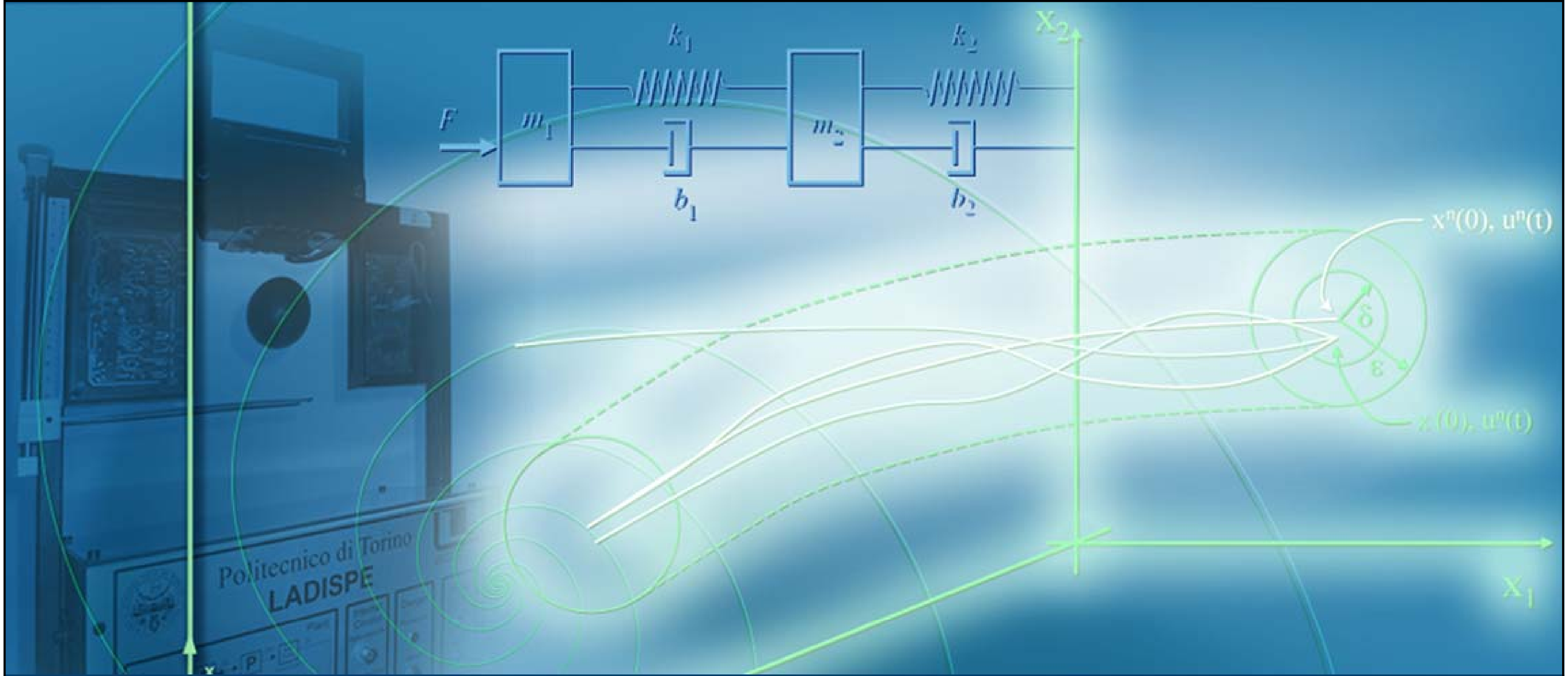
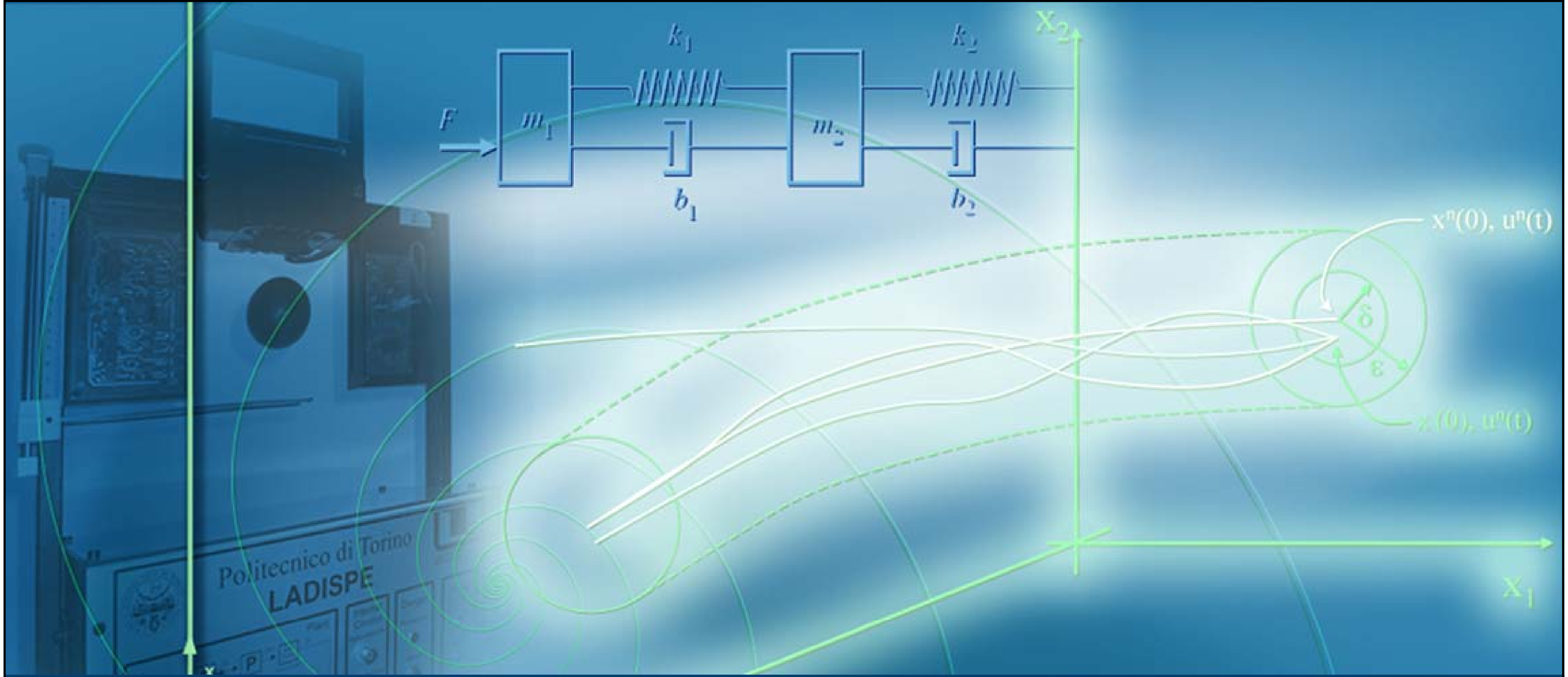


Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Concetti di base sulla trasformata zeta

Concetti di base sulla trasformata zeta

- Definizione e proprietà
- Principali trasformate
- Scomposizione in fratti semplici



Concetti di base sulla trasformata zeta

Definizione e proprietà

Definizione

- La **trasformata** (**unilatera**) **zeta** della sequenza di valori reali $f(k): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione della variabile complessa z definita (quando esiste) da:

$$\boxed{F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k}, \qquad z \in \mathbb{C}}$$

Proprietà principali (1/4)

Linearità

- Siano $f_1(k)$ ed $f_2(k)$ due funzioni aventi rispettivamente trasformata zeta $F_1(z)$ ed $F_2(z)$ e c_1, c_2 due costanti reali.
  Allora:

$$\boxed{\mathcal{Z}\left\{c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k)\right\} = c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)}$$

Proprietà principali (2 / 4)

Ritardo nel tempo di *h* passi

- Siano $f(k)$ e $F(z)$ una sequenza e la sua trasformata zeta rispettivamente ed h un intero positivo.

  Allora:

$$\boxed{\mathcal{Z}\left\{f(k-h)\right\} = z^{-h}F(z)}$$

In particolare, se $h = 1$

$$\boxed{\mathcal{Z}\left\{f(k-1)\right\} = z^{-1}F(z)}$$

Proprietà principali (3/4)

Anticipo nel tempo di *h* passi

- Siano $f(k)$ e $F(z)$ una sequenza e la sua trasformata zeta rispettivamente ed h un intero positivo.

