

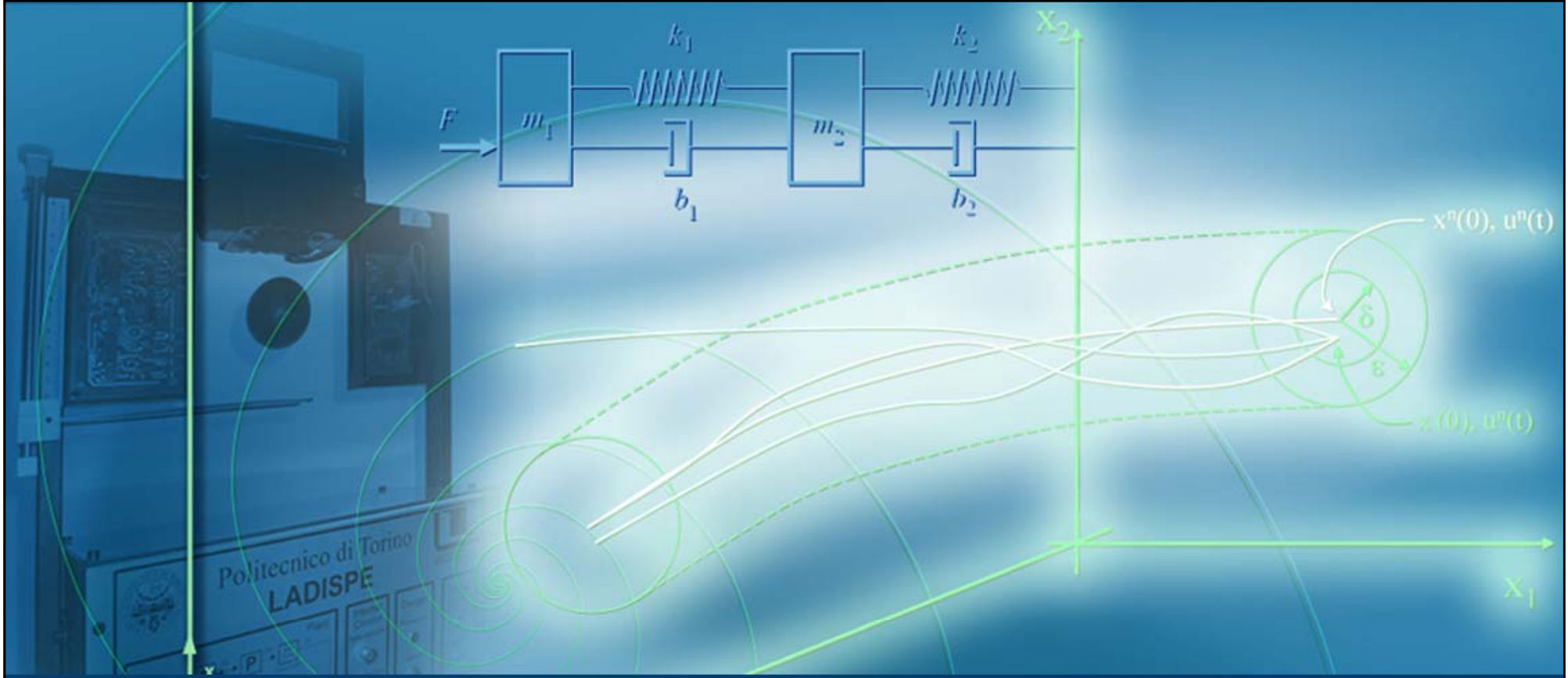
Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Esempi di soluzione per
sistemi dinamici LTI TC

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

- Scomposizione in fratti semplici (parte I)
- Esempio di soluzione 1
- Scomposizione in fratti semplici (parte II)
- Esempio di soluzione 2
- Scomposizione in fratti semplici (parte III)
- Esempio di soluzione 3
- Considerazioni finali



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Scomposizione in fratti semplici (parte I)

Scomposizione in fratti semplici: introduzione

- Sia $F(s)$ una funzione razionale fratta rappresentata nella forma polinomiale

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

- Supponiamo che:

- $N_F(s)$ e $D_F(s)$ siano polinomi in s , di grado m ed n rispettivamente ($m < n \rightarrow F(s)$ strettamente propria)
- $N_F(s)$ e $D_F(s)$ non abbiano radici in comune
- Il denominatore di $F(s)$ abbia n **radici distinte** p_1, \dots, p_n , (con molteplicità unitaria)

Scomposizione in fratti semplici: definizione

- Si può fattorizzare il denominatore di $F(s)$ mettendo in evidenza le n radici distinte:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

- La **scomposizione i fratti semplici** (detta anche sviluppo di Heaviside) di $F(s)$ è definita da:

$$F(s) = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \dots + \frac{R_n}{s - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - p_i}$$

