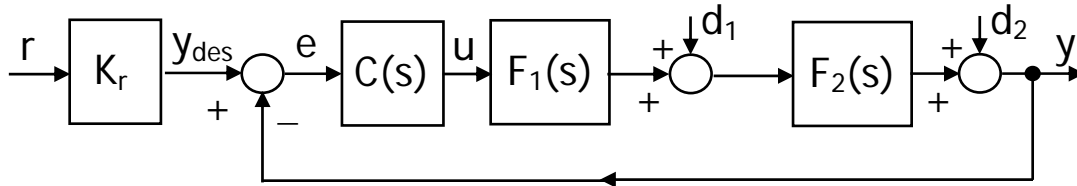


**Esercizio 1**

Sia dato il sistema di controllo riportato in figura con:

$$F_1(s) = \frac{30}{(s+15)}, \quad F_2(s) = \frac{3s+3}{s^3+10s^2+24s}, \quad K_r = 1, \quad d_1(t) = 1, \quad d_2(t) = 4.$$



Progettare il controllore C(s) in modo che il sistema retroazionato soddisfi le seguenti specifiche:

- a) errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.1, in assenza di disturbi;
- b) effetto del disturbo  $d_1(t)$  sull'uscita in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.05;
- c) effetto del disturbo  $d_2(t)$  sull'uscita in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.01;
- d) banda passante pari a circa 20 rad/s (la specifica è soddisfatta se l'errore commesso è inferiore in modulo al 10%);
- e) sovraelongazione massima della risposta al gradino unitario minore (o uguale) al 20%.

Dopo aver verificato che il sistema in catena chiusa così ottenuto soddisfi le specifiche richieste, valutarne:

- α) il tempo di salita  $t_s$  della risposta al gradino unitario;
- β) il picco di risonanza  $M_r$  della risposta in frequenza;
- χ) l'errore di inseguimento massimo in regime permanente a  $r(t) = \sin(0.2 t)$ , in assenza di disturbi.

**Svolgimento completo dell'esercizio 1**

(Il listato Matlab corrispondente è riportato al termine della soluzione)

Si osserva che le funzioni  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$  sono rispettivamente di tipo zero e di tipo uno; i loro guadagni stazionari sono pertanto dati da:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} F_1(s) = 2 \qquad K_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F_2(s) = 0.125$$

*Discussione delle specifiche statiche*

Essendo la funzione  $F_2(s)$  di tipo uno, la funzione complessiva del ramo diretto  $C(s) \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)$  è (almeno) di tipo uno; il sistema di controllo permette quindi l'inseguimento di un segnale di riferimento  $r(t)$  a rampa con errore finito in regime permanente.

I disturbi  $d_1(t)$  e  $d_2(t)$  sono entrambi costanti: il loro effetto sull'uscita in regime permanente è sicuramente limitato.

Non è quindi necessario introdurre poli nell'origine in  $C(s)$  per soddisfare le specifiche statiche date.

Si consideri pertanto  $C(s)$  della forma:

$$C(s) = K_c C'(s)$$

con  $C'(s)$  di tipo zero.

Specifica a)

Poiché il sistema risulta complessivamente di tipo uno, l'errore di inseguimento (in modulo) alla rampa unitaria in regime permanente è dato da:

$$|e_\infty| = \left| \frac{K_r}{K_c K_1 K_2} \right| = \frac{1}{0.25 |K_c|}$$

La specifica a) è pertanto soddisfatta se:

$$\frac{1}{0.25 |K_c|} \leq 0.1 \Rightarrow |K_c| \geq 40.$$

Specifica b)

Il blocco a monte del disturbo  $d_1(t)$ , costituito dal prodotto di  $C(s)$  e di  $F_1(s)$ , è di tipo zero. Essendo la funzione  $F_2(s)$  di tipo uno, l'uscita in regime permanente dovuta al disturbo  $d_1(t)$  vale in modulo:

$$|y_{d_1, \infty}| = \left| \frac{d_1}{K_c K_1} \right| = \frac{0.5}{|K_c|}$$

La specifica b) è pertanto soddisfatta se:

$$\frac{0.5}{|K_c|} \leq 0.05 \Rightarrow |K_c| \geq 10.$$

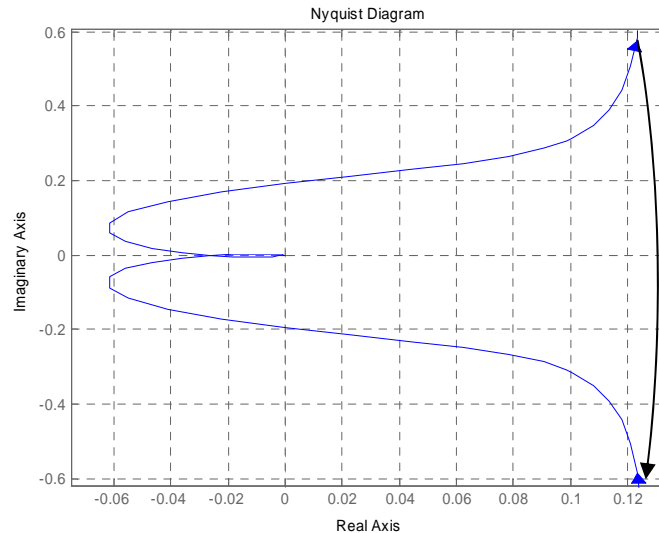
Specifica c)

L'effetto del disturbo  $d_2(t)$  sull'uscita in regime permanente è sempre nullo, perché il blocco a monte del disturbo, costituito dal prodotto di  $C(s)$ ,  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$ , è di tipo uno.

La specifica c) risulta quindi sempre soddisfatta, una volta garantita l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso.

Affinché tutte le specifiche statiche siano soddisfatte, sarà quindi necessario scegliere  $K_c$  pari almeno a 40 in valore assoluto.

Per scegliere correttamente il segno di  $K_c$ , è sufficiente tracciare il diagramma di Nyquist di  $F_1(j\omega)F_2(j\omega)$ , riportato nella figura seguente così come ricavato zoomando opportunamente il grafico ottenuto con il comando `nyquist(F1 * F2)` e completato manualmente con il semicerchio di raggio infinito. Dall'applicazione del criterio di Nyquist, è facile comprendere che  $K_c$  deve essere assunto di segno positivo: per valori negativi non si avrebbe in alcun modo la possibilità di stabilizzare il sistema ad anello chiuso.



Si assume quindi  $K_c = 40$ ; se necessario, tale valore potrà essere incrementato, ma non ridotto. Si definisce di conseguenza come funzione d'anello di partenza:

$$G_{a1}(s) = K_c F_1(s) F_2(s)$$

con  $K_c = 40$ .

*Discussione delle specifiche dinamiche*

Specifica d)

Si sceglie come valore desiderato per la pulsazione di cross-over:

$$\omega_{c,des} \cong 0.63 \cdot \omega_{B,des} \cong 12.6 \text{ rad/s}$$

Data la tolleranza assegnata, la specifica sarà soddisfatta se la banda passante del sistema ad anello chiuso risulterà compresa fra 18 e 22 rad/s.

