

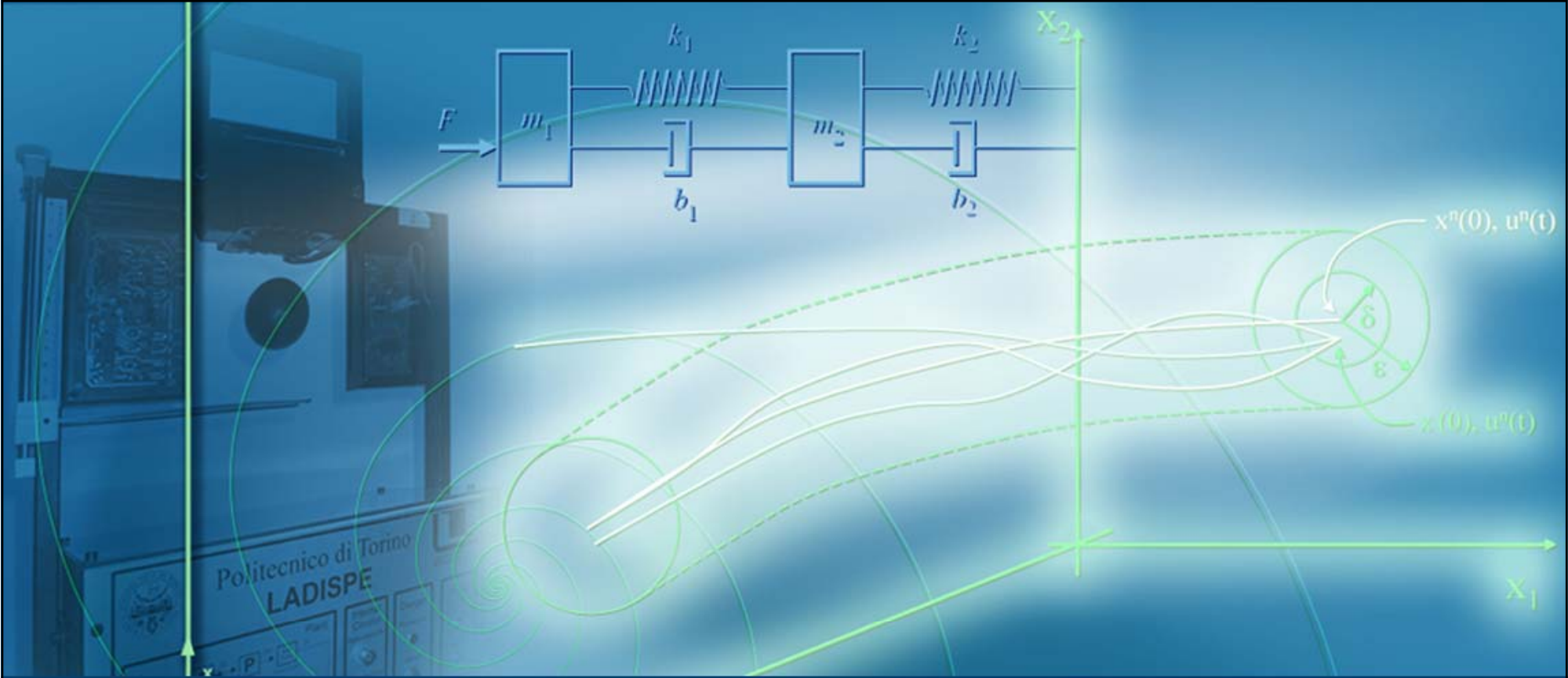
Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Concetti di base sulla trasformata zeta

$$y(t) = Cx(t)$$

Concetti di base sulla trasformata zeta

- Definizione e proprietà
- Principali trasformate
- Scomposizione in fratti semplici



Concetti di base sulla trasformata zeta

Definizione e proprietà

$$y(t) = Cx(t)$$

Definizione

- La **trasformata (unilatera) zeta** della sequenza di valori reali $f(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione della variabile complessa z definita (quando esiste) da:

$$F(z) = \mathcal{Z} \{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Proprietà principali (1/4)

Linearità

- Siano $f_1(k)$ ed $f_2(k)$ due funzioni aventi rispettivamente trasformata zeta $F_1(z)$ ed $F_2(z)$ e c_1, c_2 due costanti reali.

Allora:

$$\mathcal{Z} \{ c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) \} = c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Proprietà principali (2/4)

Ritardo nel tempo di h passi

- Siano $f(k)$ e $F(z)$ una sequenza e la sua trasformata zeta rispettivamente ed h un intero positivo.

Allora:

$$\mathcal{Z}\{f(k-h)\} = z^{-h}F(z)$$

In particolare, se $h = 1$

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z)$$

Proprietà principali (3/4)

Anticipo nel tempo di h passi

- Siano $f(k)$ e $F(z)$ una sequenza e la sua trasformata zeta rispettivamente ed h un intero positivo.

Allora:

$$\mathcal{Z}\{f(k+h)\} = z^h \left(F(z) - \sum_{k=0}^{h-1} z^k f(k) \right)$$

In particolare, se $h = 1$

$$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = zF(z) - zf(0)$$

Proprietà principali (4/4)

Prodotto di convoluzione

- Siano $f_1(k)$ ed $f_2(k)$ due sequenze, aventi trasformata zeta $F_1(z)$ ed $F_2(z)$ rispettivamente. Allora il loro prodotto di convoluzione definito come:

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{j=0}^k f_1(k-j) \cdot f_2(j) = \sum_{j=0}^k f_1(j) \cdot f_2(k-j)$$

ammette trasformata zeta

$$\mathcal{Z} \{ f_1(k) * f_2(k) \} = F_1(z) \cdot F_2(z)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Teoremi principali (1/2)

Teorema del valore finale

- Sia $f(k)$ una sequenza con trasformata zeta $F(z)$.
Si supponga che il prodotto:

$$(z - 1)F(z)$$

non abbia radici del denominatore con modulo maggiore o uguale ad uno, allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z)$$