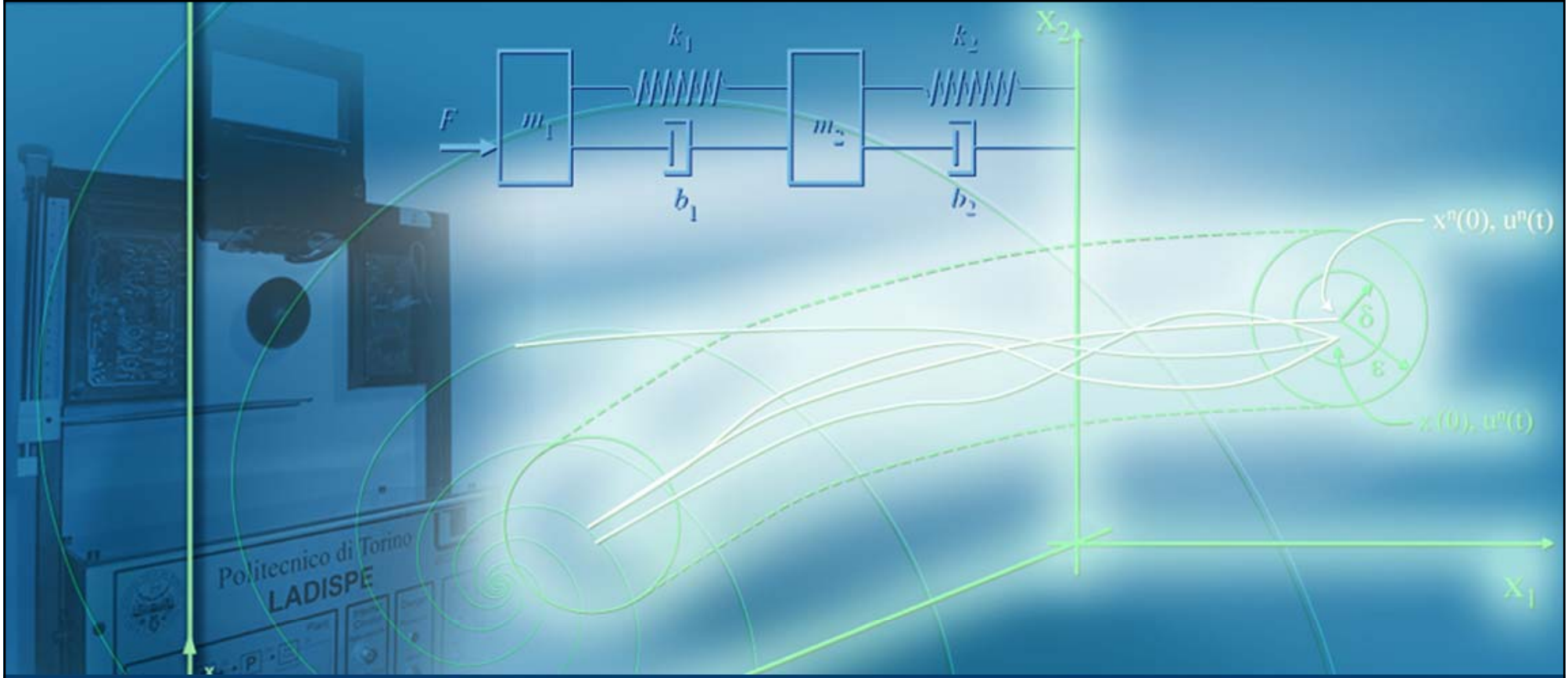
Scomposizione in fratti semplici: residui

- Nella scomposizione in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \dots + \frac{R_n}{s - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - p_i}$$

- I termini R_1, \dots, R_n sono detti **residui**
- Nel caso considerato (radici distinte), i residui vengono calcolati come:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s), \quad i = 1, \dots, n$$



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Esempio di soluzione 1

$$y(t) = Cx(t)$$

Formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato $x(t)$ nel caso in cui
 - L'ingresso sia un gradino di ampiezza 2 ($u(t) = 2\varepsilon(t)$)
 - Le condizioni iniziali siano: $x(0) = [2 \ 2]^T$

$$y(t) = Cx(t)$$

Procedimento di soluzione

- I passi da seguire sono:
 - Calcolo della soluzione $X(s)$ nel dominio della trasformata di Laplace
 - Calcolo della scomposizione in fratti semplici (e dei corrispondenti residui) di $X(s)$
 - Calcolo di $x(t)$ tramite antitrasformazione della scomposizione in fratti semplici di $X(s)$

Impostazione dei calcoli in $\text{dom}(s)$ (1/2)

- Soluzione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1} BU(s)}_{X_f(s)}$$

- Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, U(s) = \frac{2}{s}$$

Impostazione dei calcoli in $\text{dom}(s)$ (2/2)

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1} BU(s)}_{X_f(s)}$$

- Per calcolare $X(s)$ procediamo con i seguenti passi:
- Calcolo del termine $(sI - A)^{-1}$
 - Calcolo del movimento libero $X_\ell(s)$
 - Calcolo del movimento forzato $X_f(s)$
 - Calcolo di $X(s)$ come $X(s) = X_\ell(s) + X_f(s)$
 - Scomposizione i fratti semplici di $X(s)$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo di $(sI - A)^{-1}$

► Ricordiamo che: $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{Adj}(sI - A)$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{\underbrace{s^2 + 3s + 2}_{\det(sI - A)}} \underbrace{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}_{\text{Adj}(sI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo di $X_\ell(s)$

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1} x(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{(sI - A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x(0)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{2s-4}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo di $X_f(s)$

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{(sI - A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B U(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \frac{2}{s} = \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{-4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $X(s)$

- $X(s)$ viene calcolato come somma di $X_\ell(s)$ e $X_f(s)$

$$X(s) = X_\ell(s) + X_f(s) = \underbrace{\left[\frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \right]}_{X_\ell(s)} + \underbrace{\left[\frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)} \right]}_{X_f(s)} =$$

$$= \left[\frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} \right]$$

Scomposizione in fratti semplici di $X(s)$

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1^{(1)}}{s} + \frac{R_2^{(1)}}{s+1} + \frac{R_3^{(1)}}{s+2} \\ \frac{R_1^{(2)}}{s} + \frac{R_2^{(2)}}{s+1} + \frac{R_3^{(2)}}{s+2} \end{bmatrix}$$

Calcolo dei residui per $X_1(s)$

$$X_1(s) = \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} = \frac{R_1^{(1)}}{s} + \frac{R_2^{(1)}}{s+1} + \frac{R_3^{(1)}}{s+2}$$

$$R_1^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} sX_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} = 3$$

$$R_2^{(1)} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)X_1(s) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} = 2$$

$$R_3^{(1)} = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)X_1(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} = -3$$

$$\rightarrow X_1(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

Calcolo dei residui per $X_2(s)$

$$X_2(s) = \frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{R_1^{(2)}}{s} + \frac{R_2^{(2)}}{s+1} + \frac{R_3^{(2)}}{s+2}$$

$$R_1^{(2)} = \lim_{s \rightarrow 0} sX_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} = -2$$

$$R_2^{(2)} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)X_2(s) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} = -2$$

$$R_3^{(2)} = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)X_2(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} = 6$$

$$\rightarrow X_2(s) = -\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{6}{s+2}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Risultato

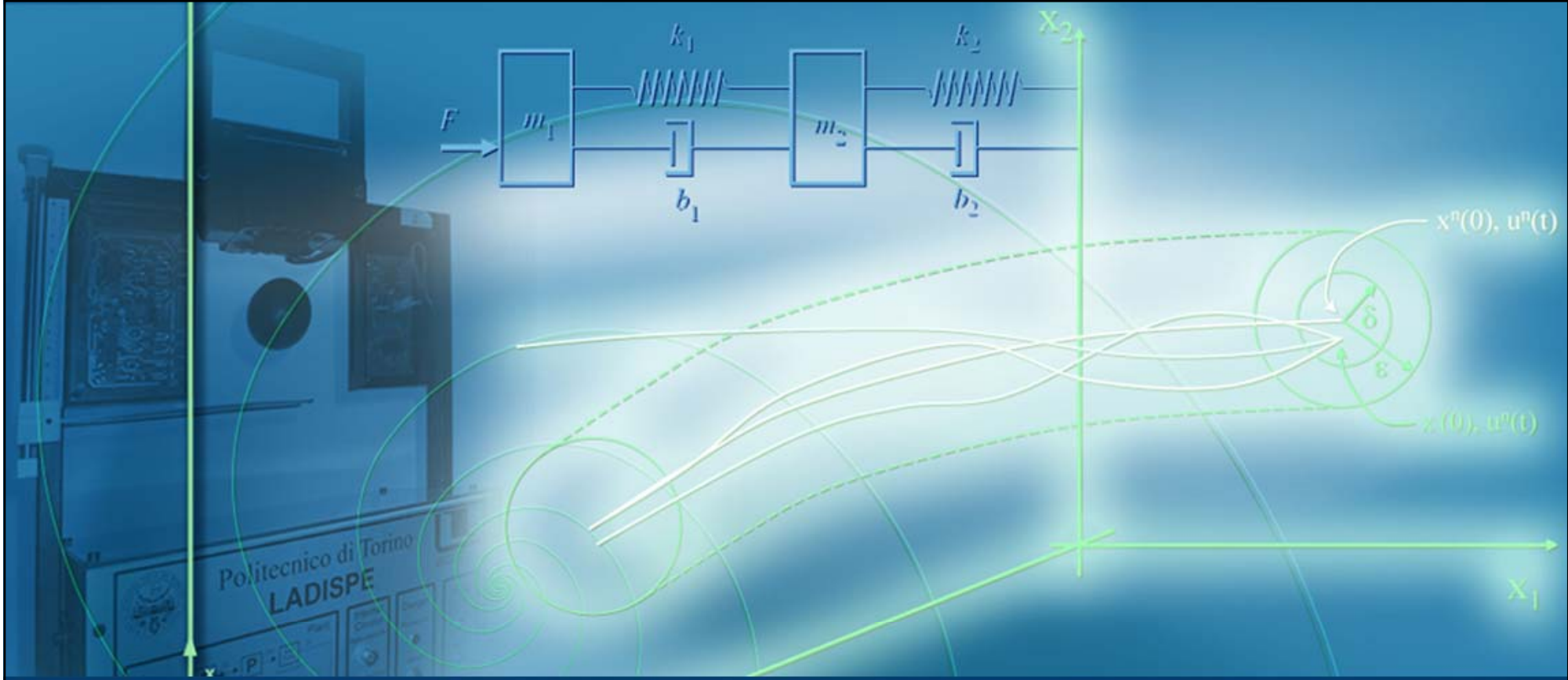
► Pertanto:

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} \\ -\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{6}{s+2} \end{bmatrix}$$

► Si può procedere con l'antitrasformazione

ricordando che: $Re^{at} \varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R}{s-a} \right\}$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -2 - 2e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Scomposizione in fratti semplici (parte II)

Scomposizione in fratti semplici con radici \mathbb{C}

- ▶ Quando nel denominatore di $F(s)$ sono presenti coppie distinte di radici complesse coniugate del tipo:

- $p_1 = \sigma_0 + j\omega_0, p_2 = p_1^* = \sigma_0 - j\omega_0$

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\underbrace{(s - \sigma_0 - j\omega_0)}_{(s-p_1)} \underbrace{(s - \sigma_0 + j\omega_0)}_{(s-p_2)} (s - p_3) \cdots (s - p_n)}$$

- ▶ Il procedimento della scomposizione in fratti semplici rimane invariato:

$$F(s) = \frac{R_1}{\underbrace{s - \sigma_0 - j\omega_0}_{s-p_1}} + \frac{R_2}{\underbrace{s - \sigma_0 + j\omega_0}_{s-p_2}} + \frac{R_3}{s - p_3} \cdots + \frac{R_n}{s - p_n}$$

Calcolo dei residui con radici \mathbb{C}

$$F(s) = \frac{R_1}{s - \sigma_0 - j\omega_0} + \frac{R_2}{s - \sigma_0 + j\omega_0} + \dots + \frac{R_n}{s - p_n}$$

- Anche il procedimento di calcolo dei residui rimane invariato:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow \sigma_0 + j\omega_0} (s - \sigma_0 - j\omega_0)F(s)$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow \sigma_0 - j\omega_0} (s - \sigma_0 + j\omega_0)F(s) = R_1^*$$

- Notiamo che i residui associati ad una coppia di radici complesse coniugate sono numeri complessi coniugati

Antitrasformazione in presenza radici \mathbb{C} (1/2)

- Occorre però fare attenzione all'antitrasformata della coppia di fratti semplici:

$$\frac{R_1}{s - \sigma_0 - j\omega_0} + \frac{R_1^*}{s - \sigma_0 + j\omega_0}$$

- Applicando la proprietà: $Re^{at} \varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R}{s - a} \right\}$ si ottiene:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{R_1}{s - \sigma_0 - j\omega_0} + \frac{R_1^*}{s - \sigma_0 + j\omega_0} \right\} = \left(R_1 e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} + R_1^* e^{(\sigma_0 - j\omega_0)t} \right) \varepsilon(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

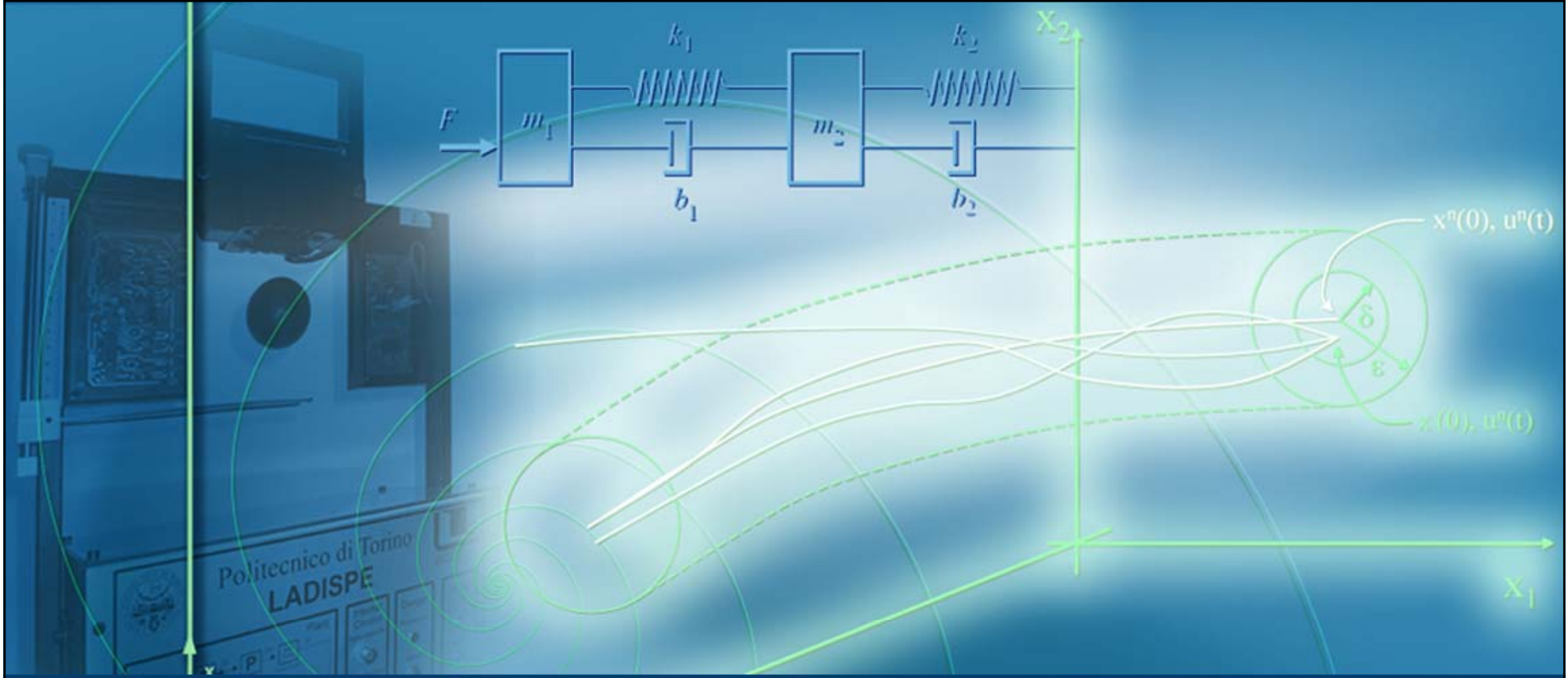
Antitrasformazione in presenza radici \mathbb{C} (2/2)

► Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$\left(R_1 e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} + R_1^* e^{(\sigma_0 - j\omega_0)t} \right) \varepsilon(t) = 2 |R_1| e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \arg(R_1)) \varepsilon(t)$$

$$|R_1| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(R_1) + \operatorname{Im}^2(R_1)}, \arg(R_1) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(R_1)}{\operatorname{Re}(R_1)}$$

► Pertanto, l'antitrasformata di una coppia di fratti semplici corrispondenti a radici \mathbb{C} va sempre considerata nel suo insieme



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Esempio di soluzione 2

$$y(t) = Cx(t)$$

Formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

- Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(t)$ nel caso in cui:
 - L'ingresso sia un gradino di ampiezza unitaria ($u(t) = \varepsilon(t)$)
 - Le condizioni iniziali siano: $x(0) = [1 \ 1]^T$

$$y(t) = Cx(t)$$

Procedimento di soluzione

- I passi da seguire sono:
 - Calcolo della soluzione $Y(s)$ nel dominio della trasformata di Laplace
 - Calcolo della scomposizione in fratti semplici (e dei corrispondenti residui) di $Y(s)$
 - Calcolo di $y(t)$ tramite antitrasformazione della scomposizione in fratti semplici di $Y(s)$

$$y(t) = Cx(t)$$

Impostazione dei calcoli in $\text{dom}(s)$

- Soluzione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1} x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\left[C(sI - A)^{-1} B + D \right] U(s)}_{Y_f(s)}$$

- Con

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = [0], x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, U(s) = \frac{1}{s}$$

Passi della soluzione in dom(s)

$$Y(s) = \underbrace{C (sI - A)^{-1} x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\left[C (sI - A)^{-1} B + D \right] U(s)}_{Y_f(s)}$$

- Per calcolare $Y(s)$ procediamo come segue:
- Calcolo del termine $(sI - A)^{-1}$
 - Calcolo della risposta libera $Y_\ell(s)$
 - Calcolo della risposta forzata $Y_f(s)$
 - Calcolo di $Y(s)$ come $Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$
 - Scomposizione i fratti semplici di $Y(s)$

Calcolo di $(sI - A)^{-1}$

► Si ricordi che: $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{Adj}(sI - A)$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{s^2 + 6s + 13}_{\det(sI - A)}} \underbrace{\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}}_{\text{Adj}(sI - A)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2 + 6s + 13} & \frac{2}{s^2 + 6s + 13} \\ \frac{-2}{s^2 + 6s + 13} & \frac{s+3}{s^2 + 6s + 13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo di $Y_\ell(s)$

$$\begin{aligned} Y_\ell(s) &= C(sI - A)^{-1} x(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+6s+13} & \frac{2}{s^2+6s+13} \\ \frac{-2}{s^2+6s+13} & \frac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x(0)} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & s+3 \\ s^2+6s+13 & s^2+6s+13 \end{bmatrix}}_{C(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x(0)} = \frac{s+1}{s^2+6s+13} \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo di $Y_f(s)$

$$\begin{aligned}
 Y_f(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \stackrel{D=0}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+6s+13} & \frac{2}{s^2+6s+13} \\ -2 & \frac{s+3}{s^2+6s+13} \\ \frac{-2}{s^2+6s+13} & \frac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & s+3 \\ s^2+6s+13 & s^2+6s+13 \end{bmatrix}}_{C(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)} = \frac{-2}{s^2+6s+13} \frac{1}{s} = \frac{-2}{s^3+6s^2+13s}
 \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Calcolo di $Y(s)$

- $Y(s)$ si calcola come somma di $Y_\ell(s)$ e $Y_f(s)$

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_\ell(s) + Y_f(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 6s^2 + 13s} = \\ &= \frac{s^2 + s - 2}{s(s + 3 - 2j)(s + 3 + 2j)} \end{aligned}$$

- Notiamo che nel denominatore di $Y(s)$ è presente una coppia di radici \mathbb{C} con $\sigma_0 = -3$ e $\omega_0 = 2$

$$y(t) = Cx(t)$$



Fratti semplici e residui di $Y(s)$

- Scomposizione in fratti semplici di $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s(s + 3 - 2j)(s + 3 + 2j)} = \frac{R_1}{s + 3 - 2j} + \frac{R_1^*}{s + 3 + 2j} + \frac{R_2}{s}$$

- Calcolo dei residui:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -3+2j} (s + 3 - 2j)Y(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow -3+2j} (s + 3 - 2j) \frac{s^2 + s - 2}{s(s + 3 - 2j)(s + 3 + 2j)} = 0.5769 + 0.3846j$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + s - 2}{s(s + 3 - 2j)(s + 3 + 2j)} = -0.1538$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Risultato in dom(s)

- Si ottiene quindi:

$$Y(s) = \frac{0.5769 + 0.3846j}{s + 3 - 2j} + \frac{0.5769 - 0.3846j}{s + 3 + 2j} - \frac{0.1538}{s}$$

- Per l'antitrasformazione della coppia di fratti semplici corrispondenti alle radici complesse coniugate si ha:

$$\sigma_0 = -3, \omega_0 = 2$$

$$R_1 = 0.5769 + 0.3846j$$

$$|R_1| = \sqrt{(0.5769)^2 + (0.3846)^2} = 0.6934$$

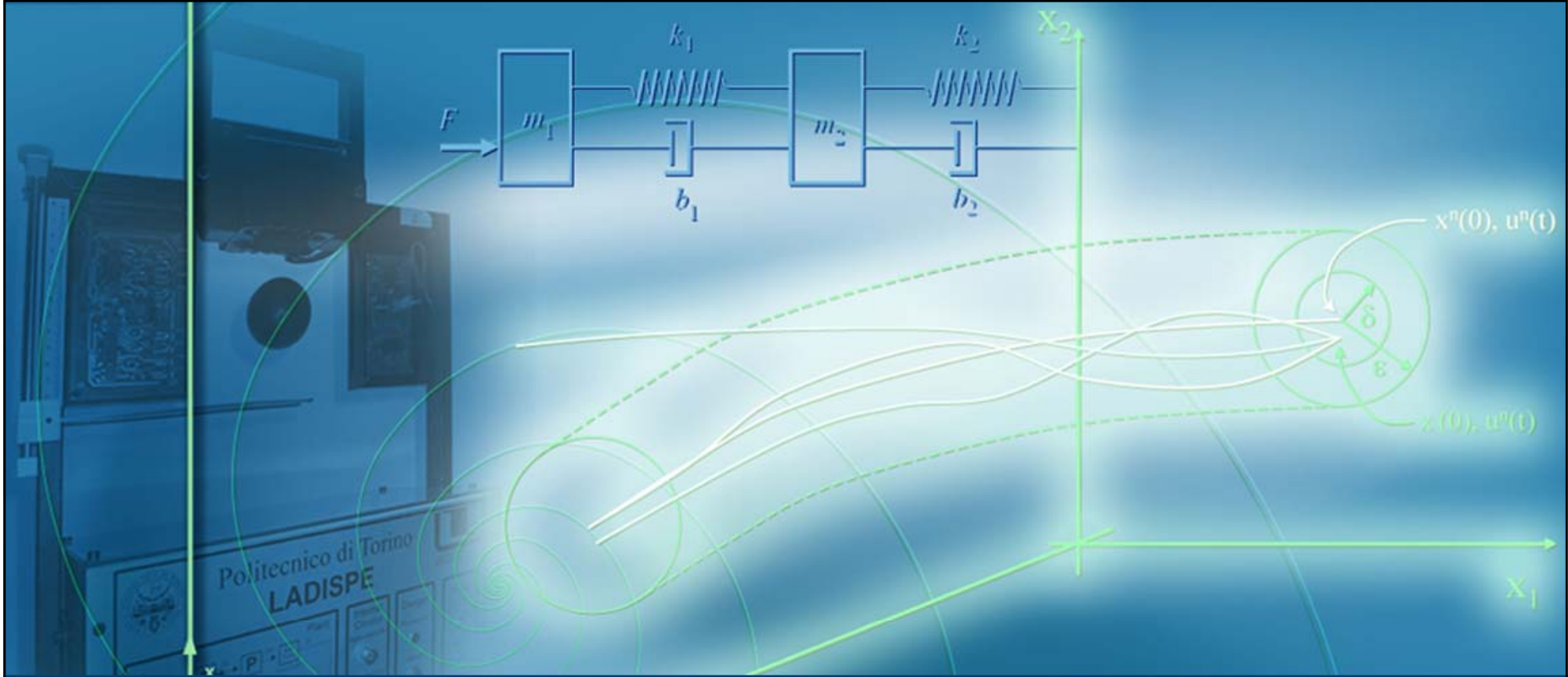
$$\arg(R_1) = \arctan\left(\frac{0.3846}{0.5769}\right) = 0.588 \text{ rad}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Risultato in dom(t)

- L'espressione analitica di $y(t)$ è quindi:

$$y(t) = \left(\underbrace{1.3868}_{2|R_1|} e^{-\overset{\sigma_0}{\downarrow} 3 t} \cos(2 t + \underbrace{0.588}_{\arg(R_1)}) - 0.1538 \right) \varepsilon(t)$$



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Scomposizione in fratti semplici (parte III)

$$y(t) = Cx(t)$$

Caso di $F(s)$ con radici multiple

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

➤ Supponiamo ora che:

- $N_F(s)$ e $D_F(s)$ non abbiano radici in comune
- Il denominatore di $F(s)$ abbia r ($r < n$) radici distinte con molteplicità maggiore o uguale a 1
- $F(s)$ sia strettamente propria ($m < n$)

➤ Indichiamo con

- $p_i \rightarrow i$ -esima radice distinta del denominatore di $F(s)$, ($i=1, \dots, r$)
- $\mu_i \rightarrow$ molteplicità della radice p_i , ($i=1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \mu_i = n$)

$$y(t) = Cx(t)$$

Scomposizione in fratti semplici con radici multiple

- Si può fattorizzare il denominatore di $F(s)$ mettendo in evidenza le r radici distinte con la rispettiva molteplicità:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)^{\mu_1} (s - p_2)^{\mu_2} \dots (s - p_r)^{\mu_r}}$$

- La scomposizione in fratti semplici di $F(s)$ è definita da:

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\mu_1} \frac{R_{1,k}}{(s - p_1)^k} + \sum_{k=1}^{\mu_2} \frac{R_{2,k}}{(s - p_2)^k} + \dots + \sum_{k=1}^{\mu_r} \frac{R_{r,k}}{(s - p_r)^k} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{R_{i,k}}{(s - p_i)^k}$$

Calcolo dei residui con radici multiple (1/2)

- In questo caso, la formula generale per calcolare i residui $R_{i,k}$ (associati alla radice p_i di molteplicità μ_i) è:

$$R_{i,k} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} \left[(s - p_i)^{\mu_i} F(s) \right], k = 1, \dots, \mu_i$$

- Nel caso $\mu_i = 1$ si ottiene la formula nota

$$R_{i,1} = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$$

Calcolo dei residui con radici multiple (2/2)

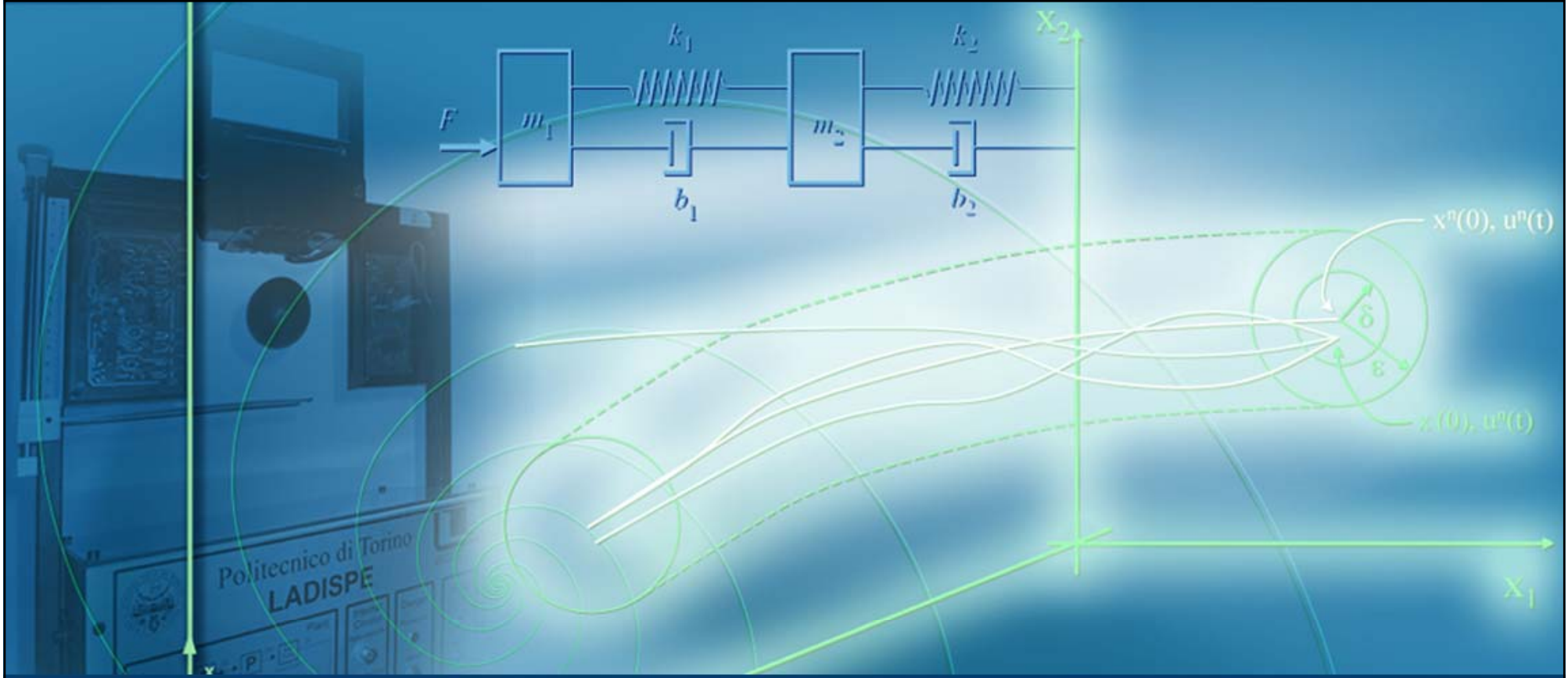
$$R_{i,k} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} \left[(s - p_i)^{\mu_i} F(s) \right], k = 1, \dots, \mu_i$$

► Nel caso $\mu_i = 2$ si ha:

$$R_{i,1} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d}{ds} \left[(s - p_i)^2 F(s) \right] \rightarrow \frac{R_{i,1}}{s - p_1}$$

$$R_{i,2} = \lim_{s \rightarrow p_i} \left[(s - p_i)^2 F(s) \right] \rightarrow \frac{R_{i,2}}{(s - p_1)^2}$$

► Nota: il medesimo procedimento si applica al caso di radici complesse



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Esempio di soluzione 3

$$y(t) = Cx(t)$$

Formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(t)$ nel caso in cui
 - L'ingresso sia una rampa di ampiezza 2 ($u(t) = 2 t \varepsilon(t)$)
 - Le condizioni iniziali siano nulle

$$y(t) = Cx(t)$$

Procedimento di soluzione

- I passi da seguire sono:
 - Calcolo della soluzione $Y(s)$ nel dominio della trasformata di Laplace
 - Calcolo della scomposizione in fratti semplici (e dei corrispondenti residui) di $Y(s)$
 - Calcolo di $y(t)$ tramite antitrasformazione della scomposizione in fratti semplici di $Y(s)$

$$y(t) = Cx(t)$$

Impostazione dei calcoli in $\text{dom}(s)$

- Soluzione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{Y_l(s)} + \underbrace{\left[C(sI - A)^{-1}B + D \right]U(s)}_{Y_f(s)}$$

- Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = [0], x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, U(s) = \frac{2}{s^2}$$

Passi della soluzione in dom(s)

$$Y(s) = \underbrace{C (sI - A)^{-1} x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\left[C (sI - A)^{-1} B + D \right] U(s)}_{Y_f(s)}$$

- Per calcolare $Y(s)$ notiamo innanzi tutto che, essendo nulle le condizioni iniziali, è necessario trovare la sola risposta forzata
- Procediamo quindi nel seguente modo:
 - Calcolo del termine $(sI - A)^{-1}$
 - Calcolo della risposta forzata $Y_f(s) \rightarrow Y(s) = Y_f(s)$
 - Scomposizione i fratti semplici di $Y(s)$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo di $(sI - A)^{-1}$

► Si ricordi che: $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{Adj}(sI - A)$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & 16 \\ -1 & s+8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{s^2 + 8s + 16}_{\det(sI - A)}} \underbrace{\begin{bmatrix} s+8 & -16 \\ 1 & s \end{bmatrix}}_{\text{Adj}(sI - A)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+8}{s^2 + 8s + 16} & \frac{-16}{s^2 + 8s + 16} \\ \frac{1}{s^2 + 8s + 16} & \frac{s}{s^2 + 8s + 16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+8}{(s+4)^2} & \frac{-16}{(s+4)^2} \\ \frac{1}{(s+4)^2} & \frac{s}{(s+4)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo di $Y(s) = Y_f(s)$

$$\begin{aligned}
 Y(s) = Y_f(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \stackrel{D=0}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+8}{(s+4)^2} & \frac{-16}{(s+4)^2} \\ \frac{1}{(s+4)^2} & \frac{s}{(s+4)^2} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\frac{2}{s^2}}_{U(s)} = \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+4)^2} & \frac{s}{(s+4)^2} \end{bmatrix}}_{C(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\frac{2}{s^2}}_{U(s)} = \frac{(2s+1)}{(s+4)^2} \frac{2}{s^2} = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}
 \end{aligned}$$

Scomposizione in fratti semplici

- Si ha quindi:

$$Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}$$

- Notiamo che nel denominatore di $Y(s)$ sono presenti le radici $p_1 = 0$ e $p_2 = -4$ entrambe di molteplicità 2 ($\mu_1 = \mu_2 = 2$)
- La scomposizione in fratti semplici è pertanto:

$$Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_{2,1}}{s+4} + \frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo dei residui (1/2)

$$Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_{2,1}}{s+4} + \frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}$$

► Calcolo dei residui associati alla radice $p_1 = 0$:

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 Y(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4(s+4)^2 - (2s+8) \cdot 2(2s+1)}{(s+4)^4} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2(-2s+6)}{(s+4)^3} = 0.1875 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s^2 Y(s) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \right] = 0.125 \end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcolo dei residui (2/2)

$$Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_{2,1}}{s+4} + \frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}$$

► Calcolo dei residui associati alla radice $p_2 = -4$:

$$\begin{aligned} R_{2,1} &= \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d}{ds} \left[(s+4)^2 Y(s) \right] = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d}{ds} \left[(s+4)^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -4} \frac{4s^2 - 2s \cdot 2(2s+1)}{s^4} = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{-4(s+1)}{s^3} = -0.1875 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2,2} &= \lim_{s \rightarrow -4} \left[(s+4)^2 Y(s) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -4} \left[(s+4)^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \right] = -0.875 \end{aligned}$$

Risultato

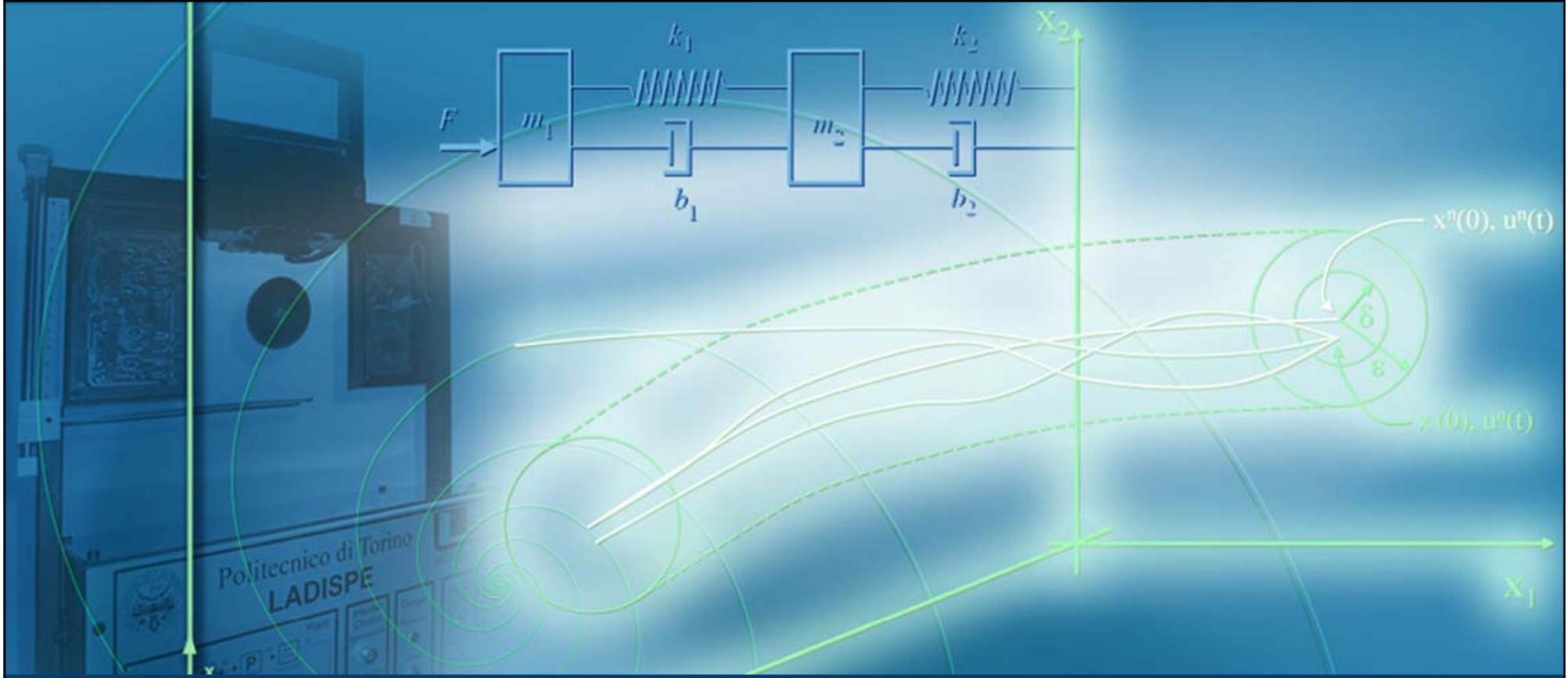
- Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_{2,1}}{s+4} + \frac{R_{2,2}}{(s+4)^2} = \\ &= \frac{0.1875}{s} + \frac{0.125}{s^2} - \frac{0.1875}{s+4} - \frac{0.875}{(s+4)^2} \end{aligned}$$

- Si può procedere con l'antitrasformazione ricordando che:

$$Re^{at} \varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R}{s-a} \right\}, \quad Rte^{at} \varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R}{(s-a)^2} \right\}$$

$$y(t) = \left(0.1875 + 0.125t - 0.1875e^{-4t} - 0.875te^{-4t} \right) \varepsilon(t)$$



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Considerazioni finali

Caso di $F(s)$ non strettamente propria (1/3)

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

- Nel caso in cui $F(s)$ non sia strettamente propria ($m = n$) prima di procedere alla scomposizione in fratti semplici occorre compiere la divisione (polinomiale) tra il numeratore $N_F(s)$ il denominatore $D_F(s)$

$$y(t) = Cx(t)$$

Caso di $F(s)$ non strettamente propria (2/3)

➤ Indicando con

- $K = b_m$ il quoziente
- $N'_F(s)$ il resto

della divisione tra $N_F(s)$ e $D_F(s)$ si ha:

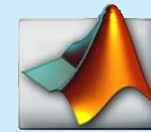
$$\begin{aligned} F(s) &= K + \frac{N'_F(s)}{D_F(s)} = \\ &= b_m + \frac{\overbrace{c_g s^g + c_{g-1} s^{g-1} + \dots + c_1 s + c_0}^{N'_F(s)}}{\underbrace{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}_{F'(s)}} = b_m + F'(s), \quad g < n \end{aligned}$$

Caso di $F(s)$ non strettamente propria (3/3)

- A questo punto, i procedimenti di scomposizione in fratti semplici visti in precedenza si possono applicare alla funzione $F'(s)$ (strettamente propria)
- L'espressione dell'antitrasformata di $F(s)$ sarà quindi la somma di un termine impulsivo del tipo $b_m \delta(t)$ e del risultato di antitrasformazione corrispondente a $F'(s)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{b_m + F'(s)\} = \\ &= b_m \delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}\end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



MatLab

- Il calcolo dei residui della scomposizione in fratti semplici può essere svolto in MatLab mediante l'istruzione: $[R, p, K] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$
 - num, den : numeratore e denominatore (in formato polinomiale) della funzione da scomporre $F(s)$
 - R : vettore dei residui
 - p : radici del denominatore della funzione da scomporre
 - K : quoziente della divisione tra numeratore e denominatore di $F(s)$
- Per maggiori dettagli, digitare `help residue` al prompt di MatLab