Specifica e)

Dalla relazione approssimata che lega la sovraelongazione massima della risposta al gradino ed il picco di risonanza della risposta in frequenza ( $1 + \hat{s} \cong 0.9M_r$ ), risulta:

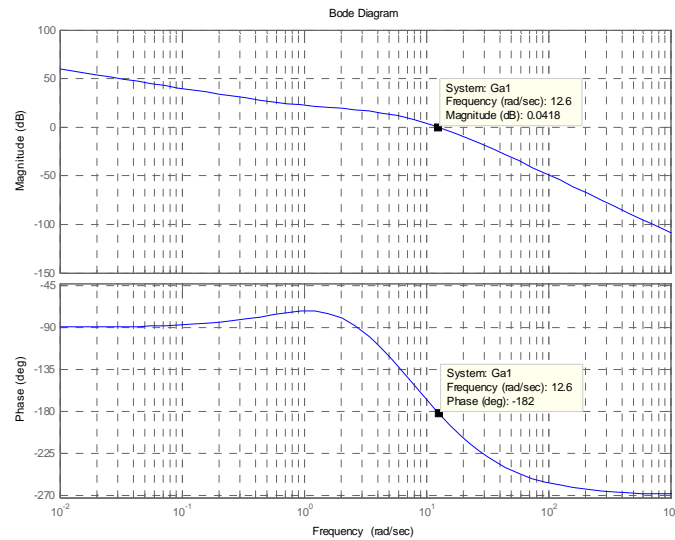
$$\hat{s} \leq 0.2 \Rightarrow M_r \leq 1.333 \cong 2.5 \text{ dB}$$

Dalla Carta di Nichols (ovvero dalle relazioni approssimate che legano picco di risonanza e margine di fase) si ricava la necessità di garantire un margine di fase minimo fra i  $45^\circ$  ed i  $50^\circ$ .

*Progetto del controllore*

Dai diagrammi di Bode di  $G_{a1}(j\omega)$  si leggono i valori di modulo e fase della funzione d'anello di partenza alla pulsazione di cross-over desiderata ( $\omega_{c,des} = 12.6 \text{ rad/s}$ ):

$$|G_{a1}(j\omega_{c,des})| = 0.04 \text{ dB}, \quad \arg(G_{a1}(j\omega_{c,des})) = -182^\circ$$



Si rileva quindi la necessità di recuperare (almeno) circa  $50^{\circ} - 55^{\circ}$  in corrispondenza di  $\omega_{c,des}$  utilizzando una o più reti anticipatrici; successivamente dovrà essere inserita una rete attenuatrice per annullare l'aumento di modulo introdotto dall'anticipatrice.

La soluzione proposta è costituita dalle seguenti reti:

Rete anticipatrice:

$m_d = 10, \tau_d = 0.25$  (corrispondente allo sfruttamento del massimo recupero di fase possibile)

$$R_d(s) = \frac{1 + 0.25s}{1 + 0.025s}$$

Rete attenuatrice:

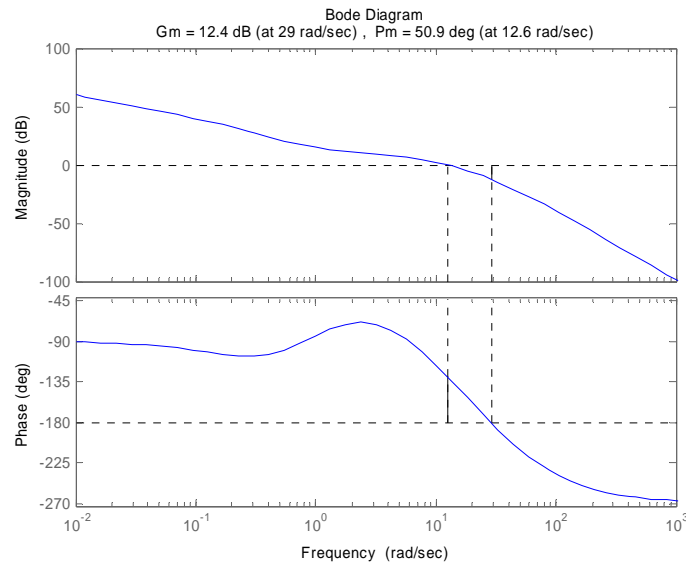
$m_i = 3.15, \tau_i = 4$  (corrispondente all'ascissa normalizzata  $\omega\tau_i \cong 50$ )

$$R_i(s) = \frac{1 + 1.27s}{1 + 4s}$$

Con il controllore così progettato:

$$C(s) = 40 \cdot \frac{(1 + 0.25s)}{(1 + 0.025s)} \cdot \frac{(1 + 1.27s)}{(1 + 4s)}$$

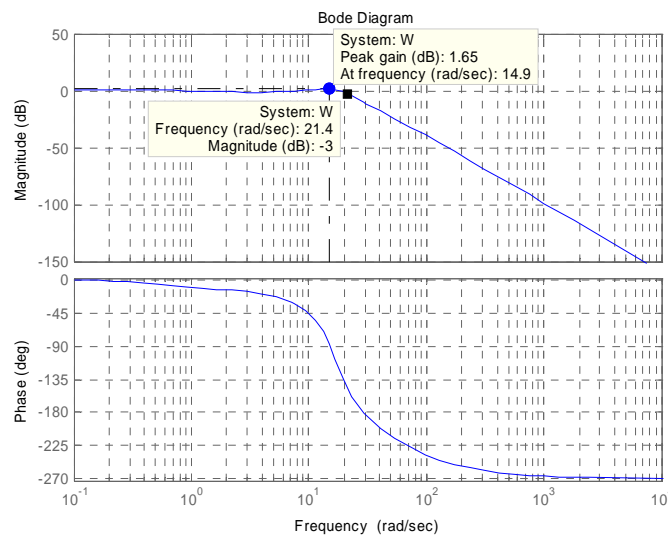
il sistema presenta:  $\omega_c = 12.6 \text{ rad/s}, m_{\phi} = 50.9^{\circ}$ , come si rileva dall'applicazione del comando margin alla funzione d'anello complessivamente ottenuta  $G_a(s) = C(s) F_1(s) F_2(s)$ :



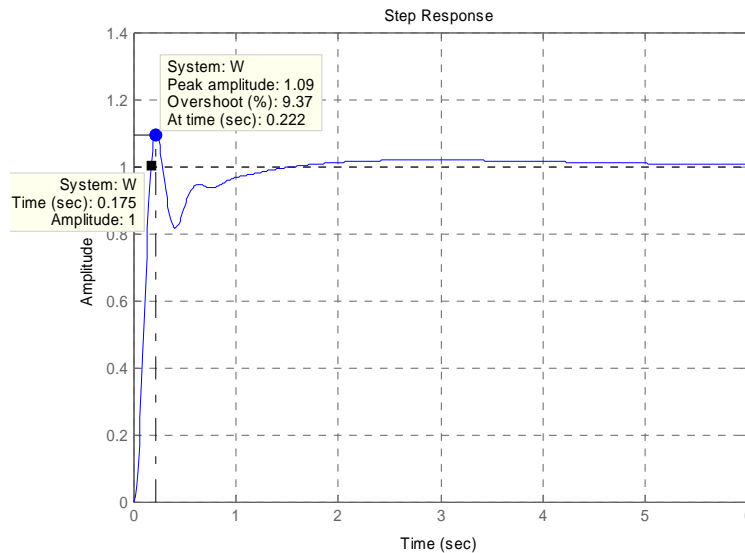
Avendo soddisfatto i requisiti operativi imposti, si determina la funzione di trasferimento  $W(s)$  del sistema ad anello chiuso (con il comando `feedback`) per la verifica delle specifiche imposte.

*Verifica delle specifiche dinamiche*

La banda passante, come si verifica dai diagrammi di Bode di  $W(j\omega)$ , vale 21.4 rad/s ed appartiene quindi all'intervallo richiesto dalla specifica d).



La sovralongazione massima della risposta al gradino vale 9.37% (come risulta dal grafico ottenuto con il comando `step`) ed è quindi inferiore al valore massimo ammesso (20%) dalla specifica e).



### Verifica delle specifiche statiche

Le specifiche statiche sono sicuramente soddisfatte, avendo scelto un valore di  $K_c$  tale da rispettare tutti i vincoli imposti, una volta assicurata l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso.

In particolare, risulta agevole verificare direttamente in Matlab (oppure con l'ausilio di Simulink) i seguenti risultati:

- errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente, in assenza di disturbi, pari a 0.1 (massimo valore ammissibile dalla specifica);
- effetto del disturbo  $d_1(t)$  sull'uscita in regime permanente pari a 0.0125 (minore di 0.05);
- effetto del disturbo  $d_2(t)$  sull'uscita in regime permanente nullo.

