Esercitazione di laboratorio #2

Risposta a ingressi canonici di sistemi del primo ordine

$$a)\ G_1(s) = \frac{10}{s-5} \qquad b)\ G_2(s) = \frac{10}{s} \quad c)\ G_3(s) = \frac{10}{s+5} \qquad d)\ G_4(s) = \frac{10}{s+20}$$

Funzione di trasferimento del sistema	$G_1(s) = \frac{10}{s-5}$	$G_2(s) = \frac{10}{s}$	$G_3(s) = \frac{10}{s+5}$	$G_4(s) = \frac{10}{s+20}$
Polo (p)	+5	0	-5	-20
Costante di tempo $\tau = -1/p$, con p<0	∄	∄	0.2s	0.05s
Valore a regime all'impulso unitario	∄	10	0	0
Valore a regime al gradino unitario	∄	∄	2	0.5
Tempo di salita	∄	∄	0.44s	0.11s

Applicando quando possibile il teorema del valore finale: ($\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$)

si ottengono i seguenti valori:

b) $\lim_{s\to 0} G_2(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s*10}{s} * 1 = 10$

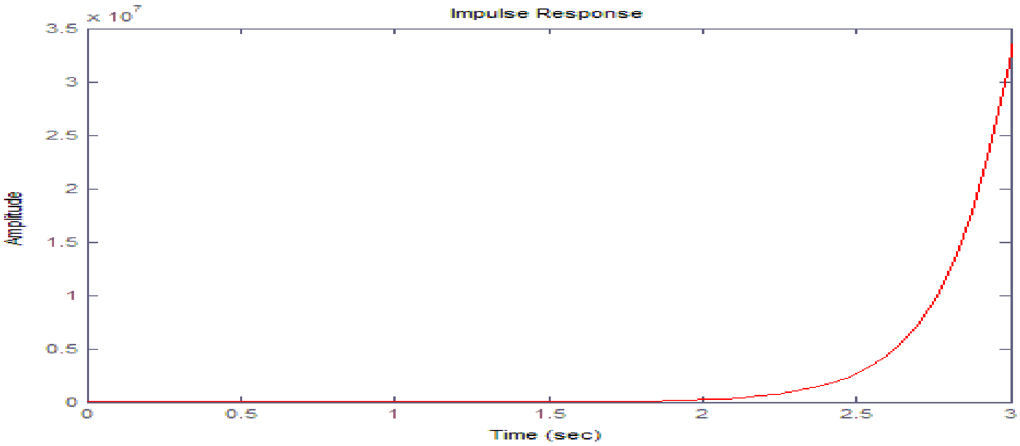
c) $\lim_{s\to 0} G_3(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s10}{(s+5)} * 1 =$ 0

d) $\lim_{s\to 0} G_1(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s*10}{(s+20)} * 1 = 0$

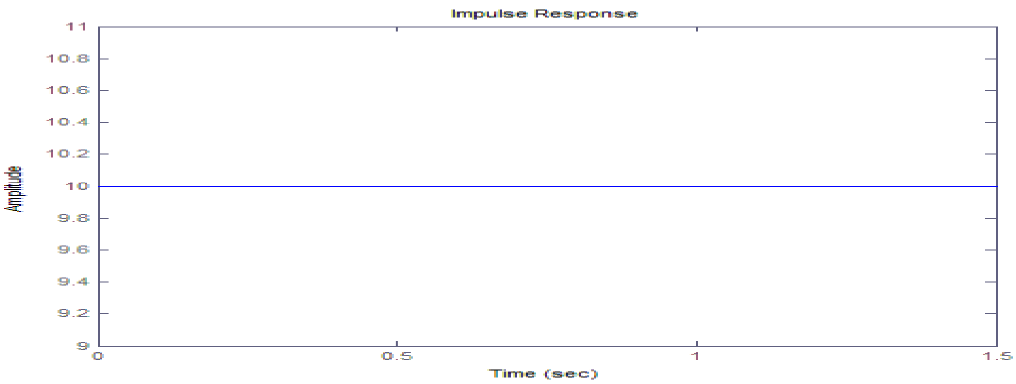
(dove '1' è la trasformata dell'impulso unitario)

