



Esercitazione di laboratorio #2

Risposta a ingressi canonici di sistemi del primo ordine

$$a) G_1(s) = \frac{10}{s-5} \quad b) G_2(s) = \frac{10}{s} \quad c) G_3(s) = \frac{10}{s+5} \quad d) G_4(s) = \frac{10}{s+20}$$

| Funzione di trasferimento del sistema | $G_1(s) = \frac{10}{s-5}$ | $G_2(s) = \frac{10}{s}$ | $G_3(s) = \frac{10}{s+5}$ | $G_4(s) = \frac{10}{s+20}$ |
|---|---------------------------|-------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Polo (p) | +5 | 0 | -5 | -20 |
| Costante di tempo $\tau = -1/p$, con $p < 0$ | \exists | \exists | 0.2s | 0.05s |
| Valore a regime all'impulso unitario | \exists | 10 | 0 | 0 |
| Valore a regime al gradino unitario | \exists | \exists | 2 | 0.5 |
| Tempo di salita | \exists | \exists | 0.44s | 0.11s |

Applicando quando possibile il teorema del valore finale: ($\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$)

si ottengono i seguenti valori:

$$b) \lim_{s \rightarrow 0} G_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+10}{s} * 1 = 10$$

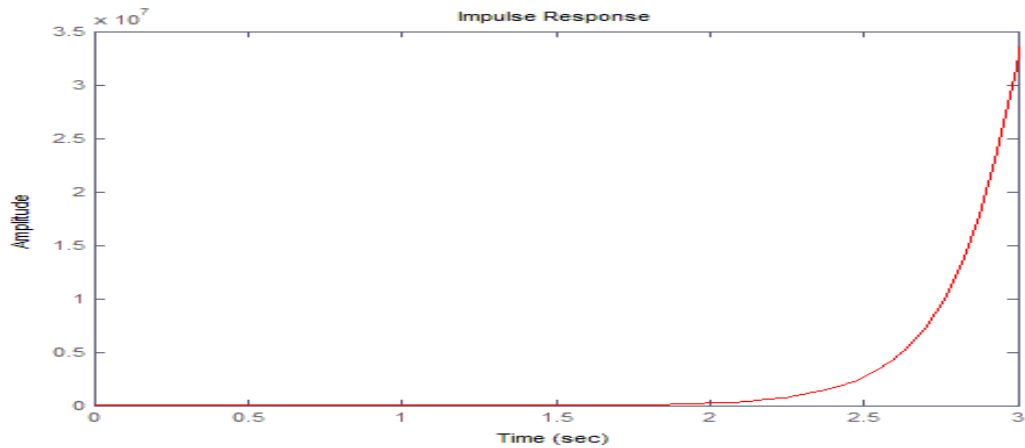
$$c) \lim_{s \rightarrow 0} G_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+10}{s+5} * 1 = 0$$

$$d) \lim_{s \rightarrow 0} G_4(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+10}{s+20} * 1 = 0$$

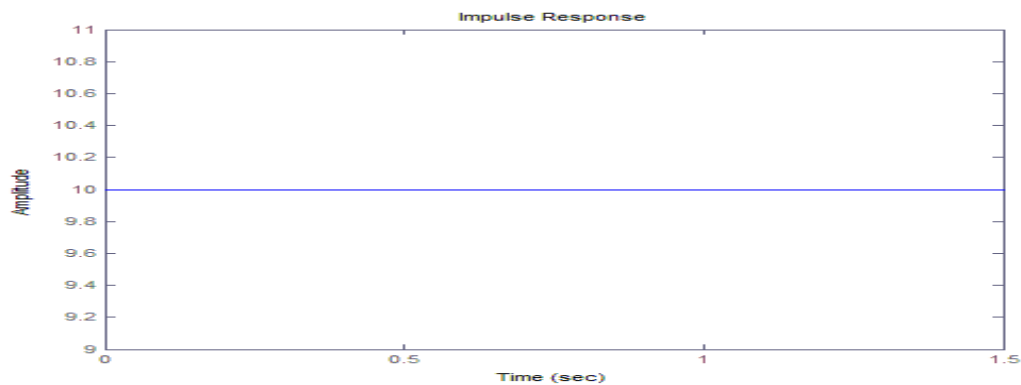
(dove '1' è la trasformata dell'impulso unitario)

