- Considero un sistema dinamico SISO e LTI, con una certa f.d.t.

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

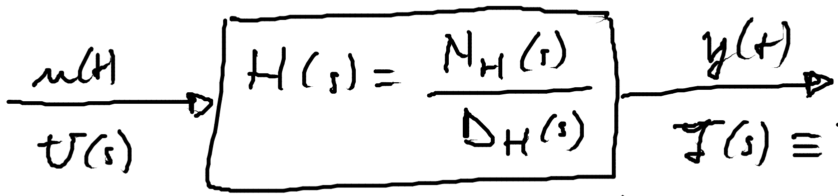
e restringo l'attenzione ai casi:

- $D_H(s) =$ polinomio di I grado $\Rightarrow$ sistema del I ordine
- $D_H(s) =$ polinomio di II grado $\Rightarrow$ sistema del II ordine

e inoltre suppongo $H(s)$ strettamente propria:

$$\deg N_H(s) < \deg D_H(s)$$

- Considero come ingresso:
  - $u(t) = \bar{u}\,\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \bar{u}$
  - $u(t) = \bar{u}\,\varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \bar{u}/s$



$Y(s) \equiv Y_F(s) = H(s)\,U(s)$

Sistema inizialmente a riposo

- Il calcolo di $y(t)$ è:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s) = H(s)\,U(s)\}$$

- Richiamo i teoremi del valore $\begin{cases} \text{- iniziale} \\ \text{- finale} \end{cases}$

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{s \to \infty} s\,Y(s)$$

se entrambi i limiti esistono e sono finiti ($< \infty$); in particolare occorre che $Y(s)$ sia <u>strettamente propria</u>:

$$\deg \mathrm{Num}\, Y(s) < \deg \mathrm{Den}\, Y(s)$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\,Y(s)$$

se entrambi i limiti esistono e sono finiti ($< \infty$); in particolare occorre che $sY(s)$ <u>NON</u> abbia poli nel semipiano destro chiuso $\Rightarrow$ <u>$sY(s)$</u> deve avere tutti i poli con

<u>$\mathrm{Re} < 0$</u>

STABILITÀ ESTERNA (o BIBO-stabilità)

Un sistema dinamico SISO è BIBO-stabile se, per ogni ingresso $u(t)$ limitato:

$$u(t) < \bar{u} < \infty, \quad \forall t < \infty$$

la corrispondente uscita $y(t)$ è limitata

$$y(t) < \bar{y} < \infty, \quad \forall t < \infty$$

Un sistema dinamico SISO LTI è BIBO-stabile se e solo se la sua f.d.t. $H(s)$, una volta effettuate tutte le cancellazioni zero-polo, ha i rimanenti poli p con

$$\mathrm{Re}\, p < 0, \quad \forall p$$

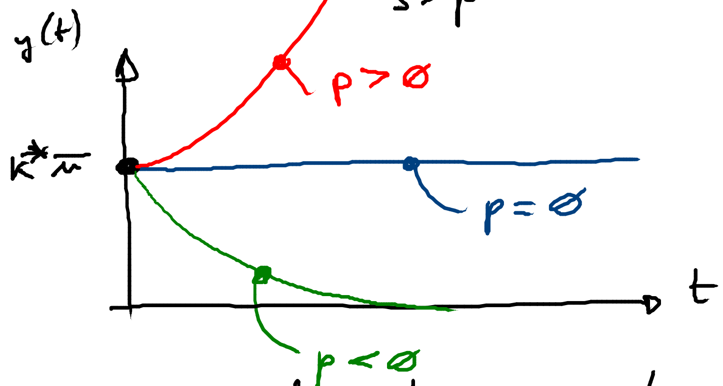
Risposte di sistemi del I ordine

$$H(s) = \frac{K^*}{s-p}$$

K^*: guadagno
p: polo di $H(s)$

1) $u(t) = \bar{u}\,\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \bar{u} \Rightarrow$

$$Y(s) = H(s)\,U(s) = \frac{K^*}{s-p}\,\bar{u} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K^*\bar{u}\,e^{pt}\,\varepsilon(t) = y(t)$$



• Teorema del valore iniziale:

