

Fondamenti di Automatica

Modellistica dei sistemi dinamici a tempo discreto

$$y(t) = Cx(t)$$

Sistemi dinamici a tempo discreto

- I sistemi dinamici a tempo discreto sono sistemi in cui tutte le grandezze variabili sono funzioni della variabile indipendente temporale k che è intera.
- I sistemi dinamici a T.D. sono descritti dalle seguenti *equazioni di stato* ed *equazioni d'uscita*:

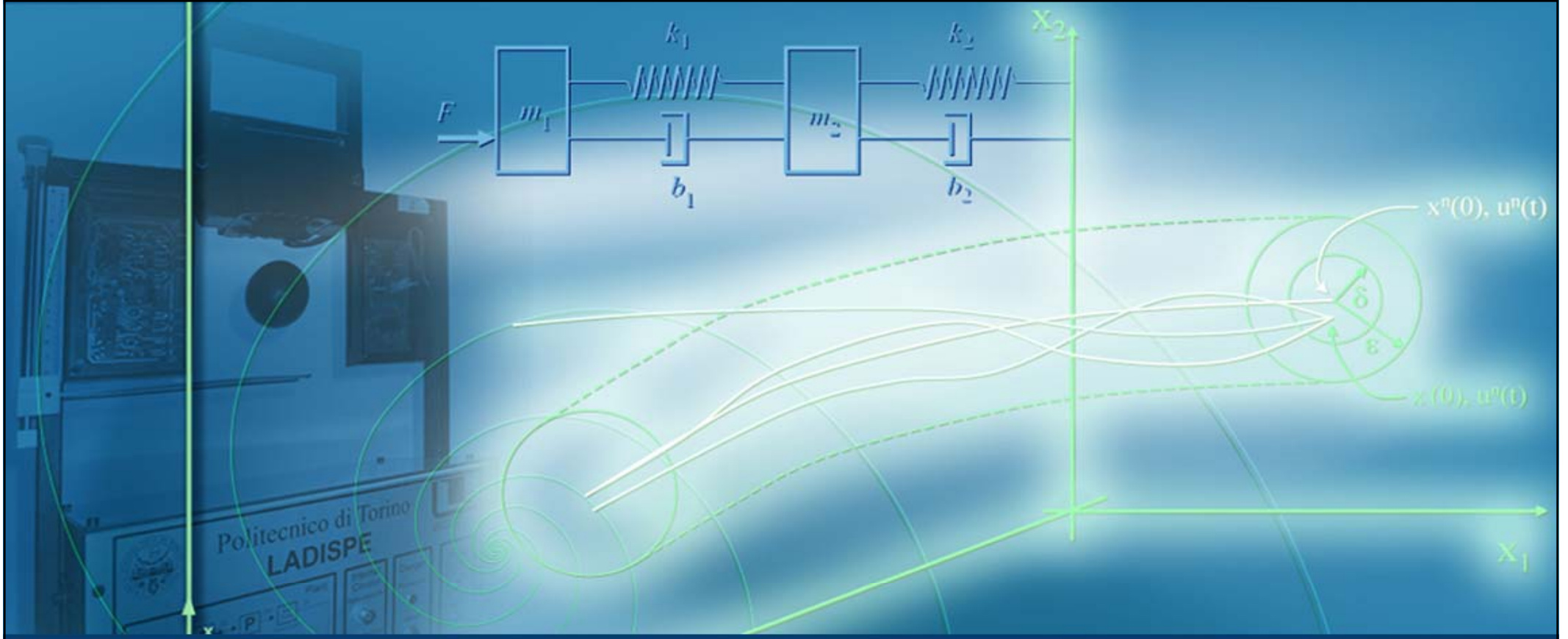
$$x_i(k+1) = f_i(k, x(k), u(k))$$

$$y_l(k) = g_l(k, x(k), u(k))$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Modellistica di sistemi dinamici a T.D.