• Risposta all'impulso unitario

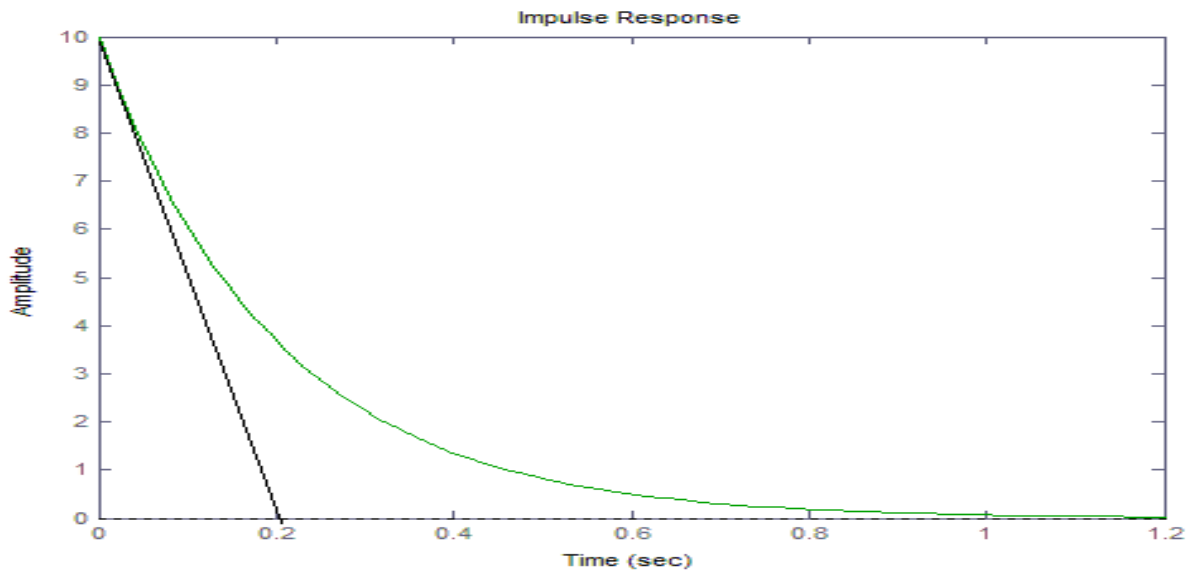
a) In questo caso non si può parlare di regime permanente perché la funzione di trasferimento ha un polo nel semipiano destro, quindi la sua risposta diverge.



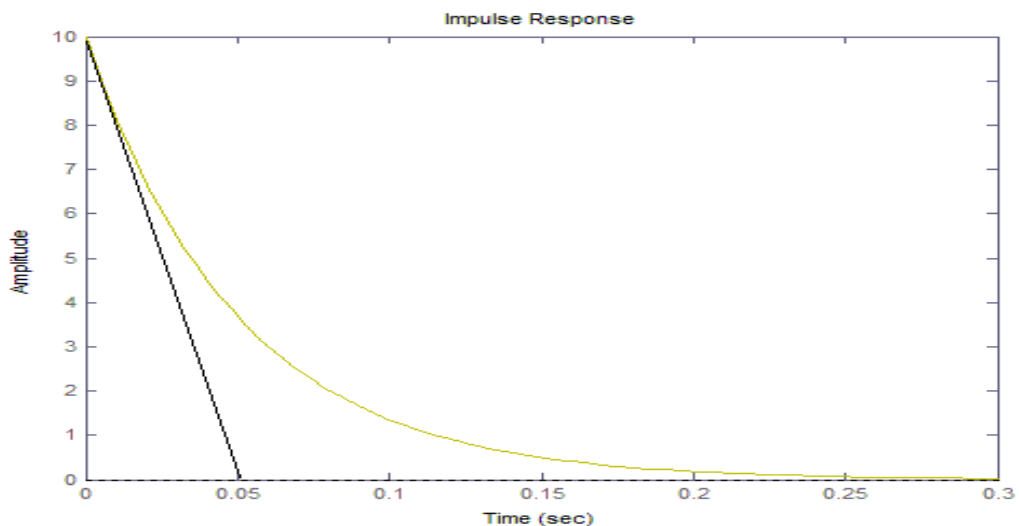
b) Il sistema ha un polo nell'origine e quindi **non** è BIBO stabile; tuttavia l'ingresso di tipo impulsivo **non** è limitato e, infatti, la risposta all'impulso è costante pari al valore 10.



