01AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Tipologia degli esercizi proposti nel compito del 21/II/2003

In questo documento si riporta la tipologia degli esercizi proposti con la relativa soluzione. Per consentire agli studenti una migliore comprensione degli errori commessi, nella tabella seguente sono indicate le posizioni dei vari esercizi nei diversi compiti, nonché il livello di difficoltà dei singoli esercizi. Si ricorda che nel compito vengono proposte quattro possibili risposte ad ogni esercizio, fra le quali deve essere individuata l'unica esatta.

Esercizio	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13
Compito #1 (pag. 11)	4	2	9	13	8	11	7	10	1	6	12	5	3
Compito #2 (pag. 21)	6	13	12	7	4	10	2	1	11	8	3	9	5
Compito #3 (pag. 31)	12	11	13	5	10	6	7	9	1	2	3	4	8
Compito #4 (pag. 41)	4	3	6	11	9	2	8	7	1	10	12	5	13
Compito #5 (pag. 51)	9	1	4	8	7	11	10	13	2	12	5	6	3
Compito #6 (pag. 61)	8	1	13	4	12	11	5	7	10	6	2	9	3
Compito #7 (pag. 71)	3	10	1	7	13	8	5	4	11	12	2	6	9
Compito #8 (pag. 81)	1	11	13	8	9	7	3	2	4	6	12	10	5
Livello di difficoltà	alto	basso	medio	medio	basso	alto	alto	basso	basso	basso	alto	alto	medio

Esercizio 1 - Date le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

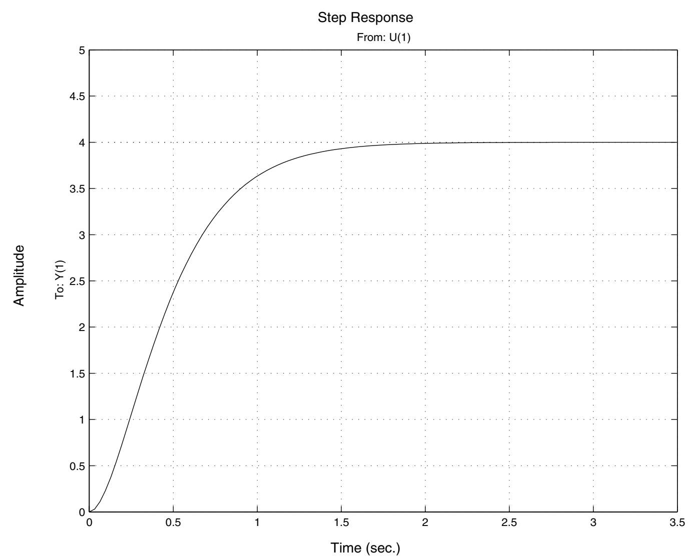
di un modello LTI in variabili di stato a tempo discreto, determinare, se possibile, i coefficienti L del ricostruttore asintotico che permettono di posizionare gli autovalori del sistema osservato in $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.4$, $\lambda_3 = 0.5$.
Soluzione: $L = [0.98\ 4.48\ -1.1]^T$.

Esercizio 2 - Un sistema dinamico non lineare, a tempo discreto, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2k \\ -0.2 & 1.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

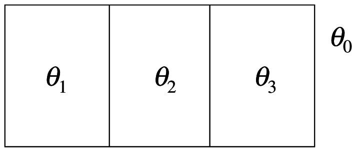
Analizzare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio al variare del parametro k.
Soluzione: Non è possibile dedurre nulla sulla stabilità del punto di equilibrio del sistema non lineare per alcun valore di k.

Esercizio 3 - Dato il sistema dinamico SISO avente la seguente risposta $y(t)$ al gradino unitario:



determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di tale sistema (si presti attenzione alle scale di entrambi gli assi).
Soluzione: La funzione di trasferimento è $G(s) = \dfrac{64}{s^2 + 8s + 16}$.

Esercizio 4 - Un sistema termico è costituito dai corpi omogenei **1**, **2** e **3**, aventi temperatura θ_1, θ_2 e θ_3 rispettivamente; l'ambiente esterno si trova alla temperatura costante θ_0. Le capacità termiche dei tre corpi sono date da $C_1 = C_3 = 1$ J/K e $C_2 = 2$ J/K, mentre le conduttanze termiche fra i corpi e fra ciascuno di essi e l'ambiente esterno sono rispettivamente: $K_{12} = 1$ W/K, $K_{23} = 2$ W/K, $K_{10} = K_{20} = K_{30} = 0.5$ W/K. (Si ricorda che la conduttanza termica K_{ij} è pari a $1/R_{ij}$, ove R_{ij} è la resistenza termica fra i corpi i e j).



