

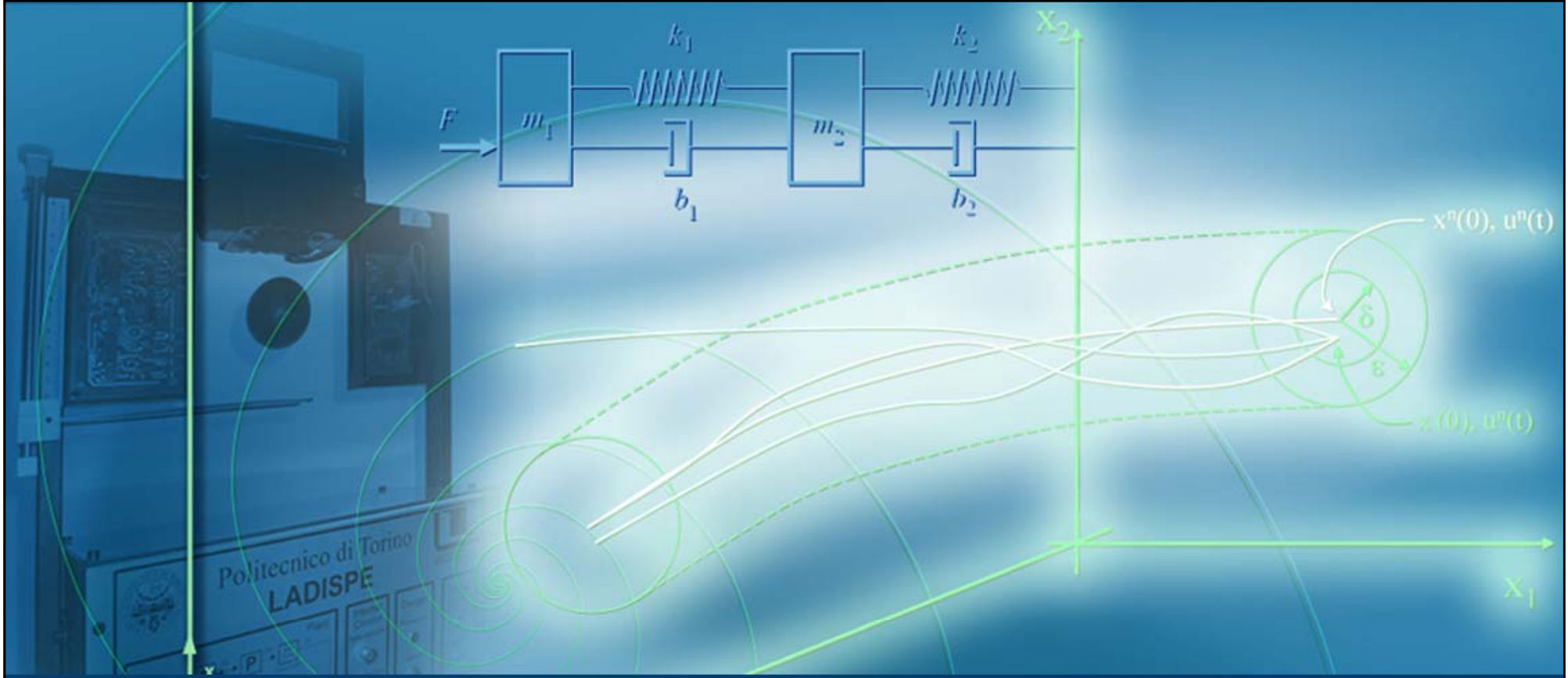
## Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

**Soluzione per sistemi dinamici LTI TD**

$$y(t) = Cx(t)$$

## Soluzione per sistemi LTI TD

- Soluzione nel dominio del tempo
- Soluzione nel dominio della frequenza
- Esempio di soluzione



## Soluzione per sistemi LTI TD

Soluzione nel dominio del tempo

$$y(t) = Cx(t)$$

## Descrizione di sistemi dinamici LTI TD

- Il comportamento dinamico di un sistema LTI TD è descritto dalle equazioni di ingresso – stato – uscita:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

- Si ricorda che:
  - $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^q$
  - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Il movimento di sistemi dinamici LTI TD