• Risposta all'impulso unitario

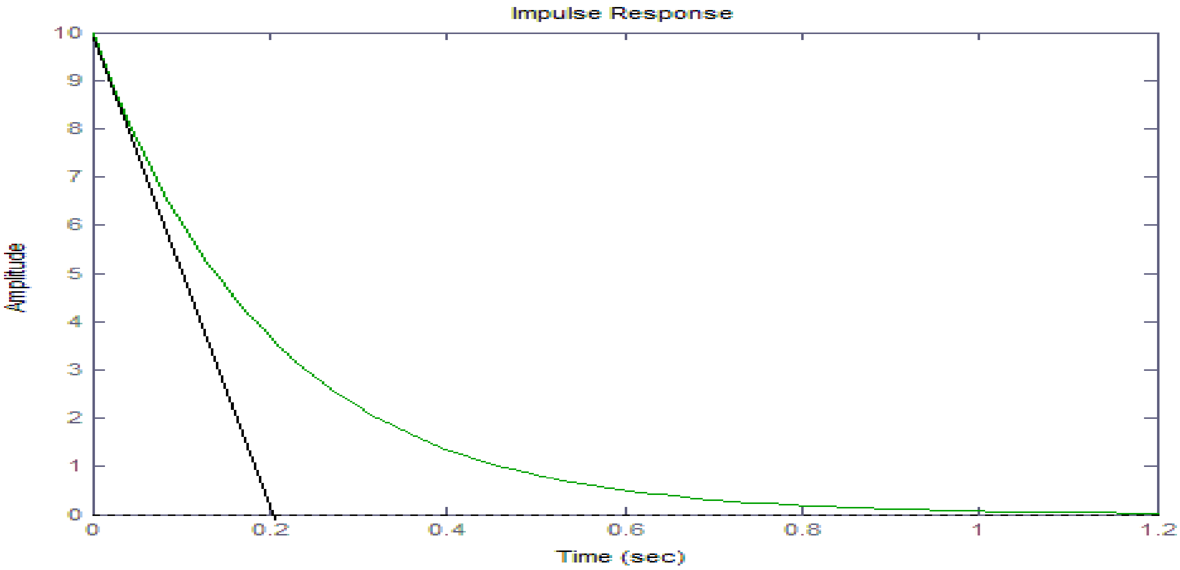
a) In questo caso non si può parlare di regime permanente perché la funzione di trasferimento ha un polo nel semipiano destro, quindi la sua risposta diverge.



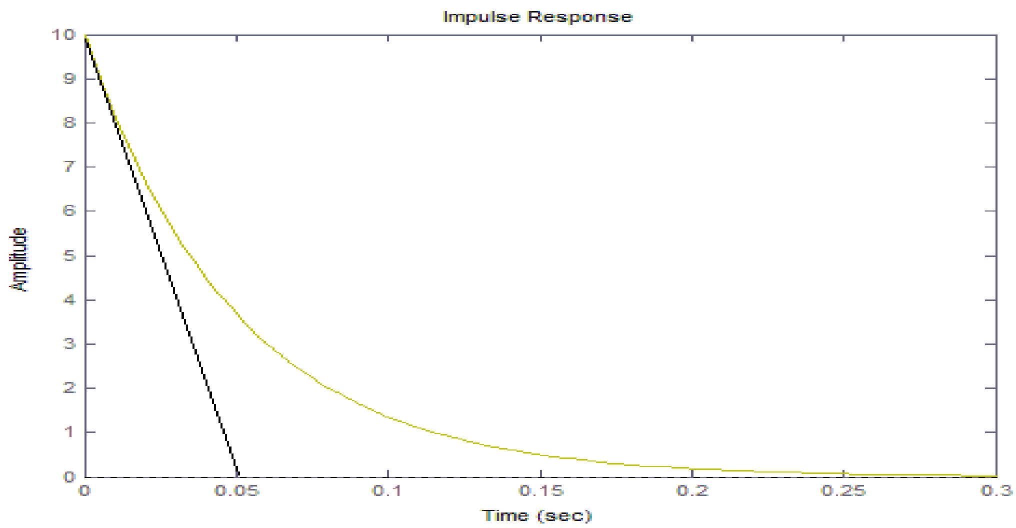
b) Il sistema ha un polo nell'origine e quindi **non** è BIBO stabile; tuttavia l'ingresso di tipo impulsivo **non** è limitato e, infatti, la risposta all'impulso è costante pari al valore 10.



c) La funzione di trasferimento presenta un polo nel semipiano sinistro [s+5=0 => p=-5] La costante di tempo è $\tau = -1/p = 0.2s$. Dal grafico si osserva che il valore a regime è nullo. La costante di tempo è data dal piede della tangente alla risposta iniziale.



d) La funzione di trasferimento ha un polo in p = -20 < 0, quindi è BIBO stabile. La costante di tempo vale $\tau = -1/p = 0.05s$. Dal grafico si vede che il valore a regime è nullo anche in questo caso.