  Allora:

$$\mathcal{Z}\left\{f(k+h)\right\} = z^h\left(F(z) - \sum_{k=0}^{h-1} z^{-k} f(k)\right)$$

In particolare, se $h = 1$

$$\mathcal{Z}\left\{f(k+1)\right\} = zF(z) - zf(0)$$

Proprietà principali (4 / 4)

Prodotto di convoluzione

- Siano $f_1(k)$ ed $f_2(k)$ due sequenze, aventi trasformata zeta $F_1(z)$ ed $F_2(z)$ rispettivamente. Allora il loro prodotto di convoluzione definito come:

$$\boxed{f_1(k) * f_2(k) = \sum_{j=0}^{k} f_1(k-j) \cdot f_2(j) = \sum_{j=0}^{k} f_1(j) \cdot f_2(k-j)}$$

ammette trasformata zeta

$$\boxed{\mathcal{Z}\left\{f_1(k) * f_2(k)\right\} = F_1(z) \cdot F_2(z)}$$

Teoremi principali (1/2)

Teorema del valore finale

- Sia $f(k)$ una sequenza con trasformata zeta $F(z)$. Si supponga che il prodotto:

$$\boxed{(z-1)F(z)}$$

non abbia radici del denominatore con modulo maggiore o uguale ad uno, allora

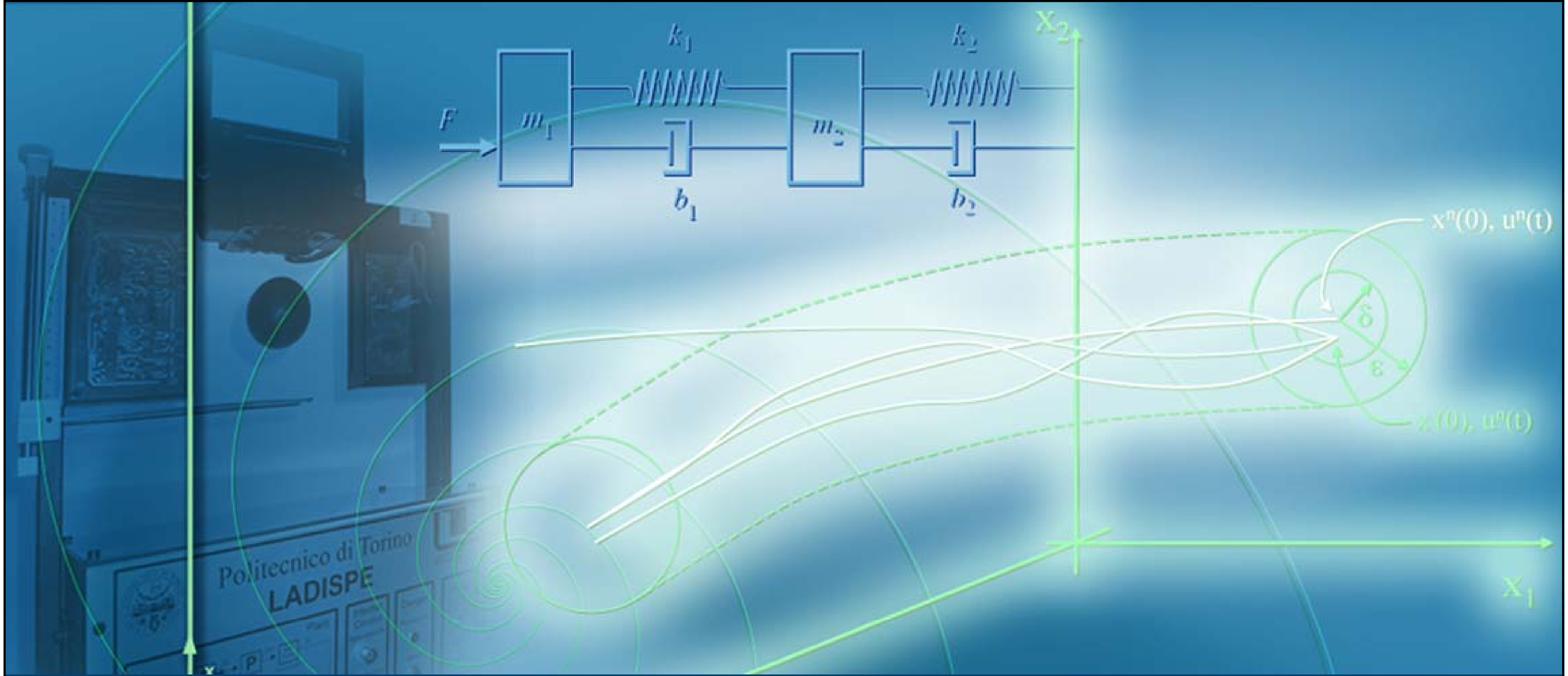
$$\boxed{\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)}$$

