	$\frac{2\alpha - \beta + 3}{\alpha + 3}$	0	0
0	$a_0 = \beta + 3$	0	0

- $1 > 0, \forall \alpha, \forall \beta$
- $1 > 0, \forall \alpha, \forall \beta$
- $\alpha + 3 > 0 \Rightarrow \alpha > -3$
- $\frac{2\alpha - \beta + 3}{\alpha + 3} > 0 \Rightarrow 2\alpha - \beta + 3 > 0$, poiché $\alpha > -3 \Rightarrow \beta < 2\alpha + 3$
- $a_0 = \beta + 3 > 0 \Rightarrow \beta > -3$



Esempio #6 (7/7)

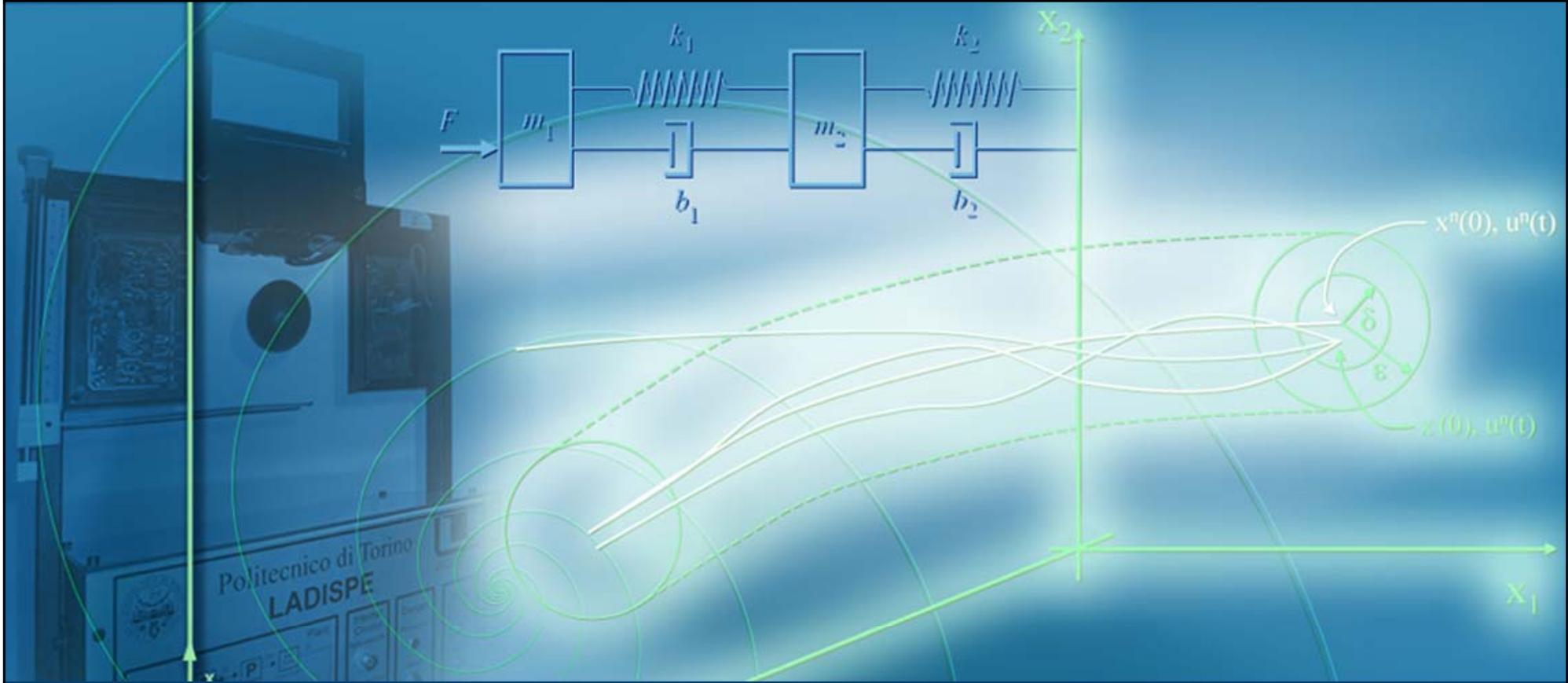
- Tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono di segno concorde (e in particolare > 0) per

$$\{ -3 < \beta < 2\alpha + 3 \} \quad \wedge \quad \{ \alpha > -3 \}$$

⇒ per tali valori di α, β le radici del polinomio $p(\lambda)$ sono tutte a parte reale strettamente negativa