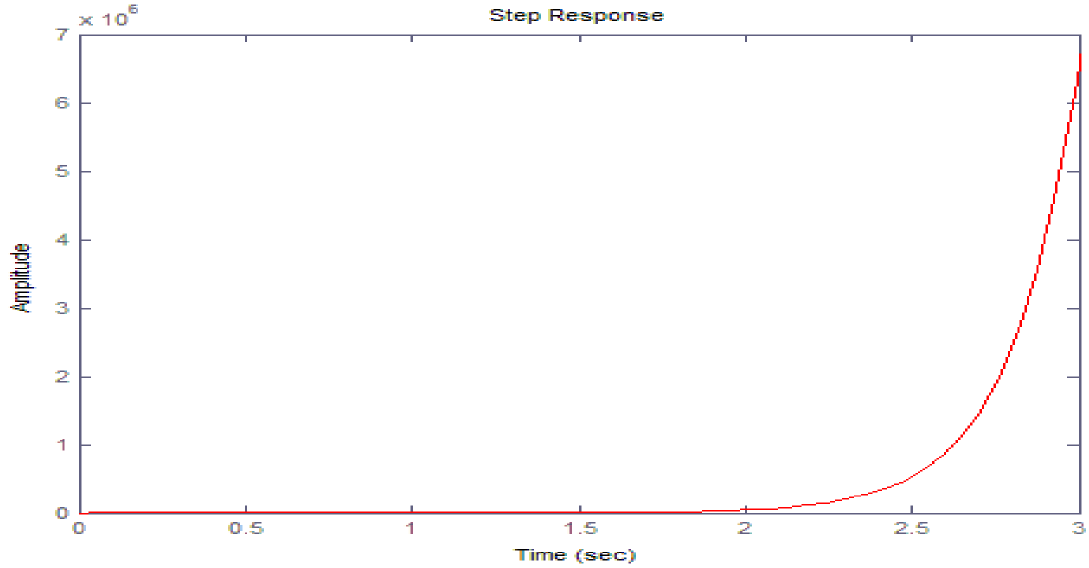
- **Risposta al gradino unitario**

Applicando quando possibile il teorema del valore finale,si ottiene:

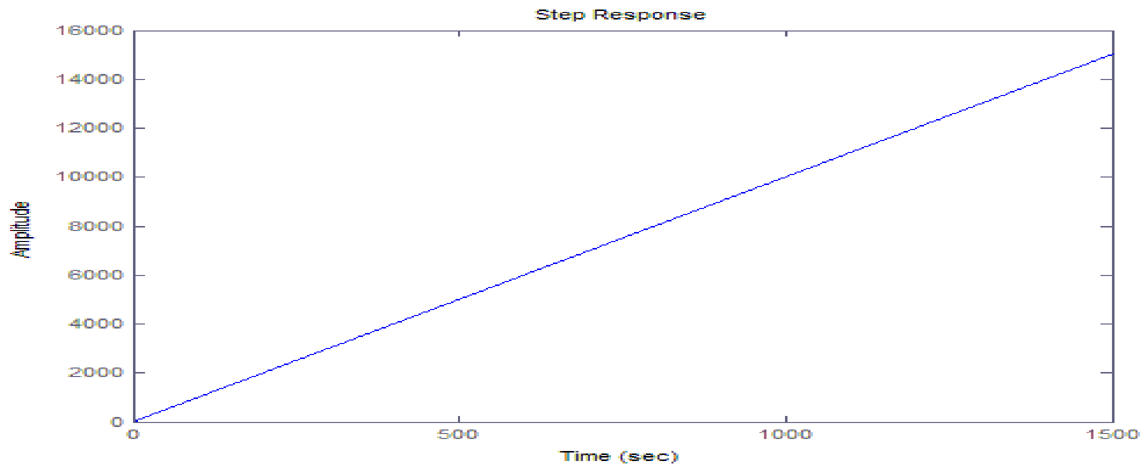
$\lim_{s \to 0} s * G(s) * \frac{1}{s}$ dove $\frac{1}{s}$ è la trasformata del gradino unitario

c) $\lim_{s \to 0} G_3(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s10}{(s+5)} * \frac{1}{s} = 2$ d) $\lim_{s \to 0} G_4(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s10}{(s+20)} * \frac{1}{s} = 0.5$