c) La funzione di trasferimento presenta un polo nel semipiano sinistro [$s+5=0 \Rightarrow p=-5$] La costante di tempo è $\tau = -1/p = 0.2s$. Dal grafico si osserva che il valore a regime è nullo. La costante di tempo è data dal piede della tangente alla risposta iniziale.



d) La funzione di trasferimento ha un polo in $p = -20 < 0$, quindi è BIBO stabile. La costante di tempo vale $\tau = -1/p = 0.05s$. Dal grafico si vede che il valore a regime è nullo anche in questo caso.



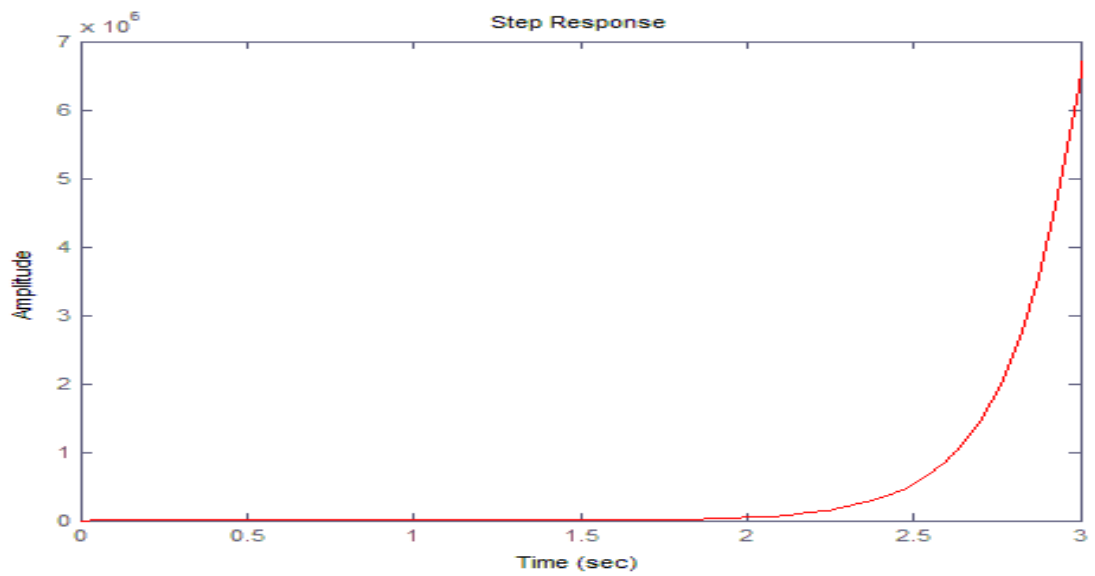
• Risposta al gradino unitario

Applicando quando possibile il teorema del valore finale, si ottiene:

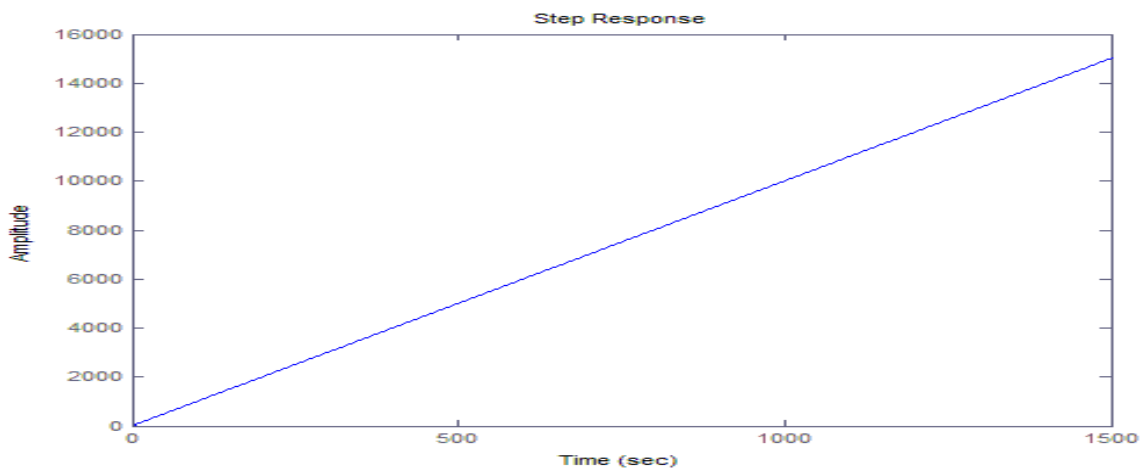
$$\lim_{s \rightarrow 0} s * G(s) * \frac{1}{s} \quad \text{dove } \frac{1}{s} \text{ è la trasformata del gradino unitario}$$

$$c) \lim_{s \rightarrow 0} G_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s10}{s+5} * \frac{1}{s} = 2 \quad d) \lim_{s \rightarrow 0} G_4(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s10}{s+20} * \frac{1}{s} = 0.5$$

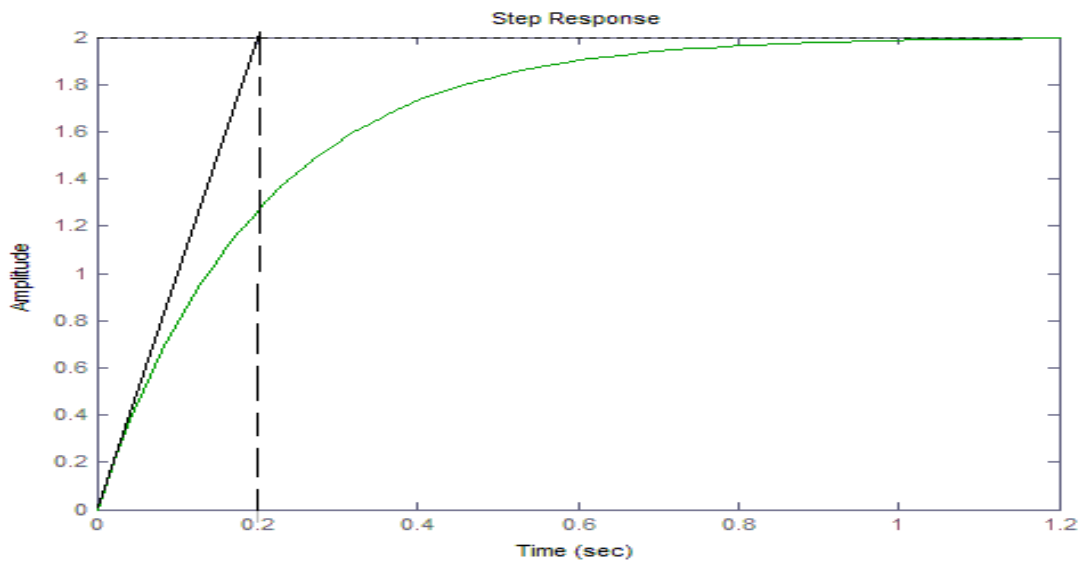
a) La risposta al gradino unitario diverge perché il sistema **non** è BIBO-stabile.