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{s \to \infty} s\,Y(s) = \lim_{s \to \infty} s \underbrace{\frac{K^*\bar{u}}{s-p}}_{Y(s)} = K^*\bar{u}$$

strettam. propria

• Teorema del valore finale:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\,Y(s) = \lim_{s \to 0} s\,\frac{K^*\bar{u}}{s-p}$$

non ha poli nel semip. dx chiuso se $p \leq 0$

Se $p = 0 \Rightarrow y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} \cancel{s}\,\frac{K^*\bar{u}}{\cancel{s}} =$
$= K^*\bar{u}$

Se $p < 0 \Rightarrow y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\,\frac{K^*\bar{u}}{s-p} = 0$

2) $u(t) = \bar{u}\,\varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{\bar{u}}{s} \Rightarrow$

$$Y(s) = H(s)\,U(s) = \frac{K^*}{s-p}\,\frac{\bar{u}}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = ?$$

Se $p = 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{K^*\bar{u}}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = K^*\bar{u}\,t\,\varepsilon(t)$

Se $p \neq 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{K^*\bar{u}}{s(s-p)} = \frac{\frac{K^*\bar{u}}{-p}}{s} + \frac{\frac{K^*\bar{u}}{p}}{s-p} = \frac{K^*\bar{u}}{-p}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-p}\right)$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{K^*}{-p}\,\bar{u}\left(\varepsilon(t) - e^{pt}\,\varepsilon(t)\right) = \underbrace{\frac{K^*}{-p}}_{K}\,\bar{u}\left[1 - e^{pt}\right]\varepsilon(t)$$

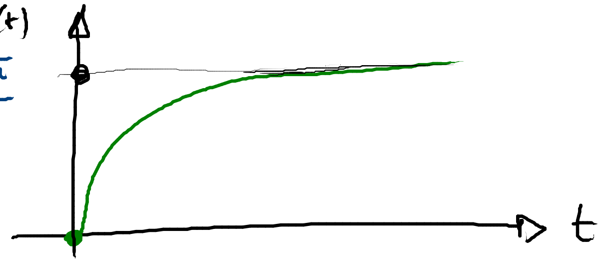
$\bar{u} > 0$

$K^* > 0$

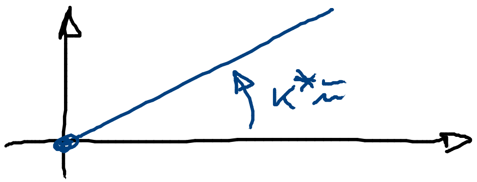
$\boxed{p < 0}$

$0 < \frac{K^*\bar{u}}{-p}$

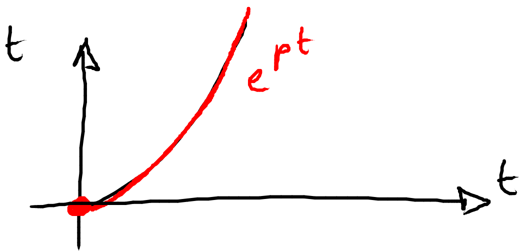
$p < 0$



$\boxed{p = 0}$



$\boxed{p > 0}$



Teorema del valore iniziale

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{s \to \infty} s\, Y(s)$$

$$= \lim_{s \to \infty} \cancel{s} \frac{K^*}{s-p} \frac{\bar{u}}{\cancel{s}} = 0$$

Teorema del valore finale

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\, Y(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{K^*}{s-p} \frac{\bar{u}}{\cancel{s}}$$

non ha poli nel semip dx chiuso $\Leftrightarrow p < 0$

Se $p < 0 \Rightarrow y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{K^* \bar{u}}{-p}$

Se $p < 0 \Rightarrow$ definisco alcuni parametri tipici

- $\tau = \frac{1}{-p} = \left|\frac{1}{p}\right| > 0$: costante di tempo

- y_∞ = valore finale $= \frac{K^*}{-p} \bar{u} = K \bar{u}$

K

Risposta al gradino di sistemi del II ordine

1) Sistemi con 2 poli reali distinti, senza zeri

$$H(s) = \frac{K^*}{(s-p_1)(s-p_2)}, \quad p_1 \neq p_2 \neq 0$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t) = \bar{u}\,\varepsilon(t)\} = \bar{u}/s$$

$$Y(s) = H(s)\,U(s) = \frac{K^*\bar{u}}{s(s-p_1)(s-p_2)} =$$

$$= \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s-p_1} + \frac{R_3}{s-p_2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{K^*\bar{u}}{p_1 p_2}\left[1 + \frac{p_2}{p_1-p_2}e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1-p_2}e^{p_2 t}\right]\varepsilon(t)$$

$y(t=0_+) = 0$; Se $p_1 < 0$ e $p_2 < 0 \Rightarrow$

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{K^*\bar{u}}{p_1 p_2}$$

Se il sistema è BIBO-stabile ($p_1<0$, $p_2<0$)
$\Rightarrow \exists\, y_\infty$.