- Sistemi dinamici a classi di età
 - Esempio #1: parco macchine
 - Esempio #2: popolazione studentesca
- Sistemi dinamici a dati campionati



Sistemi dinamici a tempo discreto

“Sistemi dinamici a classi di età”

$$y(t) = Cx(t)$$

Sistemi dinamici a classi di età

- I **modelli a classi di età** sono utilizzati per studiare l'evoluzione temporale di determinate "classi di popolazione" in periodi di tempo fissati.
- In questi sistemi, la componente i -esima dello stato $x_i(k)$ rappresenta la numerosità della popolazione della classe i nel periodo k considerato.
- L'evoluzione di ogni classe considerata dal periodo k al successivo periodo $k+1$ avviene tenendo conto:
 - del **tasso di mortalità** ($0 \leq \gamma_i \leq 1$) e
 - del **tasso di sopravvivenza** ($0 \leq 1 - \gamma_i \leq 1$)

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio #1: *Parco macchine (1/7)*

- $x_i(k)$ rappresenta il numero di macchine nel parco nell'anno k aventi "età i ", ovvero aventi età compresa fra $i-1$ anni e i anni.

$$i-1 \leq \text{età}\{x_i(k)\} \leq i$$

- $u(k)$ rappresenta il numero di macchine nuove che vengono acquistate nell'anno k

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio #1: *Ipotesi semplificative (2/7)*

- Non vengono acquistate auto usate. Quindi, il sistema ha un unico ingresso, dato dal numero di auto nuove comprate $u(k)$.
- Non si conservano auto più vecchie di 3 anni.
- Il tasso di mortalità γ_i è in generale diverso per le varie classi, ma è costante nel tempo.

Esempio #1: *Eqz di stato* (3/7)

► Primo anno:

$$x_1(k+1) = u(k)$$

► Secondo anno:

$$x_2(k+1) = x_1(k) - \gamma_1 x_1(k) = (1 - \gamma_1)x_1(k)$$

► Terzo anno:

$$x_3(k+1) = x_2(k) - \gamma_2 x_2(k) = (1 - \gamma_2)x_2(k)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio #1: *Eqz di uscita* (4/7)

► Si desidera conoscere:

1. Il numero totale di auto presenti nel parco nell'anno k
2. Il costo totale di assicurazione del parco auto

Esempio #1: Eqz di uscita (5/7)

- Il numero totale di auto presenti nel parco nell'anno k è dato dalla somma delle auto delle tre diverse classi presenti nel parco.

$$y_1(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k)$$

- Il costo totale di assicurazione è dato dalla somma di tutti i costi di assicurazione annuali nel parco.

$$y_2(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + c_3 x_3(k)$$

in cui c_i è il costo di assicurazione di ogni auto delle classi di età i .

Esempio #1: *Conclusione* (6/7)

- Si ricava così un sistema dinamico, a tempo discreto, a dimensione finita, lineare, invariante nel tempo, proprio, rappresentabile nella forma delle variabili di stato:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Esempio #1: *Conclusione* (7/7)

Con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio #2: *Popolazione universitaria* (1/7)

- Si vuole ricavare un modello matematico che permetta di descrivere la popolazione universitaria di un corso di laurea di I livello.
- $x_i(k)$ rappresenta il numero di allievi che al tempo k (inteso come anno accademico, a.a.) appartengono alla classe i -esima (inteso come anno di studio).

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio #2: *Ipotesi semplificative (2/7)*

- Gli allievi non abbandonano l'università prima di averla terminata.
- Non esistono allievi provenienti da altre università che si iscrivono direttamente al secondo e al terzo anno. In questo modo l'unico ingresso è rappresentato dalle matricole, che fanno domanda di preimmatricolazione un anno prima.
- La percentuale γ_i di bocciati è in generale diversa per le varie classi, ma è costante nel tempo.

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio #2: *Altre considerazioni (3/7)*

- Si indichi con k l'anno accademico attuale.
- Per la seconda ipotesi, $u(k)$ rappresenta il numero di allievi che si iscrivono all'università facendo domanda di preimmatricolazione nell' a. a. k e che quindi frequenteranno effettivamente il primo anno universitario nell' a. a. $k+1$.