Tutte le specifiche imposte sono pertanto soddisfatte.

### Valutazione delle prestazioni del sistema ad anello chiuso

- Il tempo di salita  $t_s$  della risposta al gradino unitario è pari a 0.175 s, come risulta dal grafico sopra riportato.
- Il picco di risonanza  $M_r$  della risposta in frequenza è pari a 1.65 dB, come risulta dai diagrammi di Bode di  $W(j\omega)$ .
- L'errore di inseguimento massimo in regime permanente a  $r(t) = \sin(0.2 t)$ , in assenza di disturbi, vale 0.0245, calcolabile dal modulo della funzione di sensibilità,

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + G_a(j\omega)}, \text{ per } \omega = 0.2 \text{ rad/s.}$$

Listato Matlab

```

clear all
close all
s=tf('s');
F1=30/(s+15);
F2=(3*s+3)/(s^3+10*s^2+24*s);
d1=1;
d2=4;
Kr=1;
K1=dcgain(F1)
K2=dcgain(s*F2)

Kca=Kr/(K1*K2*0.1) % Kc minimo in modulo per soddisfare la specifica a)
Kcb=d1/(K1*0.05) % Kc minimo in modulo per soddisfare la specifica b)
Kc=max(Kca,Kcb) % valore minimo in modulo di Kc
nyquist(F1*F2) % scelta del segno di Kc
Ga1=Kc*F1*F2; % funzione di anello di partenza
wc=12.6; % wc desiderata
figure,bode(Ga1)

% Rete anticipatrice
md=10;
wtaud=sqrt(10);
taud=wtaud/wc;
taud=0.25 % valore arrotondato
Rd=(1+taud*s)/(1+taud/md*s);
Ga2=Rd*Ga1; % funzione di trasferimento d'anello comprendente anche la rete anticipatrice
[ma2,fa2]=bode(Ga2,wc) % valutazione di modulo e fase alla wc desiderata

% Rete attenuatrice
mi=3.15;
wtaui=50;
taui=wtaui/wc;
taui=4 % valore arrotondato
Ri=(1+taui/mi*s)/(1+taui*s);

Ga=Ri*Ga2; % funzione di trasferimento d'anello finale

figure,margin(Ga) % verifica dei requisiti operativi

C=Kc*Rd*Ri; % controllore risultante
W=feedback(C*F1*F2,1); % funzione di trasferimento ad anello chiuso
figure,bode(W) % verifica della specifica d) e valutazione di Mr
figure,step(W) % verifica della specifica e) e valutazione di ts

sens=feedback(1,Ga); % funzione di sensibilità
We=Kr*sens; % fdt d'errore
figure,step(We/s) % errore di inseguimento alla rampa
Wd1=F2*sens; % fdt y/d1
Wd2=sens; % fdt y/d2
figure,step(d1*Wd1); % effetto del disturbo d1 su y
figure,step(d2*Wd2); % effetto del disturbo d2 su y

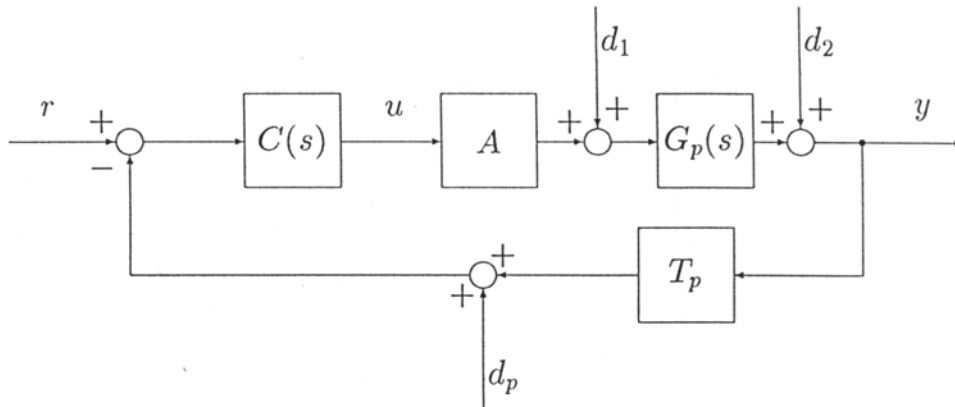
```

```

wd=0.2; % pulsazione del riferimento sinusoidale
[ms,fs]=bode(sens,wd);
err_sin=ms*Kr % errore massimo di inseguimento alla sinusoide in regime permanente
    
```

**Esercizio 2**

Il sistema di controllo schematizzato in figura rappresenta un servomeccanismo di posizione.  $A$ ,  $G_p$  e  $T_p$  rappresentano rispettivamente l'attuatore, l'impianto e il trasduttore di posizione. Il segnale  $u$  è il comando [V],  $y$  è l'uscita [m],  $r$  è il riferimento [V],  $d_1$  è un disturbo costante additivo sull'attuatore [V],  $d_2$  è un disturbo a rampa additivo sull'uscita [m],  $d_p$  è un disturbo sinusoidale additivo sul trasduttore [V].



Sono dati:

$$G_p(s) = \frac{-0.65}{s^3 + 4s^2 + 1.75s}; T_p = 1 \text{ Vm}^{-1}; A = 9;$$

$$d_1(t) = A_1, \text{ con } |A_1| \leq 5.5 \cdot 10^{-3} \text{ V};$$

$$d_2(t) = A_2 t, \text{ con } |A_2| \leq 5.5 \cdot 10^{-3} \text{ V};$$

$$d_p(t) = A_p \sin(\omega_p t), \text{ con } |A_p| \leq 10^{-3} \text{ V}, \omega_p = 30 \text{ rad/s}.$$

Progettare il controllore  $C(s)$  in modo che il sistema retroazionato soddisfi le seguenti specifiche:

- a) errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente:  $|e_{r,\infty}| \leq 2 \cdot 10^{-1} \text{ V}$ , in assenza di disturbi;
- b) errore in regime permanente indotto dal disturbo  $d_1(t)$ :  $|e_{d_1,\infty}| \leq 6 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ ;
- c) errore in regime permanente indotto dal disturbo  $d_2(t)$ :  $|e_{d_2,\infty}| \leq 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ V}$ ;
- d) tempo di salita  $t_s$  non superiore a 1 s;
- e) sovraelongazione massima della risposta al gradino unitario minore (o uguale) al 30%.



Dopo aver verificato che il sistema in catena chiusa così ottenuto soddisfa le specifiche richieste, valutarne:

- α) la banda passante;
- β) il picco di risonanza  $M_r$  della risposta in frequenza;
- γ) il valore massimo in modulo del comando  $u(t)$  che può essere indotto in regime permanente dal disturbo  $d_p(t)$ .

**Svolgimento completo dell'esercizio 2**

(Il listato Matlab corrispondente è riportato al termine della soluzione)

Si osserva che la funzione  $G_p(s)$  è di tipo uno (mentre il blocco  $A$  è costante); il suo guadagno stazionario è pertanto dato da:

$$K_{Gp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_p(s) = -0.3714$$

Poiché il blocco  $T_p$  ha guadagno unitario, per semplicità la retroazione sarà considerata direttamente come unitaria, tralasciando la presenza di tale blocco.

*Discussione delle specifiche statiche*

Essendo la funzione  $G_p(s)$  di tipo uno, la funzione complessiva del ramo diretto  $C(s) \cdot A \cdot G_p(s)$  è (almeno) di tipo uno; il sistema di controllo permette quindi l'inseguimento di un segnale di riferimento  $r(t)$  a rampa con errore finito in regime permanente.

Il disturbo  $d_1(t)$  è costante: l'errore da esso indotto in regime permanente è sicuramente limitato.