- Utilizzando le equazioni di stato:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

si vuole calcolare l'espressione  $x(k)$  del **movimento dello stato** a partire da uno stato iniziale  $x(0) = x_0$  noto e a fronte dell'ingresso  $u(k)$  noto  $\forall k \geq 0$

$$y(t) = Cx(t)$$

## La formula di Lagrange per il calcolo di $x(k)$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

- L'espressione di  $x(k)$  può essere calcolata in modo iterativo:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) =$$

$$= A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

⋮

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## La formula per il calcolo di $x(k)$

- L'espressione di  $x(k)$  si calcola con la seguente formula:

$$\begin{aligned} x(k) &= \underbrace{A^k x(0)}_{x_\ell(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)}_{x_f(k)} = \\ &= x_\ell(k) + x_f(k) \end{aligned}$$

- $x_\ell(k) \rightarrow$  **movimento libero dello stato**
- $x_f(k) \rightarrow$  **movimento forzato dello stato**
- Per il calcolo esplicito di  $x(k)$  è utile fare ricorso alla **trasformata zeta**

$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo del movimento dell'uscita (1/2)

- Il **movimento dell'uscita (risposta del sistema)**  $y(k)$  si ottiene dalla relazione statica:

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

dopo avere sostituito l'espressione di  $x(k)$  precedentemente ottenuta:

$$\begin{aligned} y(k) &= \underbrace{CA^k x(0)}_{y_\ell(k)} + \underbrace{C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) + Du(k)}_{y_f(k)} = \\ &= y_\ell(k) + y_f(k) \end{aligned}$$

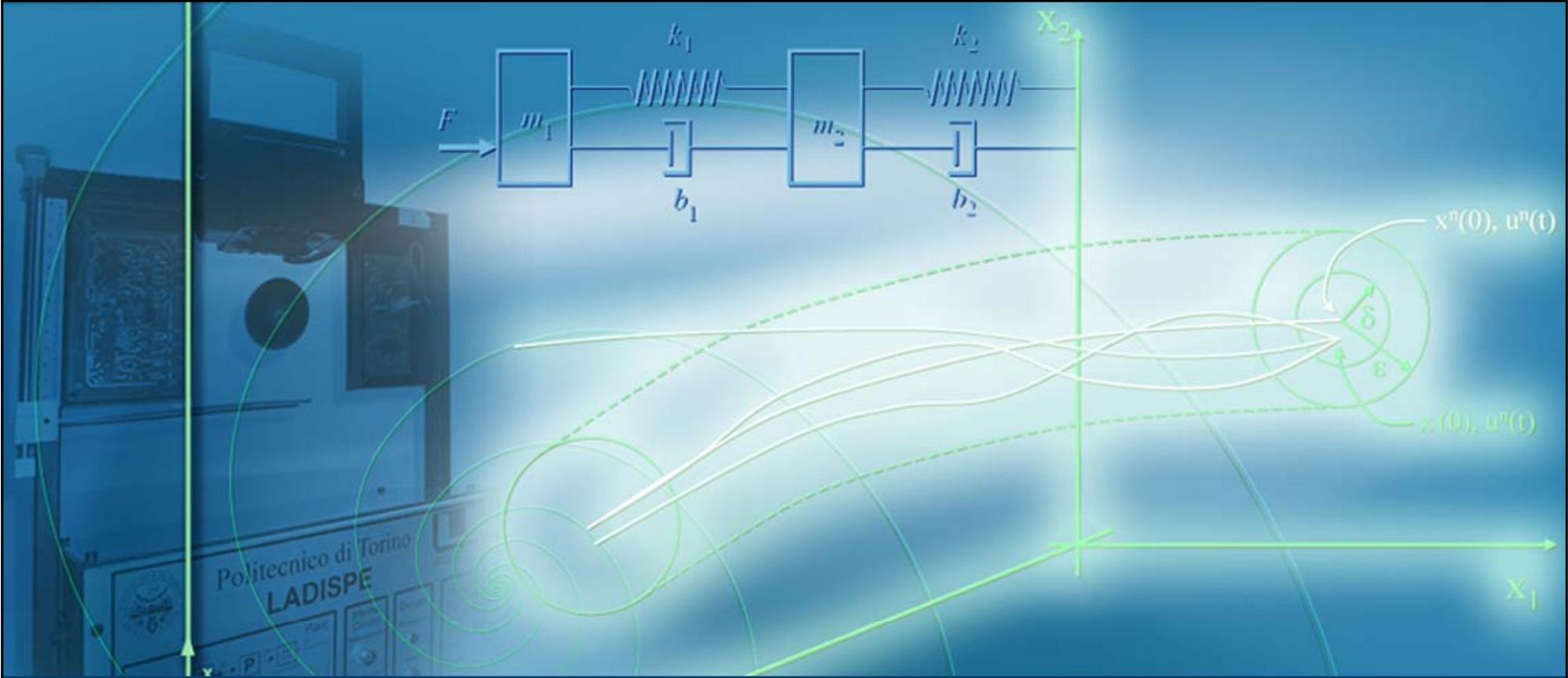


$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo del movimento dell'uscita (2/2)