Esempio #2: Eqz di stato (4/7)

► Primo anno:

$$x_1(k+1) = \gamma_1 x_1(k) + u(k)$$

► Secondo anno:

$$x_2(k+1) = (1 - \gamma_1)x_1(k) + \gamma_2 x_2(k)$$

► Terzo anno:

$$x_3(k+1) = (1 - \gamma_2)x_2(k) + \gamma_3 x_3(k)$$

Esempio #2: *Eqz di uscita (5/7)*

- Interessa conoscere il numero degli studenti che si diplomano al termine dei 3 anni di studio.
- La relazione di uscita è così rappresentata dal prodotto del tasso di sopravvivenza al terzo anno per il numero di allievi del terzo anno:

$$y(k) = (1 - \gamma_3)x_3(k)$$



$y(t) = Cx(t)$

Esempio #2: *Conclusione* (6/7)

- Si ricava così un sistema dinamico, a tempo discreto, a dimensione finita, lineare, invariante nel tempo, proprio, rappresentabile nella forma delle variabili di stato:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Esempio #2: *Conclusione* (7/7)

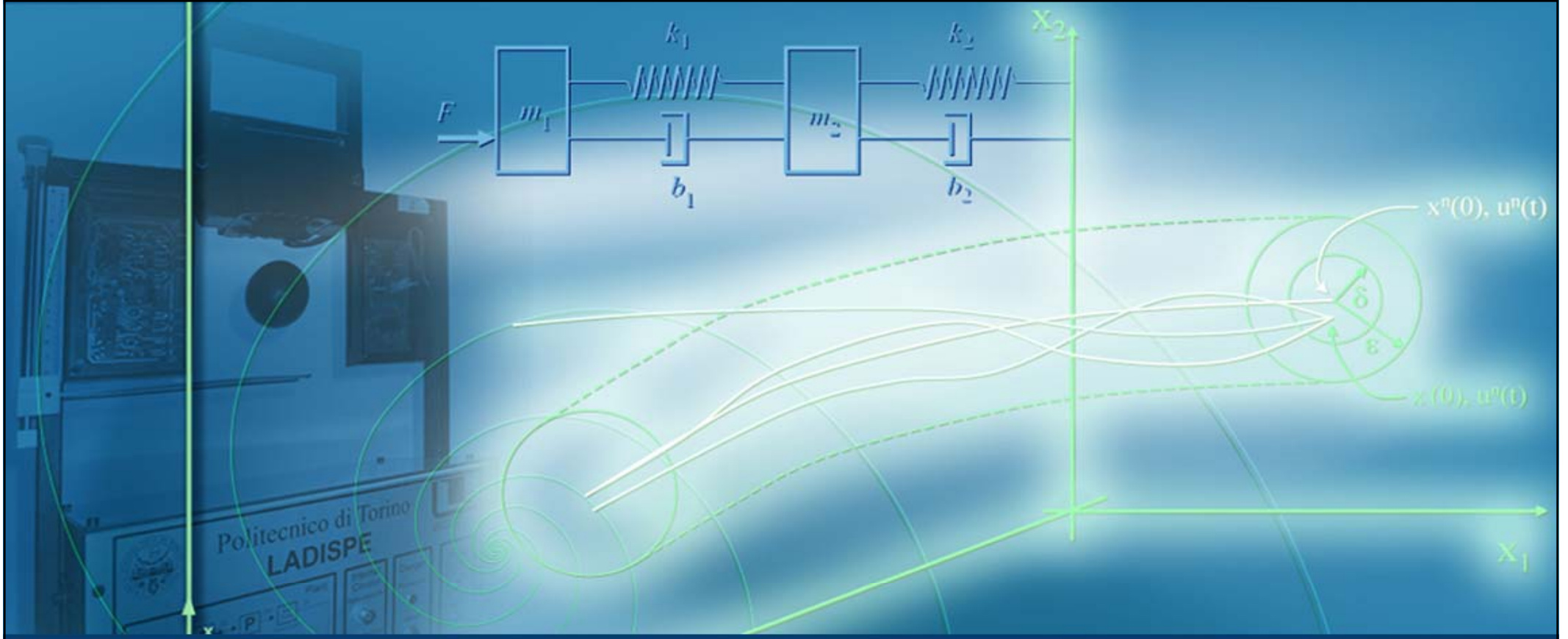
Con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 1 - \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 - \gamma_3]$$