Nei blocchi a monte del punto di ingresso del disturbo  $d_2(t)$ , polinomiale di primo grado, è presente (almeno) un polo nell'origine (quello di  $G_p(s)$ ): anche l'errore da esso indotto in regime permanente è quindi limitato.

Non è pertanto necessario introdurre poli nell'origine in  $C(s)$  per soddisfare le specifiche statiche date.

Si consideri pertanto  $C(s)$  della forma:

$$C(s) = K_c C'(s)$$

con  $C'(s)$  di tipo zero.

Specificazione a)

Poiché il sistema risulta complessivamente di tipo uno, l'errore di inseguimento (in modulo) alla rampa unitaria in regime permanente è dato da:

$$|e_{r,\infty}| = \left| \frac{1}{K_c \cdot A \cdot K_{Gp}} \right| = \frac{1}{3.3429 |K_c|}$$

La specifica a) è pertanto soddisfatta se:

$$\frac{1}{3.3429 |K_c|} \leq 0.2 \Rightarrow |K_c| \geq 1.4957.$$

Specifica b)

Il blocco a monte del disturbo  $d_1(t)$ , costituito dal prodotto di  $C(s)$  e di  $A$ , è di tipo zero. Essendo la funzione  $G_p(s)$  di tipo uno, l'errore massimo in regime permanente indotto dal disturbo  $d_1(t)$  vale in modulo:

$$|e_{d_1,\infty}| = \left| \frac{A_1}{K_c \cdot A} \right| = \frac{6.11 \cdot 10^{-4}}{|K_c|}$$

La specifica b) è pertanto soddisfatta se:

$$\frac{6.11 \cdot 10^{-4}}{|K_c|} \leq 6 \cdot 10^{-4} \Rightarrow |K_c| \geq 1.0185.$$

Specifica c)

Il blocco a monte del disturbo  $d_2(t)$ , polinomiale di primo grado, è costituito dall'intera funzione del ramo diretto  $C(s) \cdot A \cdot G_p(s)$  di tipo uno; l'errore massimo in regime permanente indotto dal disturbo  $d_2(t)$  è pertanto pari in modulo a:

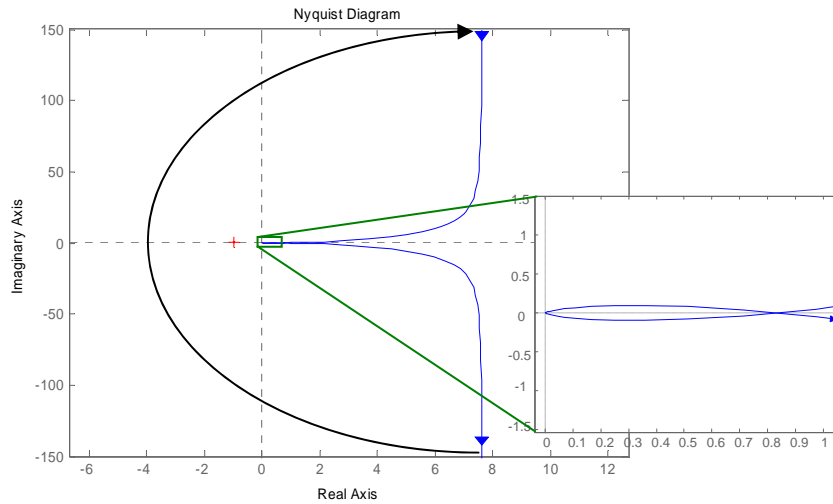
$$|e_{d_2,\infty}| = \left| \frac{A_2}{K_c \cdot A \cdot K_{G_p}} \right| = \frac{1.6453 \cdot 10^{-3}}{|K_c|}$$

La specifica c) è quindi soddisfatta se:

$$\frac{1.6453 \cdot 10^{-3}}{|K_c|} \leq 1.5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow |K_c| \geq 1.0969.$$

Affinché tutte le specifiche statiche siano soddisfatte, sarà quindi necessario scegliere  $K_c$  pari almeno a 1.5 in valore assoluto.

Per scegliere correttamente il segno di  $K_c$ , è sufficiente tracciare il diagramma di Nyquist di  $A \cdot G_p(j\omega)$ , riportato nella figura seguente così come ricavato dal comando `nyquist(A*Gp)` e completato manualmente con il semicerchio di raggio infinito (corredato di zoom della parte finale del grafico). Dall'applicazione del criterio di Nyquist, è facile comprendere che  $K_c$  deve essere assunto di segno negativo: per valori positivi non si avrebbe in alcun modo la possibilità di stabilizzare il sistema ad anello chiuso.



Si assume quindi  $K_c = -1.5$ ; se necessario, il modulo di tale parametro potrà essere incrementato, ma non ridotto.

Si definisce di conseguenza come funzione d'anello di partenza:

$$G_{al}(s) = K_c \cdot A \cdot G_p(s)$$

con  $K_c = -1.5$ .

*Discussione delle specifiche dinamiche*

Specifica d)

Dalla relazione approssimata che lega il tempo di salita della risposta al gradino e la banda passante del sistema ( $\omega_B \cdot t_s \cong 3$ ), risulta:

$$t_{s,max} = 1 \text{ s} \Rightarrow \omega_{B,min} \cong 3 \text{ rad/s}$$

Si determina come valore minimo per la pulsazione di cross-over:

$$\omega_{c,min} \cong 0.63 \cdot \omega_{B,min} \cong 1.9 \text{ rad/s}$$

È opportuno quindi scegliere per la pulsazione di cross-over desiderata un valore superiore a  $\omega_{c,min}$ ; ad esempio  $\omega_{c,des} \cong 2.2 \text{ rad/s}$ .

Specifica e)

Dalla relazione approssimata che lega la sovraelongazione massima della risposta al gradino ed il picco di risonanza della risposta in frequenza ( $1 + \hat{s} \cong 0.9M_r$ ), risulta:

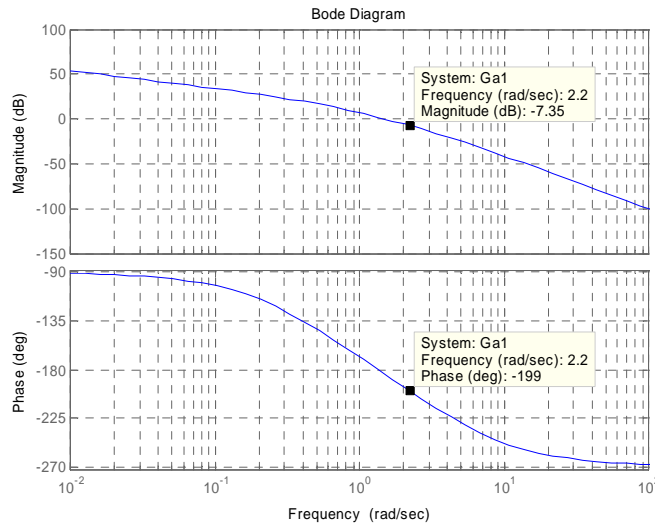
$$\hat{s} \leq 0.3 \Rightarrow M_r \leq 1.444 \cong 3.2 \text{ dB}$$

Dalla Carta di Nichols (ovvero dalle relazioni approssimate che legano picco di risonanza e margine di fase) si ricava la necessità di garantire un margine di fase non inferiore a  $40^\circ$ . Si punterà ad ottenere un margine di circa  $45^\circ$ .

*Progetto del controllore*

Dai diagrammi di Bode di  $G_{al}(j\omega)$  si leggono i valori di modulo e fase della funzione d'anello di partenza alla pulsazione di cross-over desiderata ( $\omega_{c,des} = 2.2$  rad/s):

$$|G_{al}(j\omega_{c,des})| = -7.35 \text{ dB}, \quad \arg(G_{al}(j\omega_{c,des})) = -199^\circ$$



Si rileva quindi la necessità di recuperare circa  $65^\circ$  in corrispondenza di  $\omega_{c,des}$ , utilizzando due reti anticipatrici e facendo in modo che l'aumento complessivo di modulo non sia superiore a 7.35 dB. Se l'aumento di modulo dovesse risultare significativamente minore di tale quantità, sarà sufficiente incrementare opportunamente il valore assoluto di  $K_c$ .