$$\begin{aligned} y(k) &= \underbrace{CA^k x(0)}_{y_\ell(k)} + \underbrace{C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) + Du(k)}_{y_f(k)} = \\ &= y_\ell(k) + y_f(k) \end{aligned}$$

- $y_\ell(k) \rightarrow$  movimento libero dell'uscita
  - $y_f(k) \rightarrow$  movimento forzato dell'uscita
- Per il calcolo esplicito di  $y(k)$  è utile fare ricorso alla **trasformata zeta**



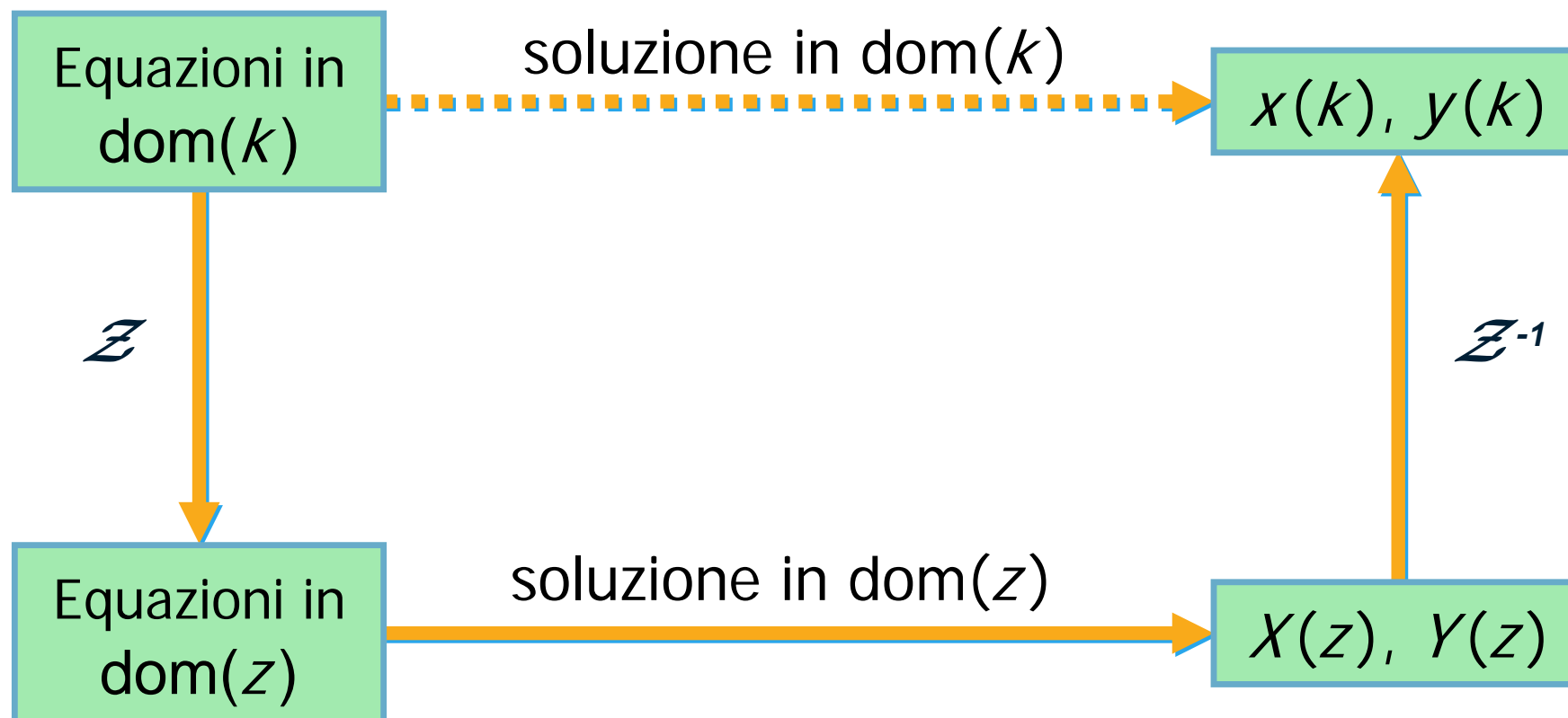
## Soluzione per sistemi LTI TD

Soluzione nel dominio della frequenza

$$y(t) = Cx(t)$$

## Schema della soluzione

- Il calcolo di  $x(k)$  e  $y(k)$  con la trasformata zeta avviene secondo lo schema:



$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo della soluzione (1/4)

- La soluzione nel dominio della frequenza si ottiene trasformando le equazioni di ingresso - stato - uscita:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

↓  $\mathcal{Z}$

$$\begin{cases} zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

e calcolando esplicitamente  $X(z)$  e  $Y(z)$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo della soluzione (2/4)

► Per il movimento dello stato si ottiene:

$$\begin{aligned} X(z) &= \underbrace{z(zI - A)^{-1} x(0)}_{\substack{\text{MOVIMENTO LIBERO} \\ X_\ell(z) = \mathcal{Z}(x_\ell(k))}} + \underbrace{(zI - A)^{-1} B U(z)}_{\substack{\text{MOVIMENTO FORZATO} \\ X_f(z) = \mathcal{Z}(x_f(k))}} = \\ &= H_0^x(z) x(0) + H_f^x(z) U(z) \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo della soluzione (3/4)

► Per il movimento dell'uscita si ha:

$$Y(z) = \underbrace{zC(zI - A)^{-1}x(0)}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA} \\ Y_\ell(z) = \mathcal{Z}(y_\ell(k))}} + \underbrace{\left[ C(zI - A)^{-1}B + D \right] U(z)}_{\substack{\text{RISPOSTA FORZATA} \\ Y_f(z) = \mathcal{Z}(y_f(k))}}$$