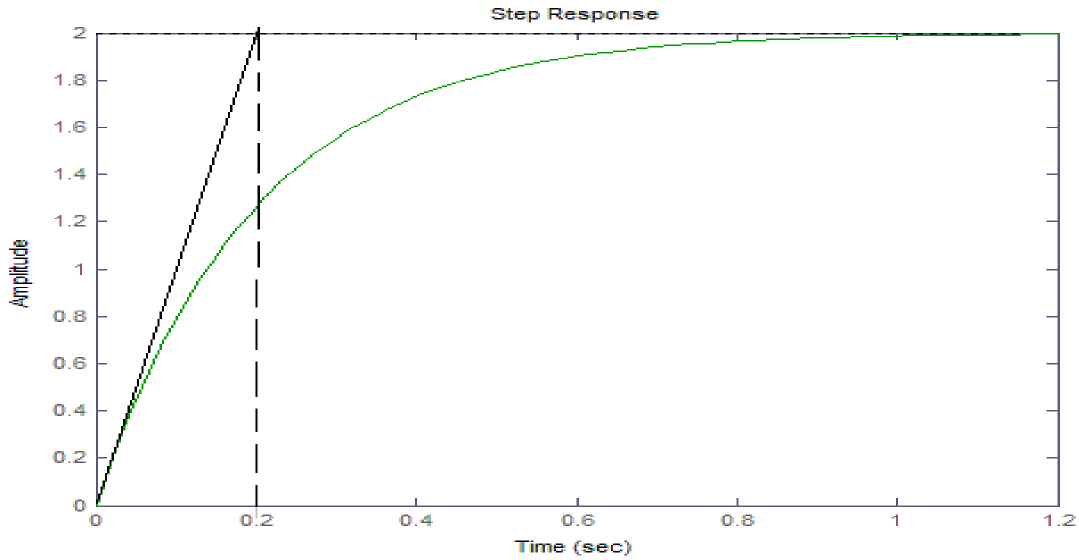
a) La risposta al gradino unitario diverge perché il sistema **non** è BIBO-stabile.



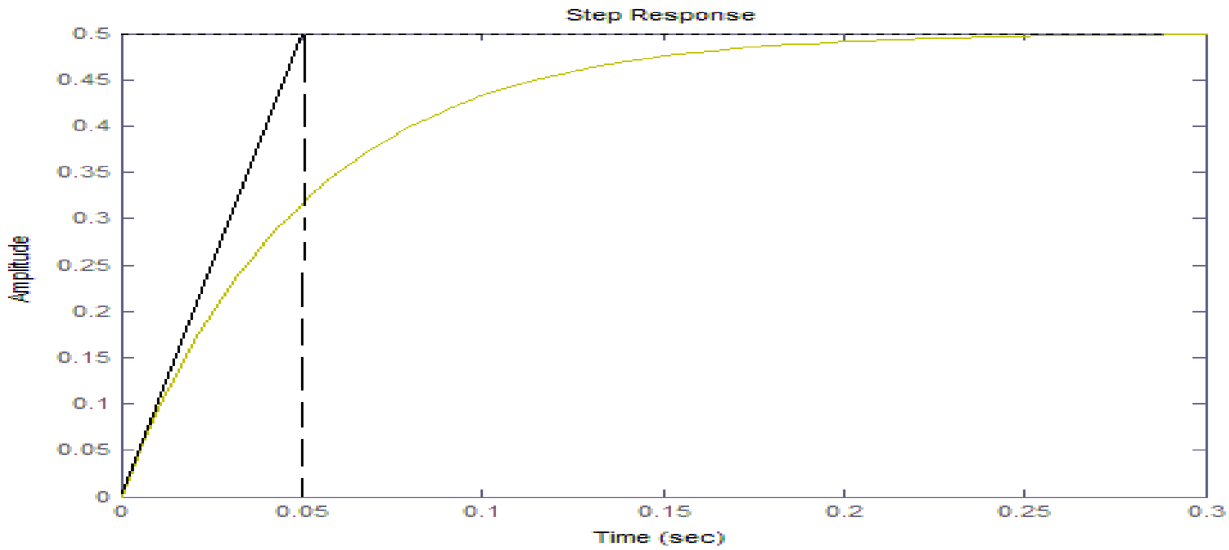
b) Anche in questo caso il sistema **non** è BIBO-stabile e quindi la risposta al gradino diverge.



c) Il sistema ha un polo in $p = -5 < 0$. Si può calcolare la costante di tempo $\tau = -1/p = 0.2$s. Graficamente τ è data dalla intersezione della tangente alla risposta iniziale y_0 con la retta orizzontale tangente alla risposta finale y_∞. Dal grafico si vede che il valore finale è 2.



d) Il sistema ha un polo in p = -20 < 0 e quindi è BIBO-stabile. La costante di tempo vale τ = -1/p = 0.05s. Anche in questo caso τ è data dall'intersezione della tangente alla risposta iniziale y_0 con la retta orizzontale tangente alla risposta finale y_∞. Dal grafico si vede che il valore finale è 0.5.