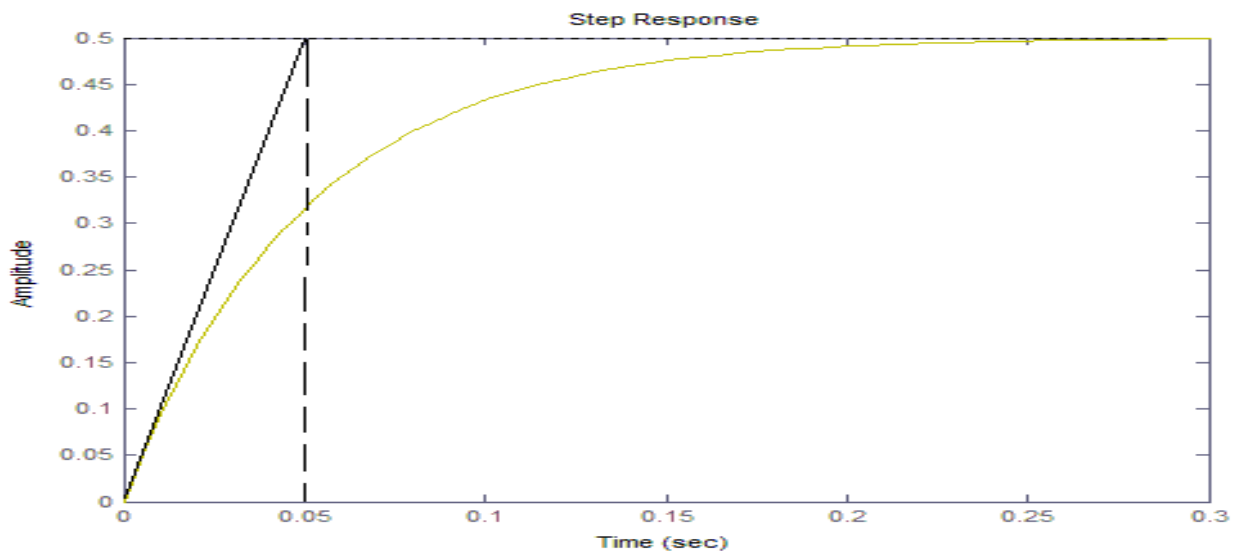
b) Anche in questo caso il sistema **non** è BIBO-stabile e quindi la risposta al gradino diverge.



c) Il sistema ha un polo in $p = -5 < 0$. Si può calcolare la costante di tempo $\tau = -1/p = 0.2s$. Graficamente τ è data dalla intersezione della tangente alla risposta iniziale y_0 con la retta orizzontale tangente alla risposta finale y_{oc} . Dal grafico si vede che il valore finale è 2.



d) Il sistema ha un polo in $p = -20 < 0$ e quindi è BIBO-stabile. La costante di tempo vale $\tau = -1/p = 0.05s$. Anche in questo caso τ è data dall'intersezione della tangente alla risposta iniziale y_0 con la retta orizzontale tangente alla risposta finale y_{∞} . Dal grafico si vede che il valore finale è 0.5.