Es:

$$H_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -10$$

$$H_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1)}, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -1$$

$$H_3(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+0.1)}, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -0.1$$

$$\tau_{eq} \cong \sum_i \tau_i = \tau_1 + \tau_2 = \left|\frac{1}{p_1}\right| + \left|\frac{1}{p_2}\right|$$

$$\tau_{eq,1} \cong 1 + \frac{1}{10} = 1.1\ s$$

$$\tau_{eq,3} \cong 1 + \frac{1}{0.1} = 11\ s$$

$$\tau_{eq,2} \cong 1 + 1 = 2\ s$$

i) Sistema con 2 poli reali distinti e
1 zero reale

$$H(s) = \frac{K^*(s-z)}{(s-p_1)(s-p_2)}, \qquad \begin{matrix} p_1 \neq p_2 \neq z \\ p_1 \neq p_2 \neq 0 \end{matrix}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t) = \bar{u}\,\varepsilon(t)\} = \bar{U}/s$$

$$Y(s) = H(s)\,U(s) = \frac{K^*(s-z)}{(s-p_1)(s-p_2)} \frac{\bar{u}}{s} =$$

$$= \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s-p_1} + \frac{R_3}{s-p_2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$y(t) = -\frac{K^* z\,\bar{u}}{p_1 p_2}\left[1 - \frac{(p_1-z)p_2}{z(p_1-p_2)} e^{p_1 t} + \frac{(p_2-z)p_1}{z(p_1-p_2)} e^{p_2 t}\right]$$

$t \geq 0$

$H(s)$ è BIBO-stabile $\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 < 0 \\ p_2 < 0 \end{cases}$

Effetto dello zero z su

$$H(s) = \frac{5}{-z} \frac{s-z}{(s+1)(s+5)} \qquad \begin{matrix} p_1 = -1 \\ p_2 = -5 \end{matrix}$$

a) valori di z: -100, -10, -2
(cioè: $|z| > \min_i |p_i|$)

$$\tau_{eq} \cong \sum_i \tau_{p_i} - \tau_z : \quad \tau_z = \frac{1}{|z|}$$

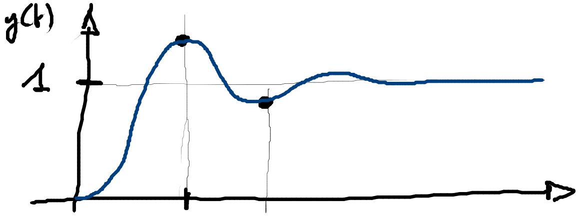
$$\begin{cases} \tau_{eq,1} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{100} = \\ \quad = 1.19\ s \\ \tau_{eq,2} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \\ \quad = 1.1\ s \\ \tau_{eq,3} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \\ \quad = 0.7\ s \end{cases}$$

b) valori di z: -0.9, -0.5, -0.1 $\Rightarrow$
nasce una sovraelongazione che
cresce per $|z| \to 0$ (risposta NON monotona)

c) valori di z: 100, 10, 1, 0.5
(zeri a destra!!) $\Rightarrow$
nasce una sottoelongazione che
cresce per $z \to 0$ (risposta inversa, NON monotona)

Esercizi sulla risposta al gradino unitario di sistemi del I e del II ordine

Es. 1) Data la risposta all'ingresso $u(t) = \varepsilon(t)$:



qual è la H(s) corrispondente fra:

$$\cancel{H_1(s) = \frac{32}{s^2+8s+64}}, \quad \cancel{H_2(s) = \frac{64}{s^2+20s+64}},$$

$$H_3(s) = \frac{64}{s^2+8s+64}, \quad \cancel{H_4(s) = \frac{32}{s^2+32s}}$$

$H_4(s)$ NON è BIBO-stabile (ha un polo in $s=0$)
$\Rightarrow$ escludo $H_4(s)$

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,H(s)\frac{1}{\cancel{s}} = H(0)$$