$H(z) \rightarrow$  MATRICE DI TRASFERIMENTO

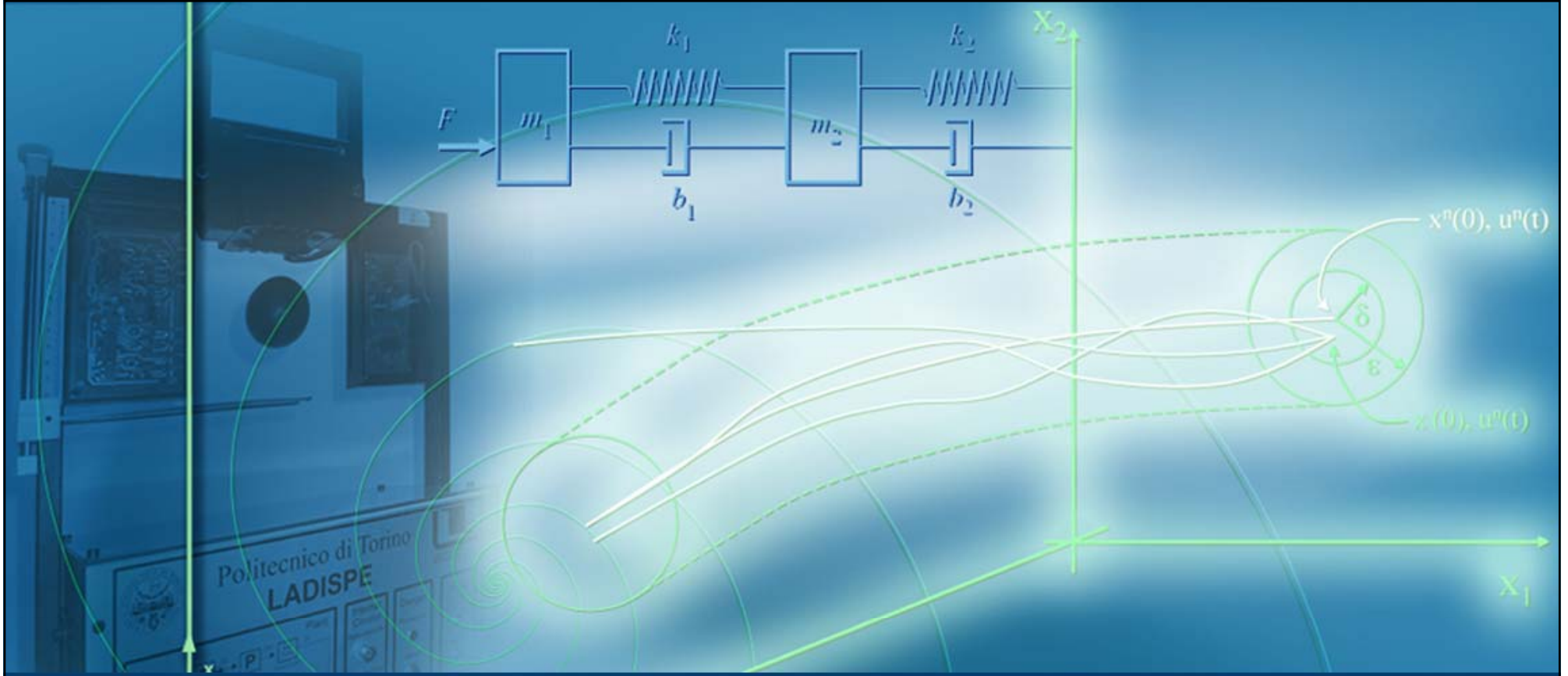
$$= H_0(z)x(0) + H(z)U(z)$$

►  $H(z) \rightarrow$  matrice di trasferimento del sistema (legame ingresso uscita)

$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo della soluzione (4/4)

- $H^x_o(z)$ ,  $H^x_f(z)$ ,  $H_o(z)$ ,  $H(z)$  sono matrici complesse i cui elementi sono funzioni razionali fratte nella variabile complessa  $z$
- $H(z)$  è la **matrice di trasferimento** (legame tra l'ingresso e l'uscita)
- Per un sistema a  $p$  ingressi e  $q$  uscite  $H(z)$  è una matrice a  $q$  righe e  $p$  colonne di funzioni razionali fratte della variabile  $z$
- Se  $p = q = 1$  (sistema SISO) →  $H(z)$  viene detta **funzione di trasferimento**



## Soluzione per sistemi LTI TD

Esempio di soluzione



## Formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema dinamico LTI TD:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3.5 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k)\end{aligned}$$

- Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato  $x(k)$  e dell'uscita  $y(k)$  nel caso in cui
- L'ingresso sia un gradino di ampiezza 2 ( $u(k) = 2\varepsilon(k)$ )
  - Le condizioni iniziali siano:  $x(0) = [1 \ -2]^T$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Procedimento di soluzione

- I passi da seguire sono:
  - Calcolo della soluzione  $X(z)$  nel dominio della trasformata zeta
  - Calcolo della scomposizione in fratti semplici (e dei corrispondenti residui) di  $X(z)$
  - Calcolo di  $x(k)$  tramite antitrasformazione della scomposizione in fratti semplici di  $X(z)$
  - Calcolo di  $y(k)$  tramite la relazione statica  $y(k) = Cx(k)$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Impostazione dei calcoli in dom(z)

- Soluzione nel dominio della trasformata zeta:

$$X(z) = \underbrace{z(zI - A)^{-1} x(0)}_{X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - A)^{-1} BU(z)}_{X_f(z)}$$

- Con:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3.5 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, U(z) = \frac{2z}{z-1}$$

## Passi della soluzione in dom(z)

$$X(z) = \underbrace{z(zI - A)^{-1} x(0)}_{X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - A)^{-1} BU(z)}_{X_f(z)}$$

- Per calcolare  $X(z)$  procediamo con i seguenti passi:
- Calcolo del termine  $(zI - A)^{-1}$
  - Calcolo del movimento libero  $X_\ell(z)$
  - Calcolo del movimento forzato  $X_f(z)$
  - Calcolo di  $X(z)$  come  $X(z) = X_\ell(z) + X_f(z)$
  - Scomposizione i fratti semplici di  $X(z)$