- **Script Matlab**

```
%  Risposte di sistemi del primo ordine a ingressi canonici

s = tf('s');  % Per definire la variabile "s"

G1 = 10/(s-5);
G2 = 10/(s+0);
G3 = 10/(s+5);
G4 = 10/(s+20);
%Simulazione della risposta all'impulso
figure(1), impulse(G1,'r'),
figure(2), impulse(G2,'b'),
figure(3), impulse(G3,'g'),
figure(4), impulse(G4,'y'),
```

```
%Simulazione della risposta al gradino
figure(1), step(G1,'r'),
figure(2), step(G2,'b'),
figure(3), step(G3,'g'),
figure(4), step(G4,'y')
```

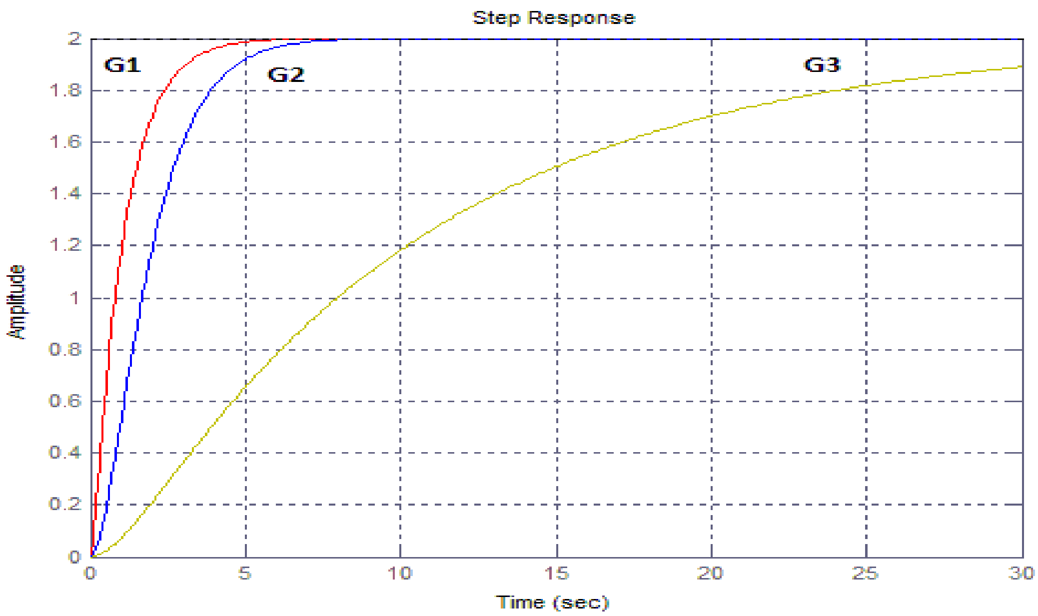
Risposta al gradino unitario di sistemi del secondo ordine con due poli reali e nessuno zero

a) $G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+10)}$ Poli in -1 e -10 $\longrightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 0.1s$

b) $G_2(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$ Poli in -1 e -1 $\longrightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 1s$

c) $G_3(s) = \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)}$ Poli in -1 e -0.1 $\longrightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 10s$

Funzione di trasferimento del sistema	$G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+10)}$	$G_2(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$	$G_3(s) = \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)}$
Poli (p)	-1 e -10	-1 e -1	-1 e -0.1
Cost. di tempo $\tau = -1/p$, p<0	1s e 0.1s	1s	1s e 10s
Valore a regime al gradino unitario	2	2	2
Tempo di salita	2.22s	3.36s	22.18s



Dal grafico si osserva che, al diminuire del valore del secondo polo (di una decade), la risposta diventa sempre più lenta, ovvero il sistema impiega più tempo a raggiungere il valore a regime. Si nota che il valore finale della risposta di tutti i sistemi è pari a 2. Quest' osservazione è confermata dai calcoli analitici usando il teorema del valore finale: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$

$\lim_{s\to 0} s * G(s) * \frac{1}{s}$ dove $\frac{1}{s}$ è la trasformata del gradino unitario

a) $\lim_{s\to 0} G_1(s) = \lim_{s\to 0} \frac{20}{(s+1)(s+10)} = 2$

b) $\lim_{s\to 0} G_2(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2}{(s+1)(s+1)} = 2$

c) $\lim_{s\to 0} G_3(s) = \lim_{s\to 0} \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)} = 2$

- ## Tempo di salita

Il tempo di salita rappresenta un parametro che determina la prontezza di risposta del sistema avente come ingresso un gradino unitario.

Nel caso di risposta monotona, il tempo di salita è definito nel seguente modo:

$$t_s = t_{90\%} - t_{10\%}$$

ovvero il tempo necessario affinché la risposta del sistema passi dal 10% al 90% del valore finale. In questo caso, bisogna calcolare l'intervallo temporale in cui l'ampiezza della risposta è tra 0.2 e 1.8.

Nel caso di risposta oscillante, il tempo di salita è pari al primo istante in cui la risposta del sistema passa per il valore finale y_∞ .

Dai grafici si ottengono i seguenti valori di tempo di salita:

a) ts_1 = 2.41 – 0.19 = 2.22s b) ts_2 = 3.89 – 0.53 = 3.36s c) ts_3 = 24.1 – 1.92 = 22.18s
Si nota che, al diminuire del valore del secondo polo, il tempo di salita aumenta, cioè il sistema diventa più lento.

