01AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Tipologia degli esercizi proposti nel compito del 10/II/2003

In questo documento si riporta la tipologia degli esercizi proposti con la relativa soluzione. Per consentire agli studenti una migliore comprensione degli errori commessi, nella tabella seguente sono indicate le posizioni dei vari esercizi nei diversi compiti, nonché il livello di difficoltà dei singoli esercizi. Si ricorda che nel compito vengono proposte quattro possibili risposte ad ogni esercizio, fra le quali deve essere individuata l'unica esatta.

Esercizio	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13
Compito #1 (pag. 11)	4	2	9	13	8	11	7	10	1	6	12	5	3
Compito #2 (pag. 21)	6	13	12	7	4	10	2	1	11	8	3	9	5
Compito #3 (pag. 31)	12	11	13	5	10	6	7	9	1	2	3	4	8
Compito #4 (pag. 41)	4	3	6	11	9	2	8	7	1	10	12	5	13
Compito #5 (pag. 51)	9	1	4	8	7	11	10	13	2	12	5	6	3
Compito #6 (pag. 61)	8	1	13	4	12	11	5	7	10	6	2	9	3
Compito #7 (pag. 71)	3	10	1	7	13	8	5	4	11	12	2	6	9
Compito #8 (pag. 81)	1	11	13	8	9	7	3	2	4	6	12	10	5
Livello di difficoltà	basso	basso	alto	medio	basso	alto	medio	basso	alto	medio	basso	alto	alto

Esercizio 1 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{(s-1)(s+5)}{(s+2)(s-5)}$$

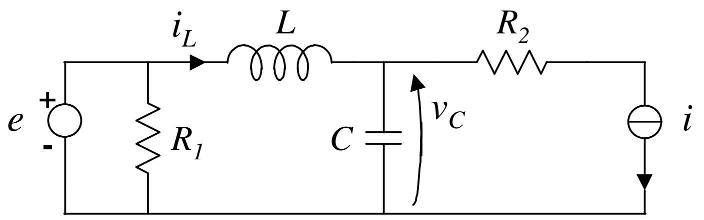
calcolare analiticamente la risposta a regime permanente $y_{perm}(t)$ all'ingresso sinusoidale $u(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t)$, con $U = 2$ e $\omega = 5$ rad/s.
Soluzione: Non si può calcolare $y_{perm}(t)$ perché il sistema non va a regime, avendo poli nel semipiano destro.

Esercizio 2 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$

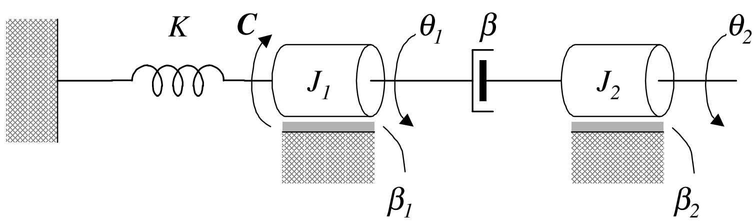
calcolare il valore finale y_∞ della risposta all'ingresso a rampa $u(t) = 4t$, $t \geq 0$.
Soluzione: $y_\infty = -10$.

Esercizio 3 - Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, i cui componenti assumono i seguenti valori numerici: $L = 10^{-3}$ H, $C = 2 \cdot 10^{-6}$ F, $R_1 = 10^3\,\Omega$, $R_2 = 2 \cdot 10^3\,\Omega$.



Determinare le matrici A e B dell'equazione di stato del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, scegliendo come variabile di stato $x = [i_L,\ v_C]^T$ e come variabile di ingresso $u = [e,\ i]^T$.
Soluzione: $A = \begin{bmatrix} 0 & -10^3 \\ 5 \cdot 10^5 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & -5 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$

Esercizio 4 - Nel sistema dinamico meccanico in rotazione riportato in figura, due corpi puntiformi (aventi momenti d'inerzia J_1 e J_2 e posizioni angolari θ_1 e θ_2) sono collegati fra loro mediante uno smorzatore con coefficiente di attrito viscoso β. Il corpo J_1, su cui agisce una coppia esterna C, è collegato ad una parete fissa per mezzo di una molla torsionale con elasticità K. Ognuno dei due corpi è soggetto ad una coppia di attrito, caratterizzata rispettivamente da un coefficiente di attrito viscoso equivalente β_1 e β_2.