Determinare la matrice A dell'equazione di stato del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, scegliendo come variabile di stato $x = [\theta_1\ \theta_2\ \theta_3]^T$ e come ingresso $u = \theta_0$.

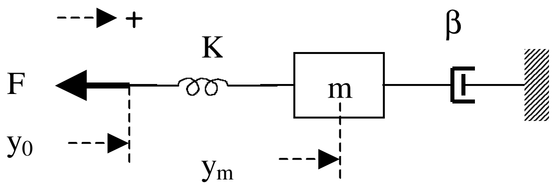
Soluzione: $A = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1.75 & 1 \\ 0 & 2 & -2.5 \end{bmatrix}$

Esercizio 5 - Dato il sistema dinamico SISO descritto dalla f.d.t.

$$G(s) = \frac{s^2 + 3.5s + 3}{s^4 + 4.5s^3 - 2s^2 + 3s + 2.5}$$

calcolare la risposta a regime permanente, y_∞, ad un gradino di ampiezza 5, $u(t) = 5\varepsilon(t)$, con condizioni iniziali nulle.
Soluzione: Non si può determinare y_∞ perché il sistema non va a regime.

Esercizio 6 - Si consideri il sistema seguente:



dove $F(t)$ rappresenta una forza. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ fra $F(s)$ e la posizione $y_m(s)$.

Soluzione: $G(s) = \dfrac{-1}{ms^2 + \beta s}$

Esercizio 7 - Calcolare l'uscita $y(t)$ di un sistema che, partendo da condizioni iniziali nulle, abbia modello ingresso-uscita $\dot{y}(t) + 25y(t) = 100u(t)$ e sia eccitato dall'ingresso $u(t) = \sqrt{2}\sin(25t)$, $t \geq 0$.

Soluzione: $y(t) = \dfrac{4}{\sqrt{2}}e^{-25t} + 4\sin\left(25t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Esercizio 8 - Date le seguenti matrici A e B di un modello LTI in variabili di stato:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinare, se possibile, il vettore K dei coefficienti di retroazione dagli stati che permettono di posizionare gli autovalori del sistema retroazionato in:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$$

Soluzione: Non è possibile progettare la retroazione dagli stati richiesta.

Esercizio 9 - Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10s - 10}{(s^2 + 11s + 10)(s + 2)}$$

determinare l'insieme T delle costanti di tempo dei poli.
Soluzione: $T = \{0.1, 0.5, 1\}$

Esercizio 10 - Dato il seguente modello, in cui u è l'ingresso, y è l'uscita, x ed e sono variabili interne:

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= \dot{e} + 2e \\ \dot{y} + 10y &= \dot{x} + 5x \\ e &= u + y \end{aligned}$$

calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = Y(s)/U(s)$.

Soluzione: $G(s) = \dfrac{(s+2)(s+5)}{4s}$

Esercizio 11 - Dato il sistema SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3 + (p_1 + 4)s^2 + 6s + p_2}$$

dire per quali valori dei parametri p_1 e p_2 il sistema risulta esternamente stabile (ovvero i poli di $G(s)$ si trovano nella regione di asintotica stabilità).
Soluzione: $0 < p_2 < 6(p_1 + 4)$

Esercizio 12 - Dato il sistema dinamico lineare SISO a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(z) = 0.25\frac{z + 0.5}{z + 2}$$

calcolare i primi 4 campioni della risposta ad un gradino di ampiezza 4, $u(k) = 4\varepsilon(k)$, con condizioni iniziali nulle.
Soluzione: $y(0) = 1, \quad y(1) = -0.5, \quad y(2) = 2.5, \quad y(3) = -3.5$

Esercizio 13 - Dato il sistema dinamico non lineare a tempo discreto descritto da:

$$\begin{array}{rcl} x_1\,(k+1) & = & 0.5 \cdot x_1(k) + x_1(k) \cdot x_2(k) \\ x_2\,(k+1) & = & -0.5 \cdot x_2(k) + 3 \cdot x_2^2(k) + 2 \cdot u(k) \\ y\,(k) & = & x_1(k) \cdot x_2(k) + x_1(k) + x_2(k) \cdot u(k) \end{array}$$

e dato il punto di equilibrio

$$\overline{x} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]^T, \quad \overline{u} = 0$$

dire quali sono le matrici del sistema linearizzato corrispondente.
Soluzione: $A = \left[\begin{array}{cc} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\right] \quad C = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right] \quad D = \left[\begin{array}{c} 0 \end{array}\right]$