La soluzione proposta è costituita da due reti anticipatrici (uguali), aventi come parametri caratteristici:  $m_d = 4$ ,  $\tau_d = 0.55$  (corrispondente all'ascissa normalizzata  $\omega\tau_d \cong 1.2$ , in modo da inserire un aumento totale di modulo pari all'incirca a quanto richiesto):

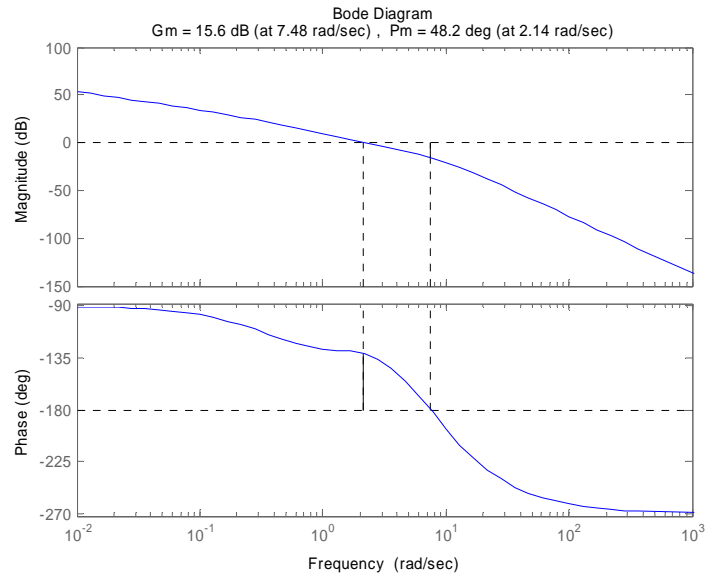
$$R_{d1}(s) = R_{d2}(s) = \frac{1 + 0.55s}{1 + 0.1375s}$$

Con l'inserimento di tali reti, il modulo della funzione d'anello alla pulsazione di 2.2 rad/s risulta prossimo a 1 (in particolare vale 0.9654).

Si può provare pertanto a mantenere invariato il valore di  $K_c$ , considerando come controllore:

$$C(s) = -1.5 \cdot \left( \frac{1 + 0.55s}{1 + 0.1375s} \right)^2$$

Dall'applicazione del comando `margin` alla funzione d'anello complessivamente ottenuta  $G_a(s) = C(s) \cdot A \cdot G_p(s)$ , si rilevano i seguenti valori:  $\omega_c = 2.14$  rad/s,  $m_\phi = 48.2^\circ$ .

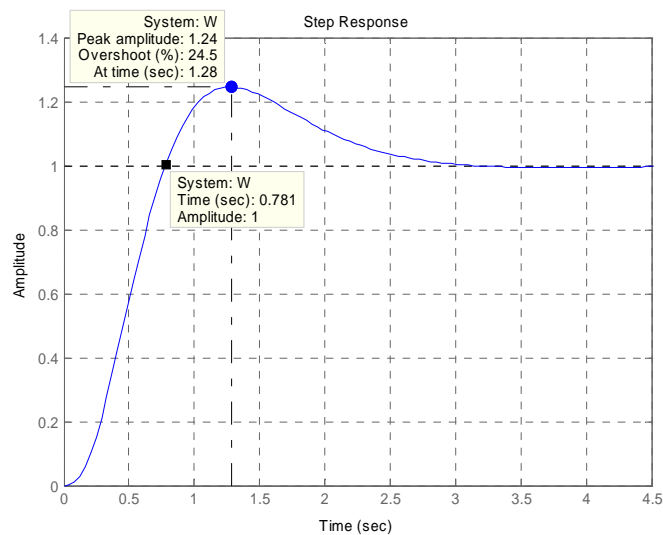


Avendo soddisfatto i requisiti operativi imposti, si determina la funzione di trasferimento  $W(s)$  del sistema ad anello chiuso (con il comando feedback) per la verifica delle specifiche imposte.

*Verifica delle specifiche dinamiche*

Come risulta dal grafico ottenuto con il comando step:

- Il tempo di salita della risposta al gradino risulta pari a 0.781 s ed è quindi inferiore a 1 s, come richiesto dalla specifica d)
- La sovraelongazione massima della risposta al gradino vale 24.5% ed è quindi inferiore al valore massimo ammesso (30%) dalla specifica e).



*Verifica delle specifiche statiche*

Le specifiche statiche sono sicuramente soddisfatte, avendo scelto un valore di  $K_c$  tale da rispettare tutti i vincoli imposti, una volta assicurata l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso.

In particolare, risulta agevole verificare direttamente in Matlab (oppure con l'ausilio di Simulink) i seguenti risultati:

- a) errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente, in assenza di disturbi, pari a 0.199 (minore di 0.2);
- b) errore indotto dal disturbo  $d_1(t)$  in regime permanente pari a  $4.07 \cdot 10^{-4}$  (minore di  $6 \cdot 10^{-4}$  in valore assoluto);
- c) errore indotto dal disturbo  $d_2(t)$  in regime permanente pari a  $-1.1 \cdot 10^{-3}$  (minore di  $1.5 \cdot 10^{-3}$  in valore assoluto).

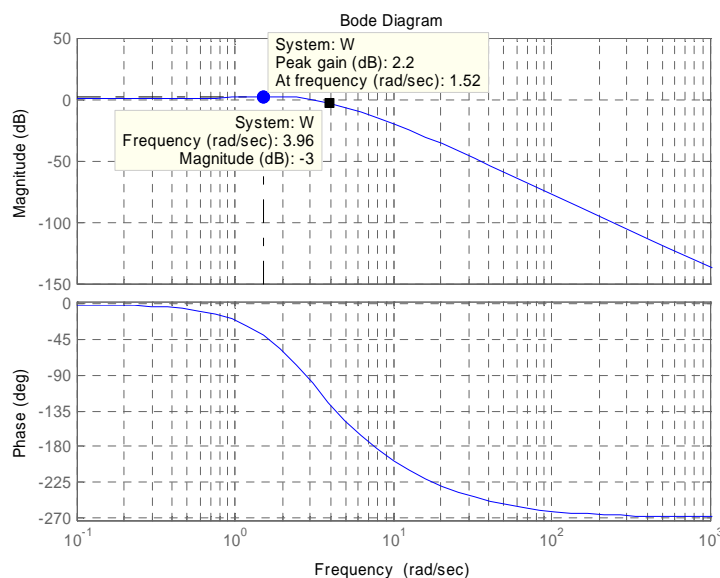
Tutte le specifiche imposte sono pertanto soddisfatte.

*Valutazione delle prestazioni del sistema ad anello chiuso*

- $\alpha$ ) La banda passante del sistema ad anello chiuso è pari a 3.96 rad/s, come risulta dai diagrammi di Bode di  $W(j\omega)$ .
- $\beta$ ) Il picco di risonanza  $M_r$  della risposta in frequenza è pari a 2.2 dB (ancora dai diagrammi di Bode di  $W(j\omega)$ ).
- $\chi$ ) Il valore massimo del comando  $u(t)$  indotto dal disturbo  $d_p(t)$  in regime permanente è dato da:

$$\bar{u}_{d_p, \infty} = A_p \cdot |W_{u, dp}(j\omega_p)| = 0.228$$

ove  $W_{u, dp}(s) = \frac{u(s)}{d_p(s)} = -\frac{C(s)}{1 + G_a(s)}$  (avendo considerato  $T_p$  unitario).