Scrivere le equazioni del moto dei due corpi puntiformi.
Soluzione: $J_1\ddot{\theta}_1 + (\beta + \beta_1)\dot{\theta}_1 + K\theta_1 = -C + \beta\dot{\theta}_2$; $\quad J_2\ddot{\theta}_2 + (\beta + \beta_2)\dot{\theta}_2 = \beta\dot{\theta}_1$

Esercizio 5 - Sapendo che la rappresentazione in variabili di stato di un modello LTI a tempo continuo è caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 7 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

indicare la forma della corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$, riportando il denominatore completo della $G(s)$ ed il solo termine di grado massimo del numeratore.

Soluzione: $G(s) = \dfrac{3s^2 + \cdots}{(s+5)(s+3)}$

Esercizio 6 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato, determinare, se possibile, i coefficienti K di retroazione dagli stati che permettono di portare gli autovalori del sistema retroazionato in:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$$

Soluzione: $K = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -7 \end{bmatrix}$

Esercizio 7 - Dato il sistema dinamico LTI, a tempo continuo, caratterizzato dalle seguenti matrici di ingresso-stato-uscita:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

determinare l'espressione analitica dell'uscita $y(t)$ supponendo ingresso nullo, $u(t) = 0$, e condizioni iniziali $x(0) = [1\ 3]'$.

Soluzione: $y(t) = \left[-12e^{-3t} + 14e^{t}\right] \varepsilon(t)$

Esercizio 8 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato a tempo discreto, determinare, se possibile, i coefficienti L del ricostruttore asintotico che permettono di posizionare gli autovalori del sistema osservato in $\lambda_1 = 0.4$, $\lambda_2 = 0.45$ e $\lambda_3 = 0.5$.

Soluzione: Non è possibile posizionare arbitrariamente gli autovalori.

Esercizio 9 - Dato il sistema dinamico non lineare a tempo discreto descritto da:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.5 \cdot x_1(k) + x_1(k) \cdot x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -0.5 \cdot x_2(k) + 3 \cdot x_2^2(k) + 2 \cdot u(k) \end{aligned}$$

e dato l'ingresso di equilibrio

$$\overline{u} = 0$$

determinare tutti gli stati di equilibrio $\overline{x}$ corrispondenti.

Soluzione: $\overline{x}^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\overline{x}^{II} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & 0.5 \end{bmatrix}^T$

Esercizio 10 - Un sistema dinamico non lineare, a tempo continuo, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Analizzare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio al variare del parametro k.

Soluzione: Il punto di equilibrio del sistema non lineare è instabile per qualunque valore di k.

Esercizio 11 - Dato il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) + x_1(t)u(t) \\ y(t) &= x_2(t) - u(t) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a dimensione finita o infinita, SISO o MIMO, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante.

Soluzione: Il sistema è dinamico, a dimensione finita, SISO, non lineare, tempo-invariante.

Esercizio 12 - Dato il sistema dinamico SISO a tempo discreto caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 0.8}{z^3 + z^2 + pz + 0.25}$$

dire per quali valori del parametro p il sistema risulta esternamente stabile (ovvero i poli di $G(z)$ si trovano nella regione di asintotica stabilità).
Soluzione: Il sistema è esternamente stabile per $0.25 < p < 1.1875$.

Esercizio 13 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{405}{s^2 + 7.2s + 81}$$

dire qual è il grafico in cui è riportato l'andamento della risposta $y(t)$ ad un gradino unitario, a partire da condizioni iniziali nulle (si presti attenzione alle scale di entrambi gli assi).

Soluzione: