01AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Tipologia degli esercizi proposti nel compito del 18/IX/2002

In questo documento si riporta la tipologia degli esercizi proposti con la relativa soluzione. Per consentire agli studenti una migliore comprensione degli errori commessi, nella tabella seguente sono indicate le posizioni dei vari esercizi nei diversi compiti, nonché il livello di difficoltà dei singoli esercizi.

Esercizio	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13
Compito #1 (pag. 11)	11	13	2	10	9	4	8	7	6	5	3	1	12
Compito #2 (pag. 21)	8	7	12	1	6	11	10	4	5	13	9	3	2
Compito #3 (pag. 31)	3	11	5	9	12	4	7	8	13	6	1	2	10
Compito #4 (pag. 41)	12	8	10	4	5	13	6	1	9	11	7	2	3
Compito #5 (pag. 51)	7	8	11	4	9	6	10	2	12	13	5	3	1
Compito #6 (pag. 61)	10	11	2	3	4	6	13	5	8	1	12	9	7
Compito #7 (pag. 71)	9	6	5	10	4	1	12	11	8	13	3	7	2
Compito #8 (pag. 81)	1	12	10	4	6	11	13	9	2	8	7	5	3
Livello di difficoltà	alto	basso	basso	medio	alto	basso	basso	medio	medio	alto	medio	basso	basso

Esercizio 1 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = 2\frac{(s+1)(s-4)}{(s-1)(s+2)^2}$$

determinare l'espressione analitica dell'uscita $y(t)$ supponendo condizioni iniziali nulle ed ingresso a gradino di ampiezza 3, cioè $u(t) = 3\varepsilon(t)$.
Soluzione: $y(t) = \left[6 - 4e^{t} - 2e^{-2t} + 6te^{-2t}\right]\varepsilon(t)$

Esercizio 2 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{(s-1)(s+5)}{(s+1)(s+2)}$$

calcolare analiticamente la risposta a regime permanente $y_{perm}(t)$ all'ingresso sinusoidale $u(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t)$, con $U = 5$ e $\omega = 1$ rad/s.
Soluzione: $y_{perm}(t) = 11.40 \cdot \sin(t + 1.30)$

Esercizio 3 - Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto da:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) &= C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{aligned}$$

gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_i = -0.2, -0.2, -0.1, 0, 0.1, \quad i = 1, \ldots, 5$$

Analizzare le proprietà di stabilità del sistema.
Soluzione: Il sistema è asintoticamente stabile.

Esercizio 4 - Dato il sistema SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s+2}{s^3 + 4s^2 + s(p-20) + 2p}$$

dire per quali valori del parametro p il sistema risulta esternamente stabile.
Soluzione: $p > 40$

Esercizio 5 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -299 & 37 \\ -2416 & 299 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 57 \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato, determinare, se possibile, i coefficienti K di retroazione dagli stati che permettono di portare gli autovalori del sistema retroazionato in:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -7$$

Soluzione: $K = \begin{bmatrix} 27.2 & -3.2 \end{bmatrix}$

Esercizio 6 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 44 & -46 & -6 \\ 49 & -59 & 3 \\ 51 & -39 & -21 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 31 & -8 & -28 \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato a tempo discreto, determinare, se possibile, i coefficienti L del ricostruttore asintotico che permettono di posizionare gli autovalori del sistema osservato in $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$ e $\lambda_3 = 0.3$.
Soluzione: Non è possibile posizionare arbitrariamente gli autovalori del sistema osservato, ossia della matrice $A - LC$.

Esercizio 7 - Dato il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + 3u_1(k) \\ x_2(k+1) &= 0.5x_1(k) + u_2(k) \\ y(k) &= 2x_1(k) \cdot u_1(k) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a dimensione finita o infinita, SISO o MIMO, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante.
Soluzione: Il sistema è dinamico, a dimensione finita (pari a 2), MIMO, non lineare, tempo-invariante.

Esercizio 8 - Dato il sistema dinamico non lineare a tempo continuo descritto da:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1^2(t) - 0.5x_2^2(t) + 4u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 2x_1(t)x_2(t) \\ y(t) &= 4x_2(t) \end{aligned}$$

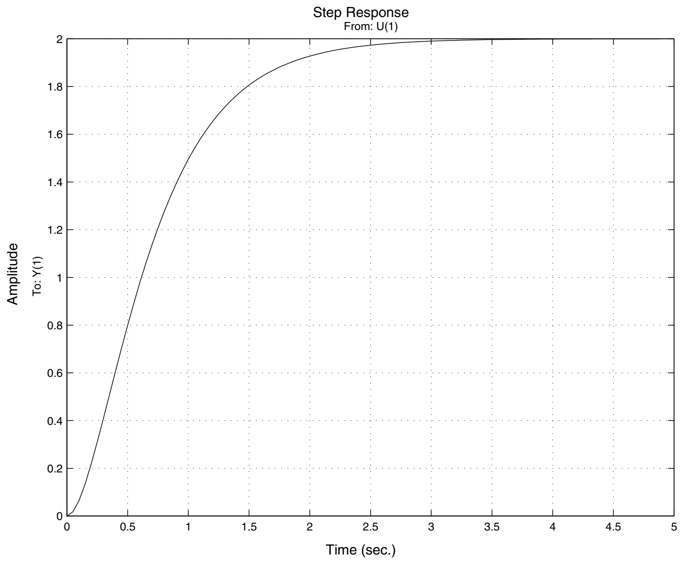
determinare il sistema linearizzato nell'intorno del punto di funzionamento $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\overline{u} = 2$.
Soluzione: Le matrici del sistema linearizzato sono: $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$, $D = [0]$.

Esercizio 9 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

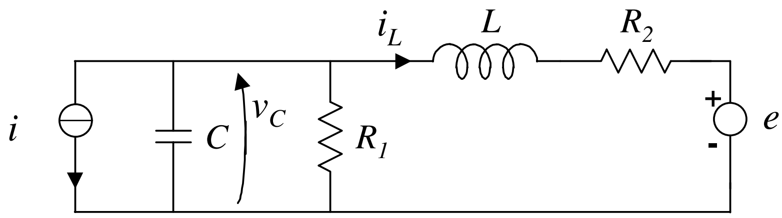
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{16}{s^2 + 6s + 8}$$

dire qual è il grafico in cui è riportato l'andamento della risposta $y(t)$ ad un gradino unitario, a partire da condizioni iniziali nulle (si presti attenzione alle scale di entrambi gli assi):

Soluzione:

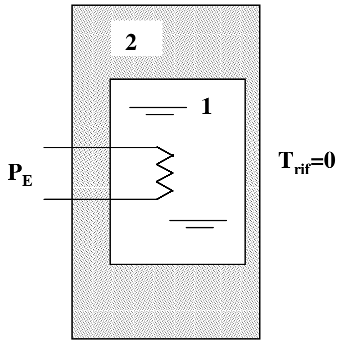


Esercizio 10 - Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, i cui componenti assumono i seguenti valori numerici: $L = 10^{-3}$ H, $C = 10^{-6}$ F, $R_1 = 2 \cdot 10^3\,\Omega$, $R_2 = 10^3\,\Omega$.



Determinare le matrici A e B dell'equazione di stato del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, scegliendo come variabile di stato $x = [v_C,\ i_L]^T$ e come variabile di ingresso $u = [i,\ e]^T$.
Soluzione: $A = \begin{bmatrix} -500 & -10^6 \\ 10^3 & -10^6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -10^6 & 0 \\ 0 & -10^3 \end{bmatrix}$

Esercizio 11 - Un sistema termico è costituito da due corpi omogenei **1** e **2**; all'interno del corpo **1** è applicata una portata di calore P_E; l'ambiente esterno è a temperatura costante $T_{rif} = 0$. Gli stati del sistema sono dati dalle temperature T_1 e T_2 dei due corpi omogenei, l'ingresso è costituito dalla portata di calore P_E, mentre l'uscita è data dalla temperatura T_2.



Scrivere le equazioni di bilancio termico che descrivono il sistema dato, assumendo che le capacità dei due corpi siano pari a $C_1 = C_2 = C$ e le conduttanze termiche fra i due corpi e fra il corpo **2** e l'ambiente siano $K_{12} = K_{20} = 1/(0.5R)$, ove $0.5R$ è la resistenza termica fra i vari elementi.
Soluzione: $C \cdot \dot{T}_1 = -2/R \cdot T_1 + 2/R \cdot T_2 + P_E, \quad C \cdot \dot{T}_2 = 2/R \cdot T_1 - 4/R \cdot T_2$

Esercizio 12 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = 10\frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s^2+4s-2)}$$

calcolare il valore finale y_∞ della risposta all'ingresso $u(t)$ a gradino unitario.
Soluzione: Non si può calcolare y_∞ perché il sistema non va a regime, avendo poli nel semipiano destro.

Esercizio 13 - Determinare la funzione di trasferimento $G(s) = Y(s)/U(s)$ del sistema SISO descritto dalle seguenti equazioni di stato, dove p è un parametro non funzione del tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -p \cdot x_1 - x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Soluzione: $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + p}$