*Listato Matlab*

```

close all
clear all
s = tf('s');
Gp = -0.65/(s^3+4*s^2+1.75*s);
A = 9;
Tp=1;
A1=5.5e-3;
A2=5.5e-3;
Ap=1e-3;
wp=30;
KGp=dcgain(Gp*s);

Kca=1/(abs(KGp)*A*0.2)      % Kc minimo in modulo per soddisfare la specifica a)
Kcb=A1/(A*6e-4)           % Kc minimo in modulo per soddisfare la specifica b)
Kcc=A2/(abs(KGp)*A*1.5e-3) % Kc minimo in modulo per soddisfare la specifica c)
Kc_abs=max([Kca Kcb Kcc])  % valore minimo in modulo di Kc
nyquist(A*Gp),axis equal  % scelta del segno di Kc
Kc = -1.5;

Gal = Kc*A*Gp; % funzione di anello di partenza
wc = 2.2;      % wc desiderata
figure,bode(Gal)

% Reti anticipatrici
md=4;
wtaud=1.2;
taud=wtaud/wc;
taud=0.55 % valore arrotondato
Rd=(1+taud*s)/(1+taud/md*s);
Ga2=Rd^2*Gal; % funzione di trasferimento d'anello comprendente anche le reti anticipatrici
[ma2,fa2]=bode(Ga2,wc) % valutazione di modulo e fase alla wc desiderata

figure, margin(Ga2) % verifica dei requisiti operativi

C=Kc*Rd^2;          % controllore risultante
W=feedback(C*A*Gp,1); % funzione di trasferimento ad anello chiuso
figure,step(W)      % verifica delle specifiche d) ed e)
figure,bode(W)      % valutazione di wB e Mr

We=feedback(1,Ga2); % fdt d'errore
figure,step(We/s)   % errore di inseguimento alla rampa
We_d1=-Gp*We;      % fdt e/d1
We_d2=-We;         % fdt e/d2
figure,step(A1*We_d1); % errore indotto dal disturbo d1
figure,step(A2/s*We_d2); % errore indotto dal disturbo d2

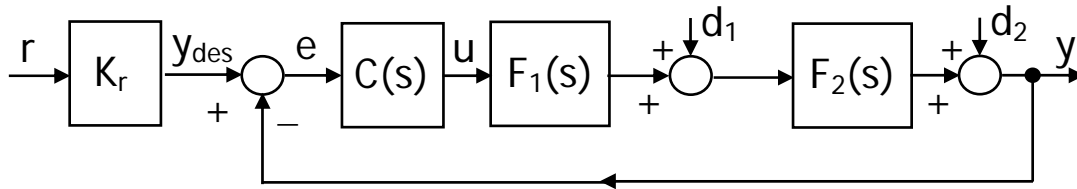
Wu_dp=-C*We;       % fdt u/dp
[mu,fu]=bode(Wu_dp,wp);
umax_dp=Ap*mu      % comando massimo indotto dal disturbo dp

```

**Esercizio 3**

Sia dato il sistema di controllo riportato in figura con:

$$F_1(s) = \frac{s+40}{s+2}, \quad F_2(s) = \frac{80}{s^2+13s+256}, \quad K_r = 1, \quad d_1(t) = 0.5, \quad d_2(t) = 0.2.$$



Progettare il controllore  $C(s)$  in modo che il sistema retroazionato soddisfi le seguenti specifiche:

- a) errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.04, in assenza di disturbi;
- b) effetto del disturbo  $d_1(t)$  sull'uscita in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.01;
- c) effetto del disturbo  $d_2(t)$  sull'uscita in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.01;
- d) tempo di salita della risposta al gradino unitario pari a circa 0.2 s (la specifica è soddisfatta se l'errore commesso è inferiore in modulo al 20%);
- e) sovraelongazione massima della risposta al gradino unitario minore (o uguale) al 35%.

Dopo aver verificato che il sistema in catena chiusa così ottenuto soddisfi le specifiche richieste, valutarne:

- $\alpha$ ) la banda passante;
- $\beta$ ) il picco di risonanza  $M_r$  della risposta in frequenza;
- $\chi$ ) il valore massimo in modulo del comando  $u(t)$  applicato dal controllore progettato, quando  $r(t) = 1$  (gradino unitario), in assenza di disturbi.



### Traccia della soluzione dell'esercizio 3

Si osserva che le funzioni  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$  sono entrambe di tipo zero; i loro guadagni stazionari sono rispettivamente dati da:  $K_{F1} = 20$ ,  $K_{F2} = 0.3125$ .

#### *Discussione delle specifiche statiche*

La specifica a) richiede l'inserimento di un polo nell'origine in  $C(s)$  (altrimenti la funzione complessiva del ramo diretto  $C(s) \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)$  risulterebbe di tipo zero, impedendo l'inseguimento di un riferimento a rampa con errore stazionario limitato).

Il controllore  $C(s)$  è assunto pertanto della forma:

$$C(s) = \frac{K_c}{s} C'(s)$$

con  $C'(s)$  di tipo zero.

Con l'inserimento di un polo nell'origine in  $C(s)$ , le specifiche b) e c) risultano sempre soddisfatte, una volta garantita l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso, mentre la specifica a) richiede:

$$|K_c| \geq 4$$

Per scegliere correttamente il segno di  $K_c$ , è sufficiente tracciare il diagramma di Nyquist di  $F_1(s)F_2(s)/s$  ed applicare il criterio di Nyquist, da cui risulta necessario considerare  $K_c$  di segno positivo per avere la possibilità di stabilizzare il sistema ad anello chiuso.

Si definisce di conseguenza come funzione d'anello di partenza:

$$G_{al}(s) = \frac{K_c}{s} F_1(s)F_2(s)$$

con  $K_c = 4$ .

#### *Discussione delle specifiche dinamiche*

Le specifiche d) ed e) impongono rispettivamente:

- $\omega_{c,des} \cong 9.5 \text{ rad/s}$
- Margine di fase non inferiore a  $36^\circ$ : si punterà ad ottenere  $m_\varphi \geq 40^\circ$ .

#### *Progetto del controllore e verifica delle specifiche*

Dal valore della fase di  $G_{al}(j\omega)$  alla pulsazione di cross-over desiderata, si rileva la necessità di recuperare  $50^\circ - 55^\circ$  in corrispondenza di tale pulsazione. L'aumento di modulo non dovrebbe essere superiore a 3dB: a causa dell'entità del recupero di fase richiesto, e del conseguente inevitabile aumento di modulo significativamente più elevato, si prevede il successivo inserimento di una rete attenuatrice. È opportuno pertanto innalzare il recupero di fase di alcuni gradi.

Si propongono due soluzioni alternative, in cui il recupero di fase viene ottenuto con reti anticipatrici oppure con l'inserimento di uno zero da realizzarsi congiuntamente al polo nell'origine di  $C(s)$  (a formare un blocco di tipo PI).

Soluzione 1:

La prima soluzione proposta è costituita dalle seguenti reti:

Reti anticipatrici: due uguali con  $m_d = 4$ ,  $\tau_d = 0.126$  (corrispondente all'ascissa normalizzata  $\omega\tau_d \cong 1.2$ )

$$R_d(s) = \frac{1 + 0.126s}{1 + 0.0315s}$$

Rete attenuatrice:

$m_i = 1.54$ ,  $\tau_i = 3.16$  (corrispondente all'ascissa normalizzata  $\omega\tau_i \cong 30$ )

$$R_i(s) = \frac{1 + 2.052s}{1 + 3.16s}$$

Con il controllore così progettato:

$$C(s) = \frac{4}{s} \cdot \left( \frac{1 + 0.126s}{1 + 0.0315s} \right)^2 \cdot \frac{(1 + 2.052s)}{(1 + 3.16s)}$$

le specifiche risultano tutte soddisfatte con:

- a) errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente, in assenza di disturbi, pari a 0.04 (massimo valore ammissibile dalla specifica);
- b) effetto del disturbo  $d_1(t)$  sull'uscita in regime permanente nullo;
- c) effetto del disturbo  $d_2(t)$  sull'uscita in regime permanente nullo;
- d) tempo di salita della risposta al gradino pari a 0.189 s (compreso fra 0.16 s e 0.24 s) ;
- e) sovraelongazione massima della risposta al gradino pari al 33.4% (inferiore al 35%).