Risposta al gradino unitario di sistemi del secondo ordine con due poli reali ed uno zero reale

$$G_4(s) = \frac{5}{-z}\frac{s-z}{(s+1)(s+5)}$$

Al cambiare del parametro ‘z’ cambierà anche la risposta del sistema avente come ingresso un gradino unitario.

- ## Tempo di salita

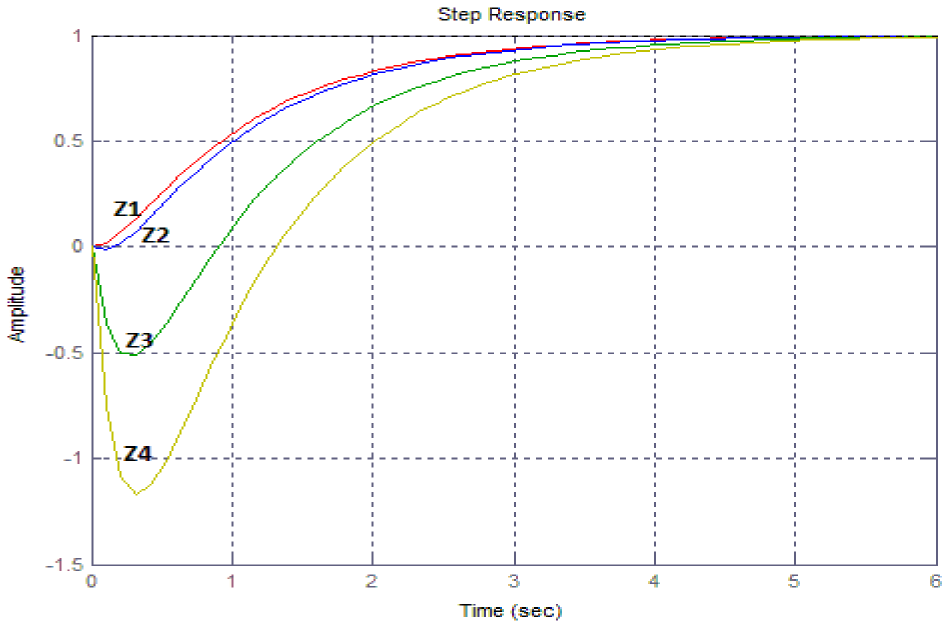
Sotto sono riportati i valori dei tempi di salita al variare del parametro z.

a) ts1 = 2.53 – 0.263 = 2.267s z_1 =100

ts2 = 2.63 – 0.356 = 2.274s z_2 =10

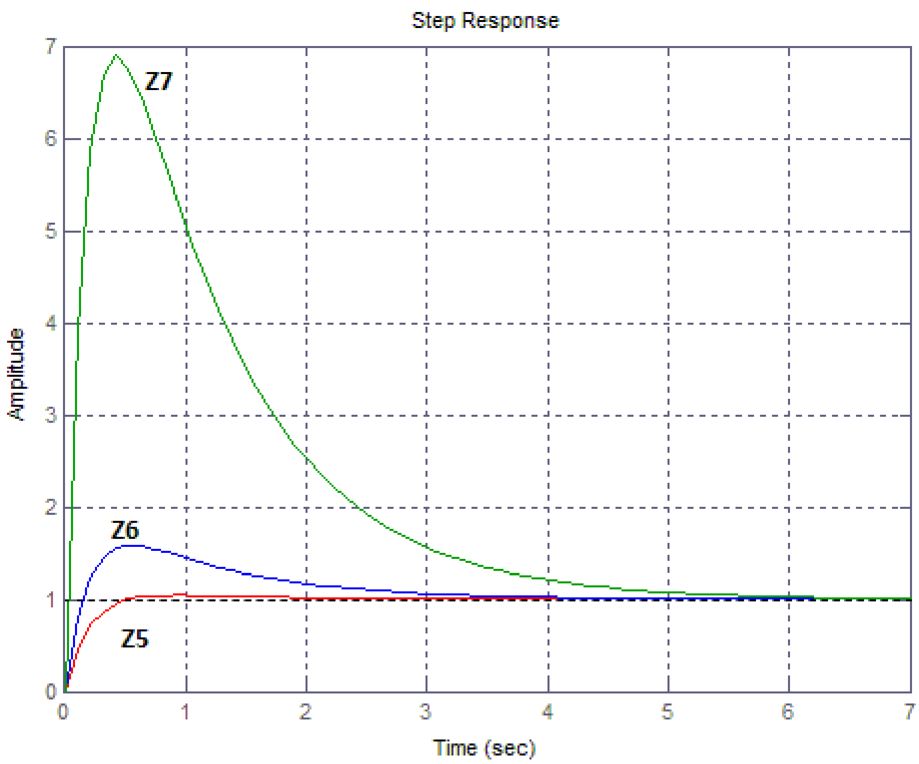
ts3 = 3.22 – 1.01 = 2.21s z_3 =1

ts4 = 3.62 – 1.43 = 2.19s z_4 =0.5



Dal grafico si vede che per valori di ‘z’ positivi il sistema ha una sottoelongazione. Questo è più evidente per z<5.