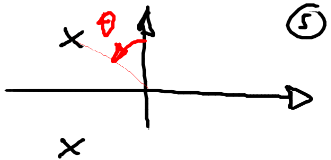
$H_1(0) = \frac{32}{64} = 0{,}5 \neq y_\infty = 1 \Rightarrow$ escludo $H_1(s)$

$H_2(0) = 1 = H_3(0)$

$H_2(s)$ ha poli in $\begin{cases} s=-4 \\ s=-16 \end{cases}$: $H_2(s) = \frac{64}{(s+4)(s+16)}$

avendo 2 poli reali < 0, la sua risposta è monotona crescente $\Rightarrow$ escludo $H_2(s)$

$$H_3(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{1\cdot 8^2}{s^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 8s+8^2} : \begin{cases}\zeta = 0.5 \\ \omega_n = 8\end{cases}$$

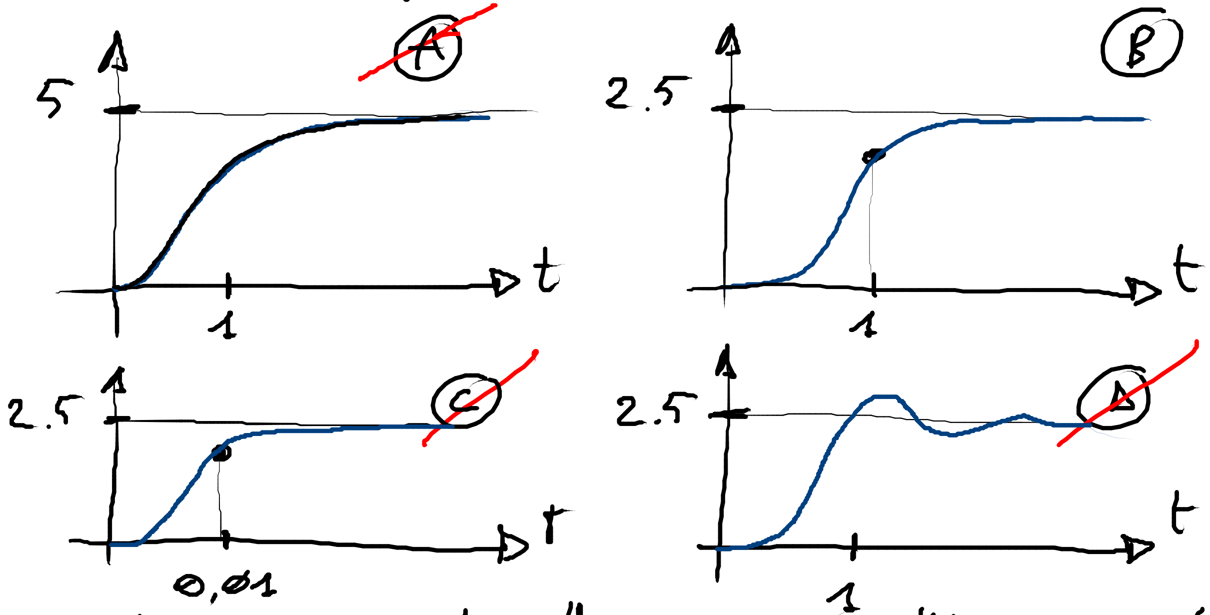


(s)

$\zeta = 0.5 = \sin\theta$

poli: $-4 \pm j\,6{,}93$

Es. #2) Dati i seguenti andamenti grafici:



quale corrisponde alla risposta all'ingresso $u(t)=\varepsilon(t)$ del sistema

$$H(s) = \frac{25}{s^2+7s+10}$$

$H(s)$ è BIBO-stabile $\Rightarrow$ $y_\infty = H(0) = \frac{25}{10} = 2,5$

$\Rightarrow$ escludo A

$$H(s) = \frac{25}{(s+2)(s+5)} \quad : \quad \text{poli in} \begin{cases} s=-2 \\ s=-5 \end{cases} \Rightarrow$$

$y(t)$ dev'essere monotona $\Rightarrow$ escludo D

La τ_{eq} di $H(s)$ è

$$\tau_{eq} \cong \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{|-2|} + \frac{1}{|-5|} = 0,7\,s$$

$\Rightarrow$ escludo C