Teoremi principali (2/2)

Teorema del valore iniziale

- Sia $f(k)$ una sequenza con trasformata zeta $F(z)$. Allora:

$$\boxed{\lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z)}$$



Concetti di base sulla trasformata zeta

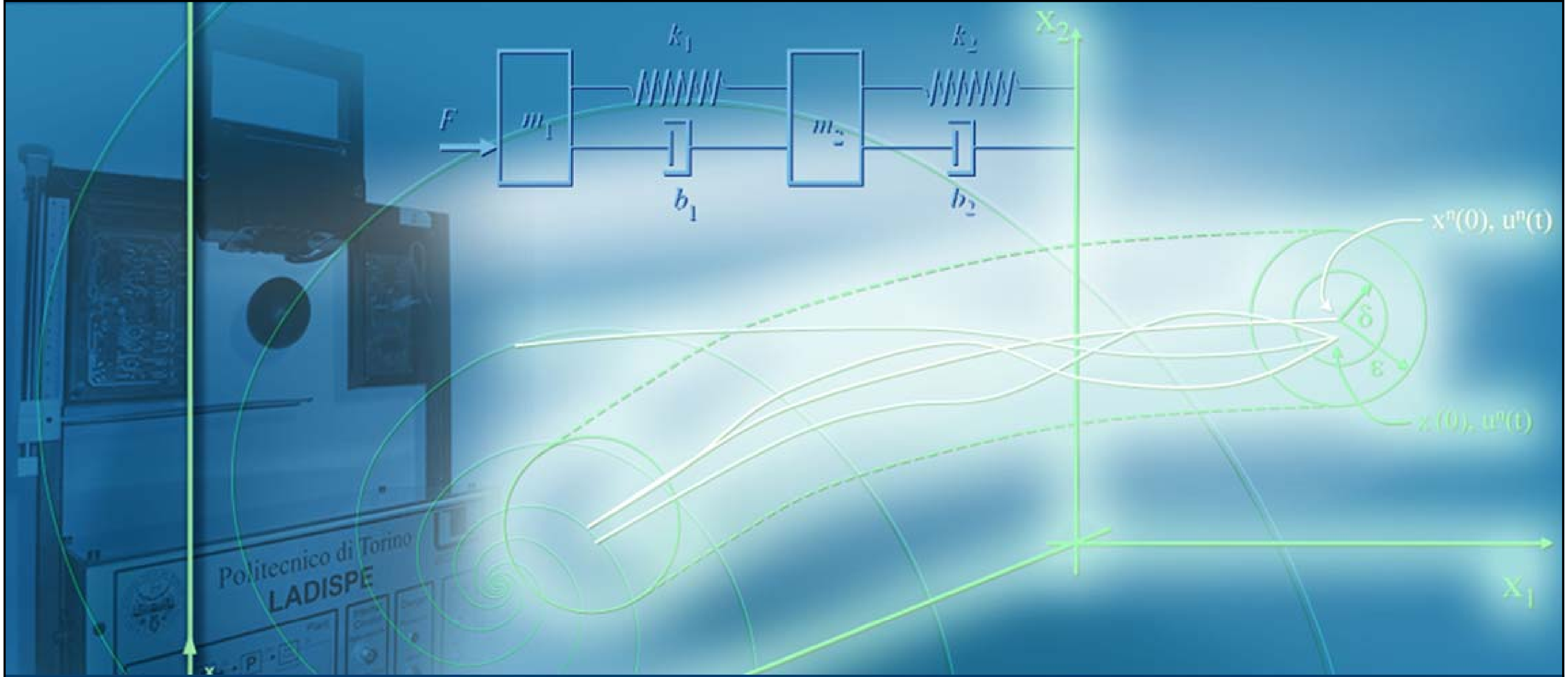
Principali trasformate

Principali trasformate unilatere (1/2)

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\dbinom{k}{\ell} \triangleq \dfrac{k(k-1)\cdots(k-\ell+1)}{\ell!}, \ell > 0$	$\dfrac{z}{(z-1)^{\ell+1}}$

Principali trasformate unilatere (2/2)

$f(k)$	$F(z)$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
$\binom{k}{\ell} a^{k-\ell},\ \ell > 0$	$\dfrac{z}{(z-a)^{\ell+1}}$
$\sin(\vartheta k),\ \vartheta \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z\sin(\vartheta)}{z^2 - 2\cos(\vartheta) z + 1}$
$\cos(\vartheta k),\ \vartheta \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z(z-\cos(\vartheta))}{z^2 - 2\cos(\vartheta) z + 1}$
$A^k,\ A \in \mathbb{R}^{n,n}$	$z(zI - A)^{-1}$



Concetti di base sulla trasformata zeta

Scomposizione in fratti semplici

Scomposizione di funzioni razionali fratte

- Se $F(z)$ è una funzione razionale fratta, per la sua antitrasformazione si può procedere con la scomposizione in fratti semplici come nel caso della trasformata di Laplace
- Tuttavia, come si può osservare dalle tabelle, le trasformate zeta elementari sono caratterizzate dall'avere in evidenza a numeratore il termine z
- Esempi:

$$\boxed{\frac{z}{z-1}, \frac{0.1z}{\left(z-0.1\right)^2}}$$

Esempio

- Consideriamo la funzione

$$F(z)=\frac{z}{(z-0.5)(z-0.4)}=\frac{5}{z-0.5}-\frac{4}{z-0.4}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{5}{z-0.5}\right\}=??$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-4}{z-0.4}\right\}=??$$

Esempio: osservazione

- I termini del tipo

$$\boxed{\frac{R}{z-a}}$$

non compaiono nelle tabelle delle trasformate zeta

Procedimento

- Si può procedere come segue:
  - Si considera dapprima la funzione

$$\boxed{\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{z}}$$

  - Si procede alla scomposizione della funzione

$$\boxed{\tilde{F}(z)}$$

    come nel caso della trasformata di Laplace
  - Si moltiplica la scomposizione ottenuta per z

Esempio: continuazione

- Esempio:

$$F(z)=\frac{z}{(z-0.5)(z-0.4)}$$

$$\tilde{F}(z)=\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{(z-0.5)(z-0.4)}=$$

$$=\frac{10}{z-0.5}-\frac{10}{z-0.4}$$

$$F(z)=z\cdot\tilde{F}(z)=\frac{10z}{z-0.5}-\frac{10z}{z-0.4}$$

Esempio: antitrasformazione

$$F(z) = \frac{10z}{z-0.5} - \frac{10z}{z-0.4}$$

- A questo punto è possibile antitrasformare ottenendo:

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{10z}{z-0.5} - \frac{10z}{z-0.4}\right\} =$$
$$= \left(10 \cdot 0.5^k - 10 \cdot 0.4^k\right)\varepsilon(k)$$

Il caso delle radici complesse coniugate

- Il calcolo dei residui della decomposizione in fratti semplici è chiaramente identico al caso della trasformata di Laplace
- L'unico accorgimento riguarda la coppia di radici complesse coniugate $a = \sigma + j\omega$, $a^* = \sigma - j\omega$
- Anche in questo caso si ha una coppia di fratti:

$$\boxed{\frac{Rz}{z-a} + \frac{R^* z}{z-a^*}}$$

- Che si antitrasforma complessivamente come

$$\boxed{2|R||a|^k \cos\left((\angle a)k + \angle R\right)}$$