b) Per valori di ‘z’ compresi tra]-1 , 0[, si ha una sovraelongazione $\hat{s} = \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} > 0$



5) $\hat{s} = \frac{1.04-1}{1}$ = 0.04 ts5 = 0.35 – 0.0221 = 0.3279s $z_5 = -0.9$

6) $\hat{s} = \frac{1.58-1}{1} = 0.58$ ts6 = 0.125 – 0.0104 = 0.1146s $z_6 = -0.5$

7) $\hat{s} = \frac{6.89-1}{1} = 5.89$ ts7 = 0.0244 – 0.00273 = 0.02167 $z_7 = -0.1$

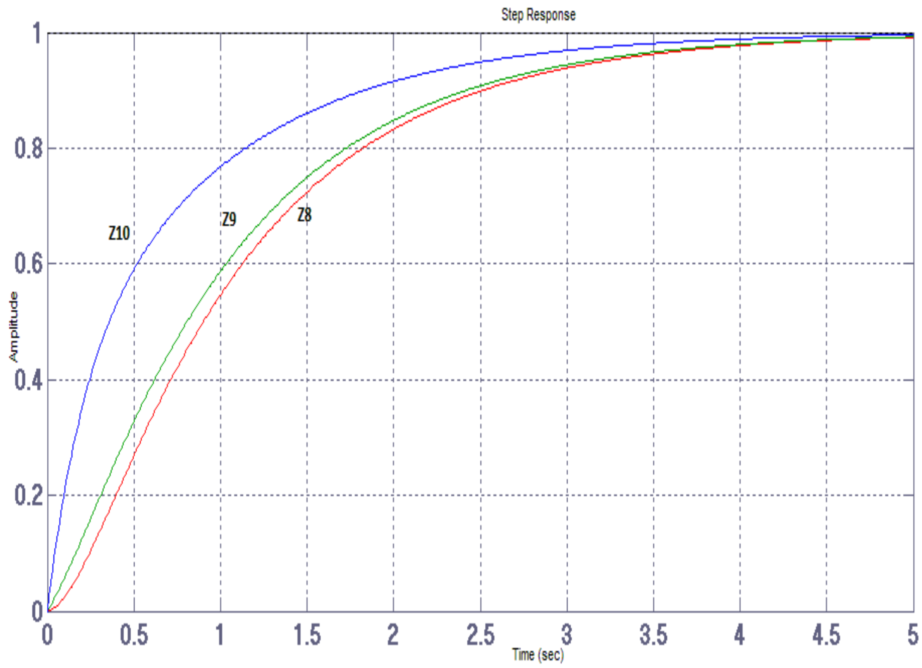
Si osserva che la sovraelongazione più alta si ha per z = – 0.1. Il tempo di salita diminuisce al diminuire del modulo di z. Si può dedurre che tanto più veloce è il sistema tanto maggiore risulta la sovraelongazione.

c) Per valori di z<-1, la risposta è monotona crescente.