- Rappresentando geometricamente i vari vincoli sul piano cartesiano (α, β) , si vede che il vincolo $\alpha > -3$ è già automaticamente soddisfatto dalla condizione

$$-3 < \beta < 2\alpha + 3$$



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Criterio di Jury

Criterio di Jury (1/3)

- Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le n radici del polinomio a coefficienti reali di grado n

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

siano in modulo strettamente minori di 1 è che

- Nel caso $n=2$, siano soddisfatte 3 disuguaglianze:

- 1) $p(\lambda = 1) > 0$

- 2) $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0$

- 3) $|a_n| > |a_0|$

- Nel caso $n > 2$, oltre alle 3 precedenti disuguaglianze, siano soddisfatte anche altre $n - 2$ disuguaglianze fra i moduli di alcuni elementi della **tabella di Jury** seguente, costituita da $n - 1$ coppie di righe

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0

A red arrow points from the right side of the second row to the left side of the first row. A red dashed arrow points from the left side of the second row to the right side of the first row.

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	

$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, b_{n-2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, b_{n-2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Critério di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	

The diagram shows the construction of the Jury table. The first two rows are the coefficients of the characteristic polynomial $p(\lambda)$ in ascending and descending order. The third row contains the coefficients b_k calculated from the first two rows. The fourth row shows the coefficients b_k in reverse order, with a red arrow pointing from the first row to the fourth row, indicating the reversal process. A dashed red arrow below the fourth row points from left to right.

Critério di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
$n-2$	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
$n-2$	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}, \quad c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix}$$

Criterion di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
$n-2$	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}, \quad c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad c_{n-2} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
$n-2$	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		
$n-2$	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_0		

$$y(t) = Cx(t)$$

Criterion di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
$n-2$	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		
$n-2$	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_0		
\dots	\dots	\dots	\dots				
2	z_0	z_1	z_2				
2	z_2	z_1	z_0				

← (solid arrow pointing left from z_2 to z_0)
→ (dashed arrow pointing right from z_2 to z_0)

$$y(t) = Cx(t)$$

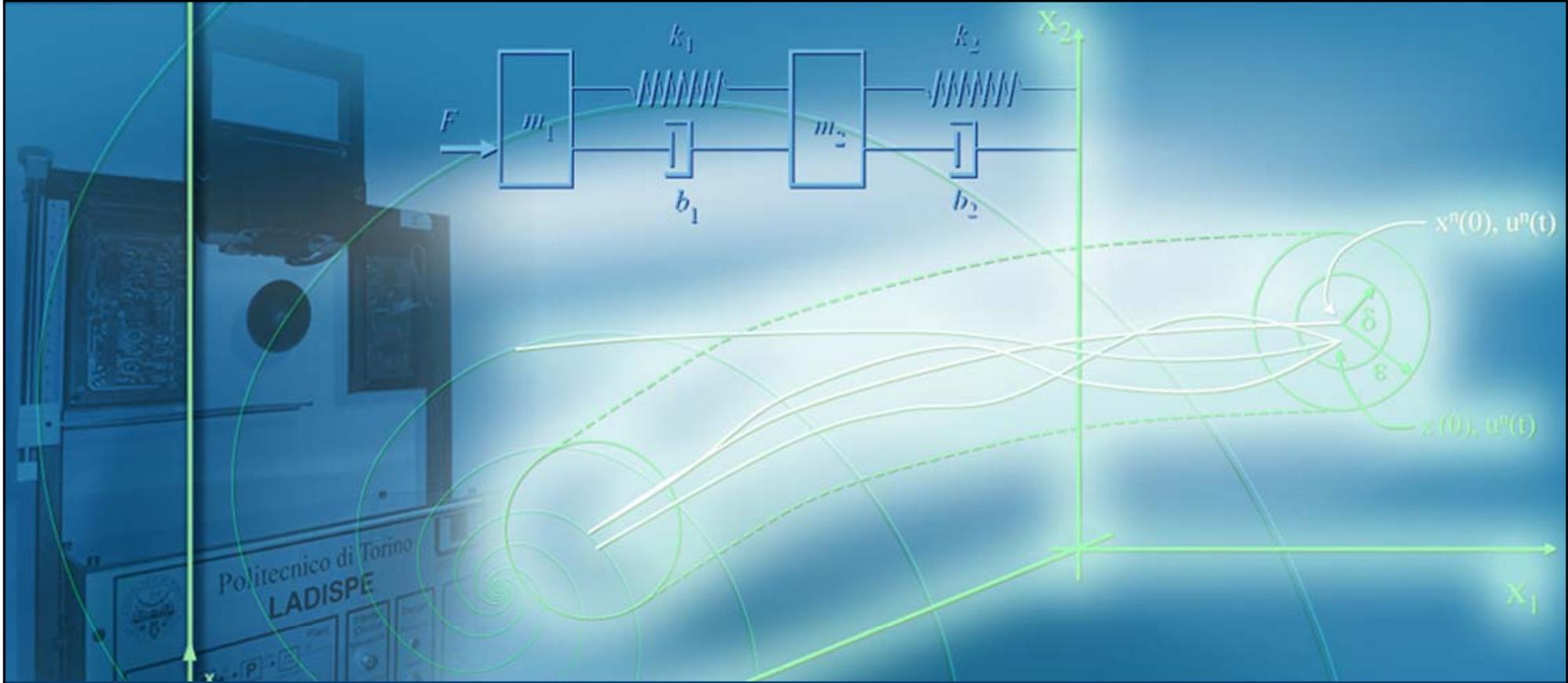
Criterion di Jury (3/3)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
$n-2$	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		
$n-2$	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_0		
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		
2	z_0	z_1	z_2				
2	z_2	z_1	z_0				