Soluzione 2:

La seconda soluzione proposta è costituita da:

Recupero di fase: al posto del solo polo nell'origine in  $C(s)$ , viene inserito un blocco PI della forma  $(1 + \tau_z s)/s$  con  $\tau_z = 0.19$  (corrispondente all'ascissa normalizzata  $\omega\tau_z \cong 1.8$ )

Rete attenuatrice:

$m_i = 1.42$ ,  $\tau_i = 4.2$  (corrispondente all'ascissa normalizzata  $\omega\tau_i \cong 40$ )

$$R_i(s) = \frac{1 + 2.958s}{1 + 4.2s}$$

Con il controllore così progettato:

$$C(s) = \frac{4 \cdot (1 + 0.19s)}{s} \cdot \frac{(1 + 2.958s)}{(1 + 4.2s)}$$

le specifiche risultano tutte soddisfatte con:

- a) errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente, in assenza di disturbi, pari a 0.04 (massimo valore ammissibile dalla specifica);
- b) effetto del disturbo  $d_1(t)$  sull'uscita in regime permanente nullo;
- c) effetto del disturbo  $d_2(t)$  sull'uscita in regime permanente nullo;
- d) tempo di salita della risposta al gradino pari a 0.192 s (compreso fra 0.16 s e 0.24 s) ;
- e) sovraelongazione massima della risposta al gradino pari al 34.5% (inferiore al 35%).

*Valutazione delle prestazioni del sistema ad anello chiuso*

Soluzione 1:

- α) La banda passante è pari a 19.8 rad/s.
- β) Il picco di risonanza  $M_r$  della risposta in frequenza è pari a 5.49 dB.
- χ) Il valore massimo del comando per  $r(t) = 1$  è pari a 0.754.

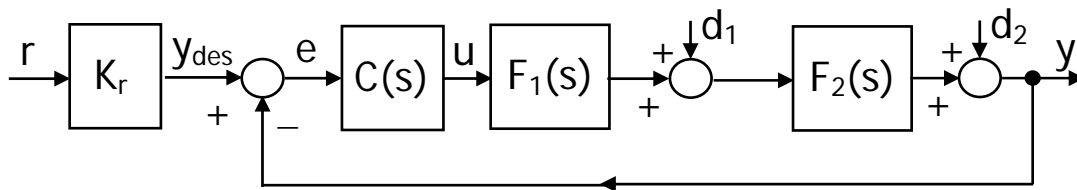
Soluzione 2:

- α) La banda passante è pari a 18.5 rad/s.
- β) Il picco di risonanza  $M_r$  della risposta in frequenza è pari a 3.75 dB.
- χ) Il valore massimo del comando per  $r(t) = 1$  è pari a 0.645.

**Esercizio 4**

Sia dato il sistema di controllo riportato in figura con:

$$F_1(s) = \frac{5}{s}, \quad F_2(s) = \frac{(s+20)}{(s+1)(s+5)^2}, \quad K_r = 1, \quad d_1(t) = 0.5, \quad d_2(t) = 0.1t.$$



Progettare il controllore  $C(s)$  in modo che il sistema retroazionato soddisfi le seguenti specifiche:

- a) errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.05, in assenza di disturbi;
- b) effetto del disturbo  $d_1(t)$  sull'uscita in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.01;
- c) effetto del disturbo  $d_2(t)$  sull'uscita in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.01;
- d) tempo di salita  $t_s$  della risposta al gradino unitario pari a circa 1 s (la specifica è soddisfatta se l'errore commesso è inferiore in modulo al 20%);
- e) picco di risonanza della risposta in frequenza non superiore a 2.5 dB.

Dopo aver verificato che il sistema in catena chiusa così ottenuto soddisfi le specifiche richieste, valutarne:

- α) la banda passante;
- β) la sovralongazione massima della risposta al gradino unitario;
- χ) il valore massimo in modulo del comando  $u(t)$  applicato dal controllore progettato, quando  $r(t) = 1$  (gradino unitario), in assenza di disturbi.

**Traccia della soluzione dell'esercizio 4**

Si osserva che la funzione  $F_1(s)$  è di tipo uno, mentre  $F_2(s)$  è di tipo zero; i loro guadagni stazionari sono rispettivamente dati da:  $K_{F1} = 5$ ,  $K_{F2} = 0.8$ .

*Discussione delle specifiche statiche*

Nessuna delle tre specifiche statiche a), b) e c) richiede l'inserimento di poli nell'origine per poter essere soddisfatta. Il controllore  $C(s)$  è assunto pertanto della forma:

$$C(s) = K_c C'(s)$$

con  $C'(s)$  di tipo zero.

Mentre la specifica b) risulta sempre soddisfatta, una volta garantita l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso, le specifiche a) e c) impongono, rispettivamente, i seguenti vincoli sul guadagno del controllore:

- $|K_c| \geq 5$
- $|K_c| \geq 2.5$

Sarà quindi necessario scegliere  $K_c$  pari almeno a 5 in valore assoluto.

Per scegliere correttamente il segno di  $K_c$ , è sufficiente tracciare il diagramma di Nyquist di  $F_1(s)F_2(s)$  ed applicare il criterio di Nyquist, da cui risulta necessario considerare  $K_c$  di segno positivo per avere la possibilità di stabilizzare il sistema ad anello chiuso.

Si definisce di conseguenza come funzione d'anello di partenza:

$$G_{a1}(s) = K_c F_1(s)F_2(s)$$

con  $K_c = 5$ .

*Discussione delle specifiche dinamiche*

Le specifiche d) ed e) impongono rispettivamente:

- $\omega_{c,des} \cong 1.9 \text{ rad/s}$
- Margine di fase di circa  $45^\circ - 50^\circ$

*Progetto del controllore e verifica delle specifiche*

Dal valore della fase di  $G_{a1}(j\omega)$  alla pulsazione di cross-over desiderata, si rileva la necessità di recuperare almeno  $55^\circ - 60^\circ$  in corrispondenza di tale pulsazione. Poiché il modulo è pari a circa 4 dB, sarà successivamente necessario inserire una rete attenuatrice. È opportuno pertanto innalzare il recupero di fase di alcuni gradi.

Soluzione proposta:

La soluzione proposta è costituita dalle seguenti reti:

Reti anticipatrici:

$m_{d1} = 3$ ,  $\tau_{d1} = 0.91$  (corrispondente allo sfruttamento del massimo recupero di fase possibile)

$$R_{d1}(s) = \frac{1 + 0.91s}{1 + 0.303s}$$

$m_{d2} = 4, \tau_{d2} = 1.05$  (corrispondente allo sfruttamento del massimo recupero di fase possibile)

$$R_{d2}(s) = \frac{1+1.05s}{1+0.2625s}$$

Rete attenuatrice:

$m_i = 14.9, \tau_i = 52.6$  (corrispondente all'ascissa normalizzata  $\omega\tau_i \cong 100$ )

$$R_i(s) = \frac{1+3.53s}{1+52.6s}$$

Con il controllore così progettato:

$$C(s) = 5 \cdot \left( \frac{1+0.91s}{1+0.303s} \right) \cdot \left( \frac{1+1.05s}{1+0.2625s} \right) \cdot \left( \frac{1+3.53s}{1+52.6s} \right)$$

le specifiche risultano tutte soddisfatte con:

- a) errore di inseguimento alla rampa unitaria  $r(t) = t$  in regime permanente, in assenza di disturbi, pari a 0.05 (massimo valore ammissibile dalla specifica);
- b) effetto del disturbo  $d_1(t)$  sull'uscita in regime permanente nullo;
- c) effetto del disturbo  $d_2(t)$  sull'uscita in regime permanente pari a 0.005 (minore di 0.01);
- d) tempo di salita della risposta al gradino pari a 0.989 s (compreso fra 0.8 s e 1.2 s);
- e) picco di risonanza della risposta in frequenza pari a 2.32 dB (minore di 2.5 dB).