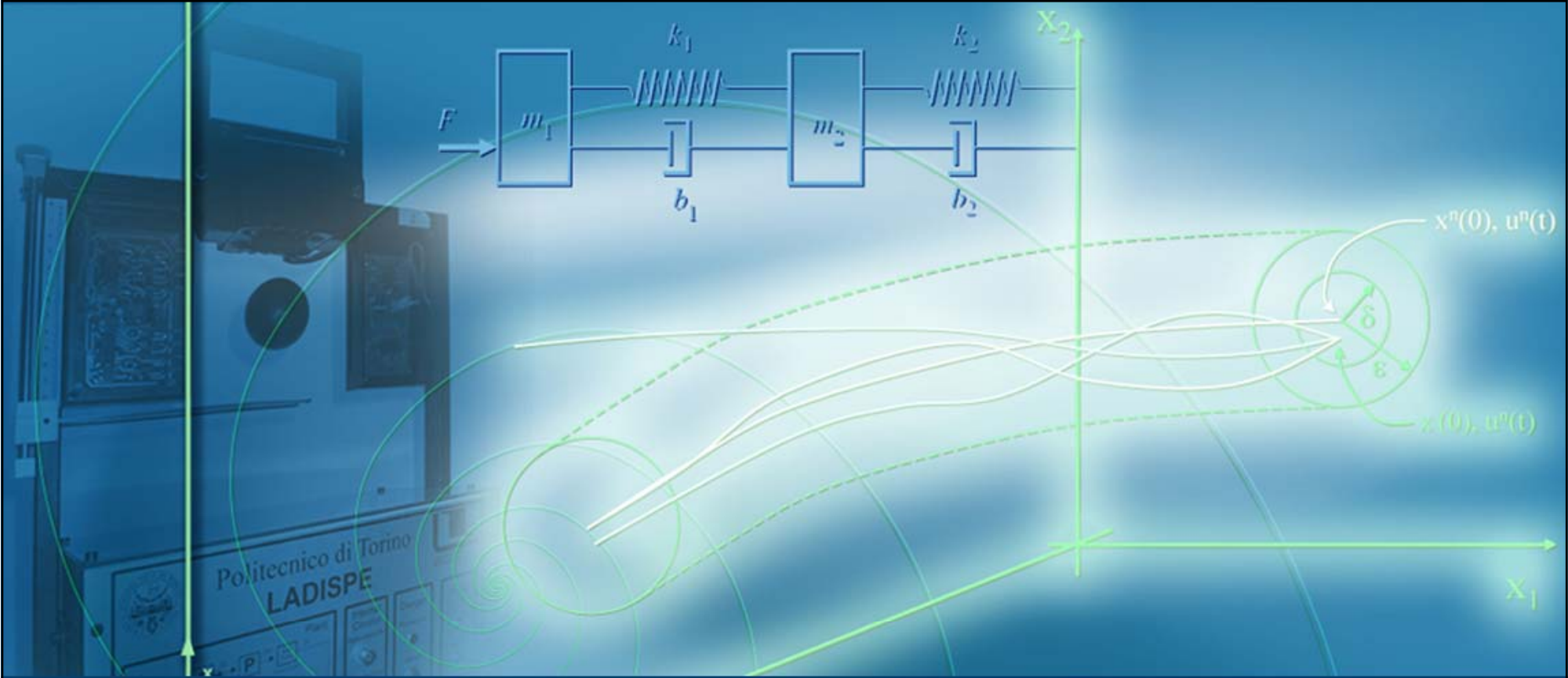
$$y(t) = Cx(t)$$

Teoremi principali (2/2)

Teorema del valore iniziale

- Sia $f(k)$ una sequenza con trasformata zeta $F(z)$.
Allora:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$



Concetti di base sulla trasformata zeta

Principali trasformate

$$y(t) = Cx(t)$$

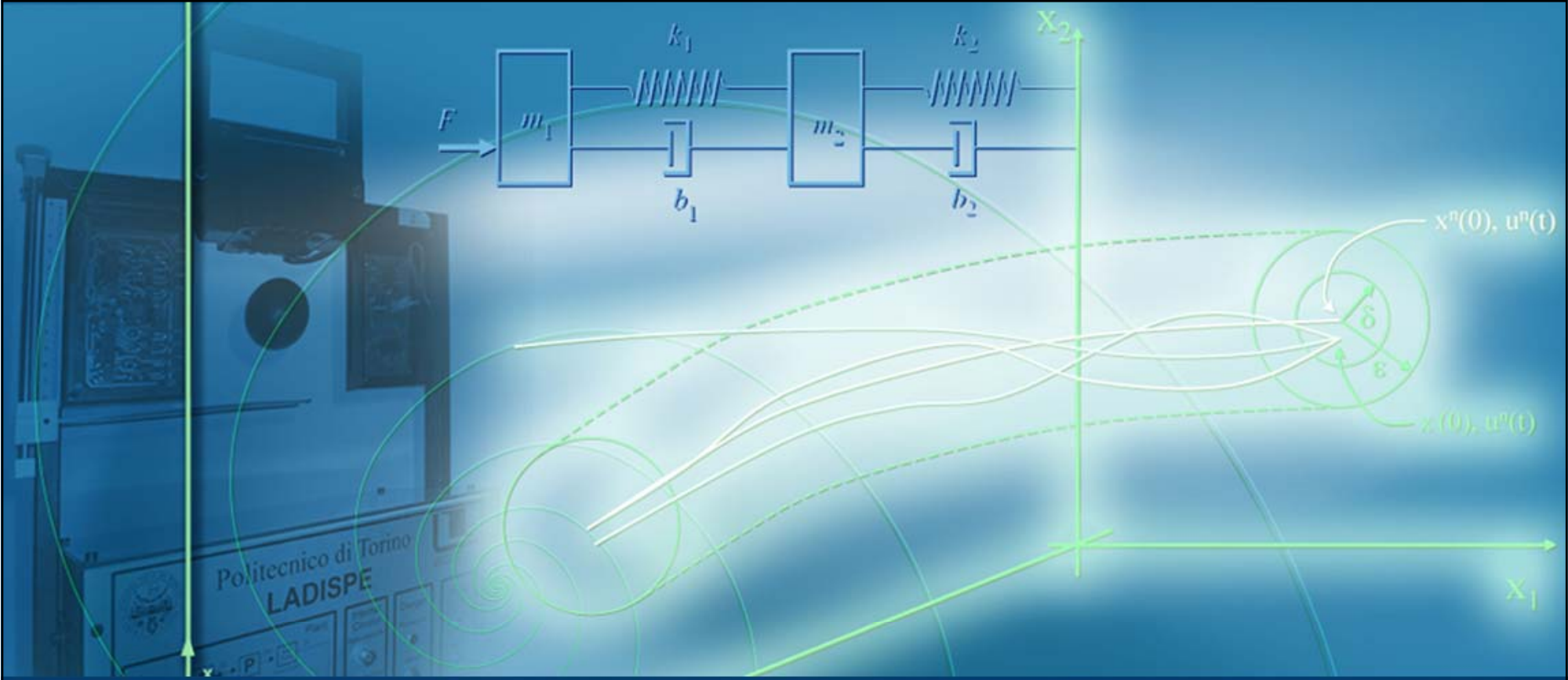
Principali trasformate unilatera (1/2)