$$D = [0]$$



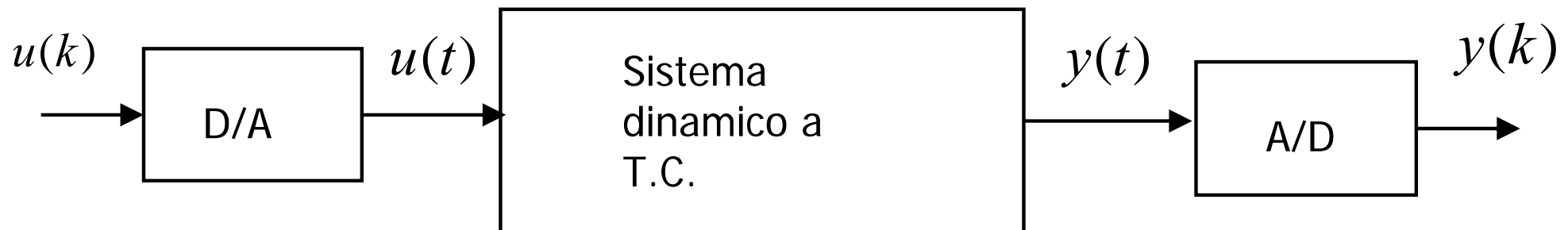
Sistemi dinamici a tempo discreto

“Sistemi dinamici a dati campionati”

$$y(t) = Cx(t)$$

Sistemi dinamici a dati campionati

- Per i **sistemi dinamici a dati campionati** l'ingresso discreto $u(k)$ viene ricostruito attraverso un convertitore D/A. Successivamente il segnale $u(t)$ viene elaborato dal sistema dinamico a T.C. che fornisce l'uscita $y(t)$. Infine, quest'ultima viene discretizzata nel segnale $y(k)$.



$$y(t) = Cx(t)$$

Discretizzazione(1/4)

- Per i sistemi a dati campionati è importante capire come avviene il processo di discretizzazione di un sistema a tempo continuo.
- Discretizzare vuol dire convertire un modello a tempo continuo in un modello a tempo discreto.
- Il processo di discretizzazione avviene attraverso un convertitore A/D che fa da campionatore con un passo di campionamento T_s .

Discretizzazione(2/4)

- La discretizzazione di un sistema a tempo continuo corrisponde a studiare l'evoluzione degli stati valutati negli istanti di campionamento.
- Quindi, nel processo di discretizzazione partiamo dalle matrici A, B, C, D del sistema a tempo continuo per arrivare a trovare le matrici A_d, B_d, C_d, D_d di un sistema a tempo discreto.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

con $k = i \cdot T_s$

Discretizzazione (3/4)

- Si ipotizza che l'ingresso $u(t)$ sia costante tra un istante di campionamento e l'altro.

$$u(\tau) = \text{costante} = u(i \cdot T_s) \quad \text{per} \quad i \cdot T_s \leq \tau \leq (i+1) \cdot T_s$$

- Si consideri la formula di Lagrange:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$t_0 = i \cdot T_s = k$$

$$t = (i+1) \cdot T_s = k+1$$

$$x(t_0) = x(i \cdot T_s) = x(k)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Discretizzazione (4/4)

➤ Si ottiene:

$$x(k+1) = e^{AT_s} x(k) + \left(\int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} d\tau \right) Bu(k)$$

➤ quindi:

$$A_d = e^{AT_s}$$

$$B_d = B \cdot \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} d\tau$$

➤ Poiché il legame con l'uscita dello stato e dell'ingresso è di tipo statico, si ha:

$$C_d = C$$

$$D_d = D$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Conclusione

- L'analisi del processo di discretizzazione verrà ripreso e approfondito nel corso di 'Controlli Automatici' attraverso lo studio di alcune tecniche per la discretizzazione del controllore.