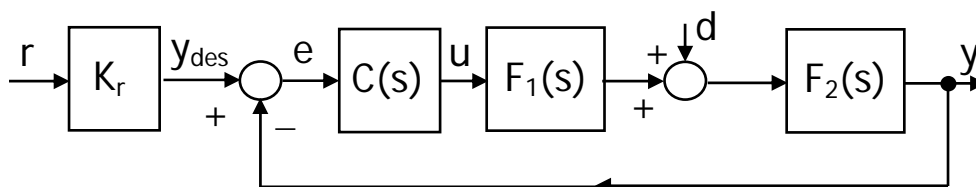
*Valutazione delle prestazioni del sistema ad anello chiuso*

- $\alpha$ ) La banda passante è pari a 3.7 rad/s.
- $\beta$ ) La sovralongazione massima della risposta al gradino vale 24.8%.
- $\chi$ ) Il valore massimo del comando per  $r(t) = 1$  è pari a 4.03.

### Esercizio 5

Sia dato il sistema di controllo riportato in figura con:

$$F_1(s) = \frac{(1+s/0.1)}{(1+s/0.2)(1+s/10)}, \quad F_2(s) = \frac{1}{s}, \quad K_r = 1, \quad d(t) = 1.5.$$



Progettare il controllore  $C(s)$  in modo che il sistema retroazionato soddisfi le seguenti specifiche:

- a) errore di inseguimento al gradino unitario nullo in regime permanente, in assenza di disturbi;
- b) errore di inseguimento alla parabola  $r(t) = t^2/2$  in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.16, in assenza di disturbi;

- c) effetto del disturbo  $d(t)$  sull'uscita in regime permanente pari al massimo in modulo a 0.05;
- d) banda passante pari a circa 4 rad/s (la specifica è soddisfatta se l'errore commesso è inferiore in modulo al 10%);
- e) sovraelongazione massima della risposta al gradino unitario minore (o uguale) al 25%.

Dopo aver verificato che il sistema in catena chiusa così ottenuto soddisfi le specifiche richieste, valutarne:

- $\alpha$ ) il tempo di salita  $t_s$  della risposta al gradino unitario;
- $\beta$ ) il picco di risonanza della risposta in frequenza;
- $\chi$ ) il valore massimo in modulo del comando  $u(t)$ , applicato dal controllore progettato in regime permanente, quando  $r(t) = \sin(0.5t)$ , in assenza di disturbi.

**Traccia della soluzione dell'esercizio 5**

Si osserva che la funzione  $F_1(s)$  è di tipo zero, mentre  $F_2(s)$  è di tipo uno; entrambe hanno guadagno stazionario unitario.

*Discussione delle specifiche statiche*

La specifica b) richiede l'inserimento di un polo nell'origine per poter essere soddisfatta. Il controllore  $C(s)$  è assunto pertanto della forma:

$$C(s) = \frac{K_c}{s} C'(s)$$

con  $C'(s)$  di tipo zero.

La specifica a) e, grazie all'inserimento del polo nell'origine in  $C(s)$ , la c) risultano sempre soddisfatte, una volta garantita l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso, mentre la specifica b) impone il vincolo:

$$|K_c| \geq 6.25$$

Per scegliere correttamente il segno di  $K_c$ , è sufficiente tracciare il diagramma di Nyquist di  $F_1(s)F_2(s)/s$  ed applicare il criterio di Nyquist, da cui risulta necessario considerare  $K_c$  di segno positivo per avere la possibilità di stabilizzare il sistema ad anello chiuso.

Si definisce di conseguenza come funzione d'anello di partenza:

$$G_{al}(s) = \frac{K_c}{s} F_1(s)F_2(s)$$

con  $K_c = 6.25$ .

*Discussione delle specifiche dinamiche*

Le specifiche d) ed e) impongono rispettivamente:

- $\omega_{c,des} \cong 2.5$  rad/s
- Margine di fase di  $45^\circ$

*Progetto del controllore e verifica delle specifiche*

Dal valore della fase di  $G_{a1}(j\omega)$  alla pulsazione di cross-over desiderata, si rileva la necessità di recuperare almeno  $55^\circ$  in corrispondenza di tale pulsazione. Poiché il modulo è pari a circa 5.7 dB, sarà successivamente necessario inserire una rete attenuatrice. È opportuno pertanto innalzare il recupero di fase di alcuni gradi.

Tentativi di soluzione tali da rispettare esattamente (o quasi) i requisiti sopra indicati possono portare al mancato soddisfacimento delle specifiche dinamiche; in particolare si rileva la necessità di imporre un valore ridotto di pulsazione di cross-over (ad esempio  $\omega_{c,des} \cong 2.2 \text{ rad/s}$ ) e di garantire un maggiore margine di fase.

Il recupero di fase richiesto può essere ottenuto sia per mezzo di reti anticipatrici, sia inserendo un blocco di tipo PI della forma  $(1 + \tau_z s)/s$  al posto del solo polo nell'origine in  $C(s)$ . Di seguito viene proposta una soluzione basata sull'utilizzo di reti anticipatrici (più un'attenuatrice); viene lasciato allo studente lo sviluppo di una  $C(s)$  comprendente il blocco PI ed una rete attenuatrice.

Soluzione proposta:

La soluzione proposta è costituita dalle seguenti reti:

Reti anticipatrici:

$m_{d1} = 3, \tau_{d1} = 0.81$  (corrispondente allo sfruttamento del massimo recupero di fase possibile)

$$R_{d1}(s) = \frac{1 + 0.81s}{1 + 0.27s}$$

$m_{d2} = 4, \tau_{d2} = 0.9$  (corrispondente allo sfruttamento del massimo recupero di fase possibile)

$$R_{d2}(s) = \frac{1 + 0.9s}{1 + 0.225s}$$

Rete attenuatrice:

$m_i = 9, \tau_i = 68$  (corrispondente all'ascissa normalizzata  $\omega\tau_i \cong 150$ )

$$R_i(s) = \frac{1 + 7.55s}{1 + 68s}$$

Con il controllore così progettato:

$$C(s) = \frac{6.25}{s} \cdot \left( \frac{1 + 0.81s}{1 + 0.27s} \right) \cdot \left( \frac{1 + 0.9s}{1 + 0.225s} \right) \cdot \left( \frac{1 + 7.55s}{1 + 68s} \right)$$

le specifiche risultano tutte soddisfatte con:

- a) errore di inseguimento al gradino unitario nullo in regime permanente, in assenza di disturbi;
- b) errore di inseguimento alla parabola  $r(t) = t^2/2$  in regime permanente, in assenza di disturbi, pari a 0.16 (massimo valore ammissibile dalla specifica);
- c) effetto del disturbo  $d(t)$  sull'uscita nullo in regime permanente;
- d) banda passante pari a 4.28 rad/s (compresa fra 3.6 rad/s e 4.4 rad/s) ;
- e) sovraelongazione massima della risposta al gradino pari al 23.8% (inferiore al 25%).

*Valutazione delle prestazioni del sistema ad anello chiuso*

- $\alpha$ ) Il tempo di salita  $t_s$  della risposta al gradino è pari a 0.737 s.
- $\beta$ ) Il picco di risonanza della risposta in frequenza è pari a 2.33 dB.
- $\chi$ ) Il valore massimo del comando in regime permanente per  $r(t) = \sin(0.5t)$ , in assenza di disturbi, è pari a 0.3.