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$\binom{k}{l} \triangleq \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!}, l > 0$	$\frac{z}{(z-1)^{l+1}}$

$$y(t) = Cx(t)$$

Principali trasformate unilateri (2/2)

$f(k)$	$F(z)$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$\binom{k}{l} a^{k-l}, l > 0$	$\frac{z}{(z-a)^{l+1}}$
$\sin(\vartheta k), \vartheta \in \mathbb{R}$	$\frac{z \sin(\vartheta)}{z^2 - 2 \cos(\vartheta)z + 1}$
$\cos(\vartheta k), \vartheta \in \mathbb{R}$	$\frac{z(z - \cos(\vartheta))}{z^2 - 2 \cos(\vartheta)z + 1}$
$A^k, A \in \mathbb{R}^{n,n}$	$z(zI - A)^{-1}$



Concetti di base sulla trasformata zeta

Scomposizione in fratti semplici

$$y(t) = Cx(t)$$

Scomposizione di funzioni razionali fratte

- Se $F(z)$ è una funzione razionale fratta, per la sua antitrasformazione si può procedere con la scomposizione in fratti semplici come nel caso della trasformata di Laplace
- Tuttavia, come si può osservare dalle tabelle, le trasformate zeta elementari sono caratterizzate dall'averne in evidenza a numeratore il termine z
- Esempi:

$$\frac{z}{z-1} \quad , \quad \frac{0.1z}{(z-0.1)^2}$$

Esempio

► Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{z}{(z - 0.5)(z - 0.4)} = \frac{5}{z - 0.5} - \frac{4}{z - 0.4}$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{5}{z - 0.5} \right\} = ??$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{-4}{z - 0.4} \right\} = ??$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio: osservazione

- I termini del tipo

$$\frac{R}{z - a}$$

non compaiono nelle tabelle delle trasformate zeta

$$y(t) = Cx(t)$$

Procedimento

- Si può procedere come segue:
 - Si considera dapprima la funzione

$$\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{z}$$

- Si procede alla scomposizione della funzione

$$\tilde{F}(z)$$

come nel caso della trasformata di Laplace

- Si moltiplica la scomposizione ottenuta per z

Esempio: continuazione

► Esempio:

$$F(z) = \frac{z}{(z - 0.5)(z - 0.4)}$$

$$\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z - 0.5)(z - 0.4)} =$$

$$= \frac{10}{z - 0.5} - \frac{10}{z - 0.4}$$

$$F(z) = z \cdot \tilde{F}(z) = \frac{10z}{z - 0.5} - \frac{10z}{z - 0.4}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio: antitrasformazione

$$F(z) = \frac{10z}{z - 0.5} - \frac{10z}{z - 0.4}$$

- A questo punto è possibile antitrasformare ottenendo:

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \{ F(z) \} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{10z}{z - 0.5} - \frac{10z}{z - 0.4} \right\} = \\ &= (10 \cdot 0.5^k - 10 \cdot 0.4^k) \varepsilon(k) \end{aligned}$$

Il caso delle radici complesse coniugate

- Il calcolo dei residui della decomposizione in fratti semplici è chiaramente identico al caso della trasformata di Laplace
- L'unico accorgimento riguarda la coppia di radici complesse coniugate $a = \sigma + j\omega$, $a^* = \sigma - j\omega$
- Anche in questo caso si ha una coppia di fratti:

$$\frac{Rz}{z - a} + \frac{R^* z}{z - a^*}$$

- Che si antitrasforma complessivamente come

$$2|R||a|^k \cos((\angle a)k + \angle R)$$