- Devono essere soddisfatte le seguenti $n - 2$ disequazioni:

$$|b_0| > |b_{n-1}|, \quad |c_0| > |c_{n-2}|, \quad \dots, \quad |z_0| > |z_2|$$



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Esempi di applicazione del criterio di Jury



Esempio #1 (1/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte

- Le 3 seguenti disuguaglianze che non richiedono la costruzione della tabella di Jury

1) $p(\lambda = 1) > 0?$

$$p(\lambda = 1) = 2 + 1 + 1 + 0.5 = 4.5 > 0$$

2) $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0?$

$$(-1)^3 p(\lambda = -1) = -(-2 + 1 - 1 + 0.5) = 1.5 > 0$$

3) $|a_n| > |a_0|?$

$$|a_3 = 2| = 2 > |a_0 = 0.5| = 0.5$$



Esempio #1 (2/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte
 - Essendo $n > 2$, anche $n - 2 = 1$ disuguaglianza che richiede la costruzione della tabella di Jury seguente, costituita da $n - 1 = 2$ coppie di righe



Esempio #1 (3/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

3		0.5	1	1	2
3		2	1	1	0.5
2		b_0	b_1	b_2	

$$b_0 = \begin{vmatrix} 0.5 & 2 \\ 2 & 0.5 \end{vmatrix} = -3.75, \quad b_1 = \begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.5 = b_2$$



Esempio #1 (3/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

3	0.5	1	1	2
3	2	1	1	0.5
2	-3.75	-1.5	-1.5	
2	-1.5	-1.5	-3.75	



Esempio #1 (3/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

3	0.5	1	1	2
3	2	1	1	0.5
2	-3.75	-1.5	-1.5	
2	-1.5	-1.5	-3.75	

$$|b_0 = -3.75| = 3.75 > |b_2 = -1.5| = 1.5$$

- Tutte le disuguaglianze richieste dal criterio di Jury sono soddisfatte \Rightarrow tutte le radici del polinomio $p(\lambda)$ sono in modulo strettamente minori di 1



Esempio #2 (1/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte

- Le 3 seguenti disuguaglianze che non richiedono la costruzione della tabella di Jury

1) $p(\lambda = 1) > 0?$

$$p(\lambda = 1) = 2 + 1 + 3 + 0.5 - 1 = 5.5 > 0$$

2) $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0?$

$$(-1)^4 p(\lambda = -1) = 2 - 1 + 3 - 0.5 - 1 = 2.5 > 0$$

3) $|a_n| > |a_0|?$

$$|a_4 = 2| = 2 > |a_0 = -1| = 1$$



Esempio #2 (2/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono essere soddisfatte
 - Essendo $n > 2$, anche altre $n - 2 = 2$ disuguaglianze che richiedono la costruzione della tabella di Jury seguente, costituita da $n - 1 = 3$ coppie di righe



Esempio #2 (3/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4		-1	0.5	3	1	2
4		2	1	3	0.5	-1
3		b_0	b_1	b_2	b_3	

$$b_0 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad b_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{vmatrix} = -2.5$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad b_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$



Esempio #2 (3/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4		-1	0.5	3	1	2
4		2	1	3	0.5	-1
3		-3	-2.5	-9	-2	
3		-2	-9	-2.5	-3	

A red arrow points from the right to the left across the third row. A red dashed arrow points from the left to the right across the fourth row.