ts_8=2.48-0.246 =2.234s z_8= -100

ts_9=2.51-0.165 =2.345s z_9= -10

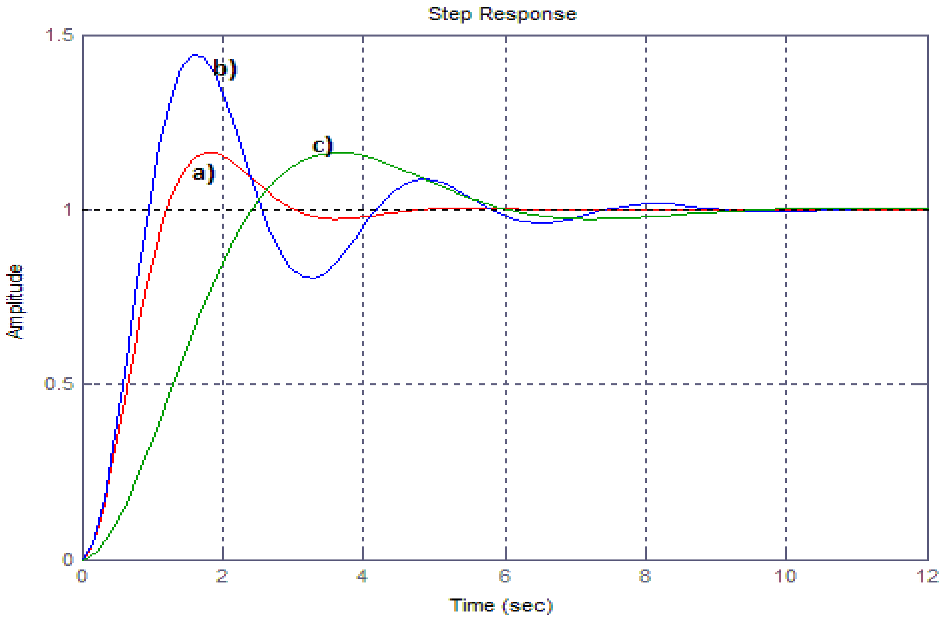
ts_{10}=1.83-0.0442 =1.7858s z_{10}= -2



Dal grafico si nota che, al diminuire del modulo del parametro z, diminuisce anche il tempo di salita del sistema e quindi il sistema diventa più veloce.

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine con due poli complessi coniugati e nessuno zero

$$G_5(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$



Dal grafico si nota che il valore finale delle risposte di tutti i sistemi è pari a 1

Valori ricavati dai grafici | Valori teorici

a) $t_s = 1.212s$	$\hat{S} = \frac{1.16-1}{1} = 0.16$	1.2092 s	0.163
$b) t_s = 0.9417$s	$\hat{S} = \frac{1.44-1}{1} 0.44$	0.9416 s	0.4443
c) $t_s = 2.425s$	$\hat{S} = \frac{1.16-1}{1} = 0.16$	2.4184 s	0.163

Si osserva che questi valori non si discostano molto da quelli teorici.

Per calcolare $t_{a,5\%}$ Bisogna osservare quando il grafico entra definitivamente all'interno della fascia [0.95 ; 1.05]. Si ricavano i seguenti valori:

a) $t_{a,5\%} = 2.65s$ b) $t_{a,5\%}$=5.39s c) $t_{a,5\%} = 5.29s$

Script Matlab

```
% Risposta al gradino di sistemi del II ordine con due poli reali e nessuno zero

s = tf('s');

G1 = 20/((s+1)*(s+10));
G2 = 2/((s+1)^2);
G3 = 0.2/((s+1)*(s+0.1));
figure(1), step(G1,'r', G2,'b', G3,'y'),grid on,

% Risposta al gradino di sistemi del II ordine con due poli reali e uno zero

z1 = 100; z2 = 10; z3 = 1; z4 = 0.5;

G41 = (5*(s-z1)) / ((-z1)*(s+1)*(s+5));
G42 = (5*(s-z2)) / ((-z2)*(s+1)*(s+5));
G43 = (5*(s-z3)) / ((-z3)*(s+1)*(s+5));
G44 = (5*(s-z4)) / ((-z4)*(s+1)*(s+5));
figure(2), step(G41,'r', G42,'g', G43,'b', G44,'y'), grid on,

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

z5 = -0.9; z6 = -0.5; z7 = -0.1;

G45 = (5*(s-z5)) / ((-z5)*(s+1)*(s+5));
G46 = (5*(s-z6)) / ((-z6)*(s+1)*(s+5));
G47 = (5*(s-z7)) / ((-z7)*(s+1)*(s+5));
figure(3), step(G45,'r', G46,'b', G47,'g'), grid on,
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

z8 = -100; z9 = -10; z10 = -2;

G48  = (5*(s-z8)) / ((-z8)*(s+1)*(s+5));
G49  = (5*(s-z9)) / ((-z9)*(s+1)*(s+5));
G410 = (5*(s-z10)) / ((-z10)*(s+1)*(s+5));
figure(4), step(G48,'r', G49,'b', G410,'g'),grid on,

%-------------------------------------------------------
% Risposta al gradino di sistemi del II ordine con due poli complessi coniugati

w1 = 2; sigma1 = 0.5; sigma2 = 0.25; w2 = 1;
G51 = (w1^2)/((s^2)+(2*sigma1*w1*s)+(w1^2));
G52 = (w1^2)/((s^2)+(2*sigma2*w1*s)+(w1^2));
G53 = (w2^2)/((s^2)+(2*sigma1*w2*s)+(w2^2));
figure(5), step(G51,'r', G52,'b', G53,'g'),grid on,

% Calcolo della sovraelongazione
se1 = exp(-pi*sigma1/sqrt(1-sigma1^2))
se2 = exp(-pi*sigma2/sqrt(1-sigma2^2))
se3 = exp(-pi*sigma1/sqrt(1-sigma1^2))

% Calcolo del tempo di salita
a = (sqrt(1-sigma1^2))/sigma1;
b = (sqrt(1-sigma2^2))/sigma2;
ts1 = (1/(w1*sqrt(1-sigma1^2)))*(pi-atan(a))
ts2 = (1/(w1*sqrt(1-sigma2^2)))*(pi-atan(b))
ts3 = (1/(w2*sqrt(1-sigma1^2)))*(pi-atan(a))
```