## Calcolo di $(zI - A)^{-1}$

► Ricordiamo che:  $(zI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(zI - A)} \text{Adj}(zI - A)$

$$\begin{aligned} (zI - A)^{-1} &= \left[ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3.5 & -0.5 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} z-3 & 0 \\ 3.5 & z+0.5 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{\underbrace{(z-3)(z+0.5)}_{\det(zI-A)}} \underbrace{\begin{bmatrix} z+0.5 & 0 \\ -3.5 & z-3 \end{bmatrix}}_{\text{Adj}(zI-A)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-3} & 0 \\ \frac{-3.5}{(z-3)(z+0.5)} & \frac{1}{z+0.5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo di $X_\ell(z)$

$$X_\ell(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) = z \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{z-3} & 0 \\ -3.5 & \frac{1}{z+0.5} \end{bmatrix}}_{(zI - A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{x(0)} =$$

$$= z \begin{bmatrix} \frac{1}{z-3} \\ \frac{-2z+2.5}{(z-3)(z+0.5)} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo di $X_f(z)$

$$X_f(z) = (zI - A)^{-1} BU(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{z-3} & 0 \\ -3.5 & 1 \\ \frac{1}{(z-3)(z+0.5)} & \frac{1}{z+0.5} \end{bmatrix}}_{(zI - A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_B U(z) =$$

$$\begin{matrix} \overline{=} \\ \uparrow \\ U(z) = \frac{2z}{z-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-3} \\ \frac{2z-9.5}{(z-3)(z+0.5)} \end{bmatrix} \frac{2z}{z-1} = z \begin{bmatrix} \frac{2}{(z-3)(z-1)} \\ \frac{4z-19}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo di $X(z)$

►  $X(z)$  viene calcolato come somma di  $X_\ell(z)$  e  $X_f(z)$

$$X(z) = X_\ell(z) + X_f(z) = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} \\ \frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} \end{bmatrix}$$



$$y(t) = Cx(t)$$

## Scomposizione in fratti semplici di $X(z)$

$$X(z) = z \left[ \begin{array}{c} \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} \\ \frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} \end{array} \right] = z \left[ \begin{array}{c} \frac{R_1^{(1)}}{z-3} + \frac{R_2^{(1)}}{z-1} \\ \frac{R_1^{(2)}}{z-3} + \frac{R_2^{(2)}}{z+0.5} + \frac{R_3^{(2)}}{z-1} \end{array} \right]$$

## Calcolo dei residui per $X_1(z)$

$$\tilde{X}_1(z) = \frac{X_1(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} = \frac{R_1^{(1)}}{z-3} + \frac{R_2^{(1)}}{z-1}$$

$$R_1^{(1)} = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \tilde{X}_1(z) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} = 2$$

$$R_2^{(1)} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \tilde{X}_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} = -1$$

$$\rightarrow \tilde{X}_1(z) = \frac{2}{z-3} - \frac{1}{z-1}$$

$$\rightarrow X_1(z) = z\tilde{X}_1(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z-1}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Calcolo dei residui per $X_2(z)$

$$\tilde{X}_2(z) = \frac{X_2(z)}{z} = \frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} = \frac{R_1^{(2)}}{z-3} + \frac{R_2^{(2)}}{z+0.5} + \frac{R_3^{(2)}}{z-1}$$

$$R_1^{(2)} = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \tilde{X}_2(z) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} = -2$$

$$R_2^{(2)} = \lim_{z \rightarrow -0.5} (z+0.5) \tilde{X}_2(z) = \lim_{z \rightarrow -0.5} (z+0.5) \frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} = -5$$

$$R_3^{(2)} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \tilde{X}_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} = 5$$

$$\rightarrow \tilde{X}_2(z) = -\frac{2}{z-3} - \frac{5}{z+0.5} + \frac{5}{z-1}$$

$$\rightarrow X_2(z) = z\tilde{X}_2(z) = -\frac{2z}{z-3} - \frac{5z}{z+0.5} + \frac{5z}{z-1}$$

## Risultato $x(k)$

► Pertanto:

$$X(z) = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z-1} \\ -\frac{2z}{z-3} - \frac{5z}{z+0.5} + \frac{5z}{z-1} \end{bmatrix}$$

► Si può procedere con l'antitrasformazione ricordando che  $Ra^k \varepsilon(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{Rz}{z-a} \right\}$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^k - 1 \\ -2 \cdot 3^k - 5 \cdot (-0.5)^k + 5 \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

## Risultato $y(k)$

- L'espressione del movimento dell'uscita si ottiene dalla relazione  $y(k) = C x(k)$ :

$$\begin{aligned} y(k) = Cx(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^k - 1 \\ -2 \cdot 3^k - 5 \cdot (-0.5)^k + 5 \end{bmatrix} \varepsilon(k) = \\ &= \left( 4 \cdot 3^k + 5 \cdot (-0.5)^k - 6 \right) \varepsilon(k) \end{aligned}$$