Esempio #2 (3/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4	−1	0.5	3	1	2
4	2	1	3	0.5	−1
3	−3	−2.5	−9	−2	
3	−2	−9	−2.5	−3	
2	c_0	c_1	c_2		

$$c_0 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5, \quad c_1 = \begin{vmatrix} -3 & -9 \\ -2 & -2.5 \end{vmatrix} = -10.5, \quad c_2 = \begin{vmatrix} -3 & -2.5 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} = 22$$



Esempio #2 (3/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4	-1	0.5	3	1	2
4	2	1	3	0.5	-1
3	-3	-2.5	-9	-2	
3	-2	-9	-2.5	-3	
2	5	-10.5	22		
2	22	-10.5	5		

A red arrow points from the 22 in the second row of the last column to the 5 in the first row of the last column. A red dashed arrow points from the 5 in the first row of the last column to the right.



Esempio #2 (4/4)

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4	-1	0.5	3	1	2
4	2	1	3	0.5	-1
3	-3	-2.5	-9	-2	
3	-2	-9	-2.5	-3	
2	5	-10.5	22		
2	22	-10.5	5		

$$|b_0 = -3| = 3 > |b_3 = -2| = 2$$

$$\text{ma } |c_0 = 5| = 5 < |c_2 = 22| = 22$$

- Non tutte le disuguaglianze richieste dal criterio di Jury sono soddisfatte \Rightarrow non tutte le radici di $p(\lambda)$ sono in modulo strettamente minori di 1



Esempio #3 (1/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte

- Le 3 seguenti disuguaglianze che non richiedono la costruzione della tabella di Jury

1) $p(\lambda = 1) > 0?$

$$p(\lambda = 1) = 4 + 0.5k > 0 \Rightarrow k > -8$$

2) $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0?$

$$(-1)^3 p(\lambda = -1) = 2 - 0.5k > 0 \Rightarrow k < 4$$

3) $|a_n| > |a_0|?$

$$|a_3 = 2| = 2 > |a_0 = 0.5k| = 0.5|k| \Rightarrow |k| < 4$$



Esempio #3 (2/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono essere soddisfatte
 - Essendo $n > 2$, anche $n - 2 = 1$ disuguaglianza che richiede la costruzione della tabella di Jury seguente, costituita da $n - 1 = 2$ coppie di righe



Esempio #3 (3/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

3		0.5k	1	1	2
3		2	1	1	0.5k
2		b_0	b_1	b_2	

$$b_0 = \begin{vmatrix} 0.5k & 2 \\ 2 & 0.5k \end{vmatrix} = 0.25k^2 - 4, \quad b_1 = \begin{vmatrix} 0.5k & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.5k - 2 = b_2$$



Esempio #3 (3/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

3	0.5k	1	1	2
3	2	1	1	0.5k
2	$0.25k^2 - 4$	$0.5k - 2$	$0.5k - 2$	
2	$0.5k - 2$	$0.5k - 2$	$0.25k^2 - 4$	



Esempio #3 (3/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

3	0.5k	1	1	2
3	2	1	1	0.5k
2	$0.25k^2 - 4$	$0.5k - 2$	$0.5k - 2$	
2	$0.5k - 2$	$0.5k - 2$	$0.25k^2 - 4$	

⇒ deve essere soddisfatta anche la disuguaglianza

$$|b_0 = 0.25k^2 - 4| > |b_2 = 0.5k - 2|$$



Esempio #3 (4/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 deve risultare allora che

1) $p(\lambda = 1) = 4 + 0.5k > 0 \Rightarrow k > -8$

2) $(-1)^n p(\lambda = -1) = 2 - 0.5k > 0 \Rightarrow k < 4$

3) $|a_n| > |a_0| \Rightarrow |k| < 4$

4) $|b_0 = 0.25k^2 - 4| > |b_2 = 0.5k - 2| \Leftrightarrow$

$$|0.5k + 2| \cdot |0.5k - 2| > |0.5k - 2| \Leftrightarrow$$

$$\text{per } |k| < 4, |0.5k + 2| > 1 \Rightarrow k > -2$$

\Rightarrow occorre complessivamente che $-2 < k < 4$