• Script Matlab

```
% Risposte di sistemi del primo ordine a ingressi canonici
```

```
s = tf('s'); % Per definire la variabile "s"
```

```
G1 = 10/(s-5);
```

```
G2 = 10/(s+0);
```

```
G3 = 10/(s+5);
```

```
G4 = 10/(s+20);
```

```
%Simulazione della risposta all'impulso
```

```
figure(1), impulse(G1,'r'),
```

```
figure(2), impulse(G2,'b'),
```

```
figure(3), impulse(G3,'g'),
```

```
figure(4), impulse(G4,'y'),
```

```

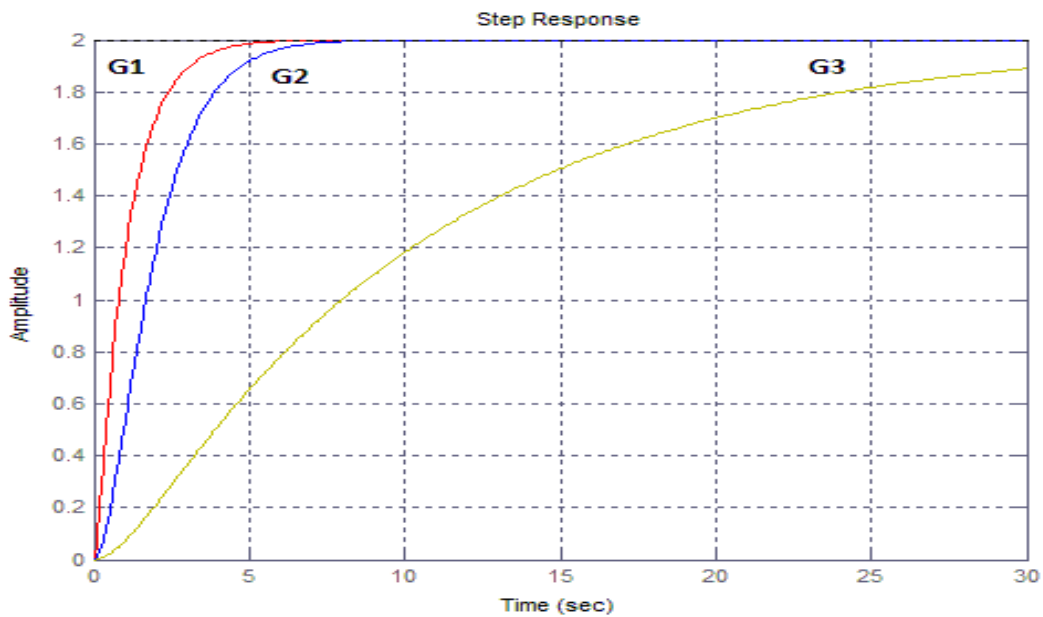
%Simulazione della risposta al gradino
figure(1), step(G1, 'r'),
figure(2), step(G2, 'b'),
figure(3), step(G3, 'g'),
figure(4), step(G4, 'y')

```

Risposta al gradino unitario di sistemi del secondo ordine con due poli reali e nessuno zero

- a) $G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+10)}$ Poli in -1 e -10 $\rightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 0.1s$
- b) $G_2(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$ Poli in -1 e -1 $\rightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 1s$
- c) $G_3(s) = \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)}$ Poli in -1 e -0.1 $\rightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 10s$

| | | | |
|--|-----------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| Funzione di trasferimento del sistema | $G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+10)}$ | $G_2(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$ | $G_3(s) = \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)}$ |
| Poli (p) | -1 e -10 | -1 e -1 | -1 e -0.1 |
| Cost. di tempo $\tau = -1/p$, $p < 0$ | 1s e 0.1s | 1s | 1s e 10s |
| Valore a regime al gradino unitario | 2 | 2 | 2 |
| Tempo di salita | 2.22s | 3.36s | 22.18s |



Dal grafico si osserva che, al diminuire del valore del secondo polo (di una decade), la risposta diventa sempre più lenta, ovvero il sistema impiega più tempo a raggiungere il valore a regime. Si nota che il valore finale della risposta di tutti i sistemi è pari a 2. Quest'osservazione è confermata dai calcoli analitici usando il teorema del valore finale: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$

$\lim_{s \rightarrow 0} s * G(s) * \frac{1}{s}$ dove $\frac{1}{s}$ è la trasformata del gradino unitario

$$a) \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20}{(s+1)(s+10)} = 2$$

$$b) \lim_{s \rightarrow 0} G_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{(s+1)(s+1)} = 2$$

$$c) \lim_{s \rightarrow 0} G_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)} = 2$$

• Tempo di salita

Il tempo di salita rappresenta un parametro che determina la prontezza di risposta del sistema avente come ingresso un gradino unitario.

Nel caso di risposta monotona, il tempo di salita è definito nel seguente modo:

$$t_s = t_{90\%} - t_{10\%}$$

ovvero il tempo necessario affinché la risposta del sistema passi dal 10% al 90% del valore finale. In questo caso, bisogna calcolare l'intervallo temporale in cui l'ampiezza della risposta è tra 0.2 e 1.8.

Nel caso di risposta oscillante, il tempo di salita è pari al primo istante in cui la risposta del sistema passa per il valore finale y_{∞} .

Dai grafici si ottengono i seguenti valori di tempo di salita:

$$a) \quad ts_1 = 2.41 - 0.19 = 2.22s \quad b) \quad ts_2 = 3.89 - 0.53 = 3.36s \quad c) \quad ts_3 = 24.1 - 1.92 = 22.18s$$

Si nota che, al diminuire del valore del secondo polo, il tempo di salita aumenta, cioè il sistema diventa più lento.

Risposta al gradino unitario di sistemi del secondo ordine con due poli reali ed uno zero reale

$$G_4(s) = \frac{5}{-z} \frac{s - \pi}{(s + 1)(s + 5)}$$

Al cambiare del parametro 'z' cambierà anche la risposta del sistema avente come ingresso un gradino unitario.

• Tempo di salita

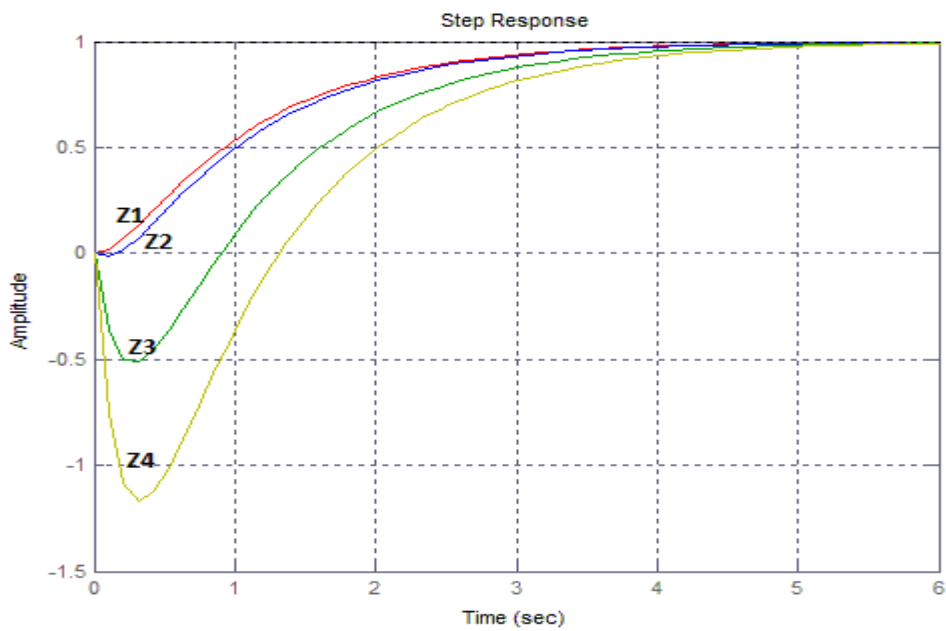
Sotto sono riportati i valori dei tempi di salita al variare del parametro z.

$$a) \quad ts_1 = 2.53 - 0.263 = 2.267s \quad z_1 = 100$$

$$ts_2 = 2.63 - 0.356 = 2.274s \quad z_2 = 10$$

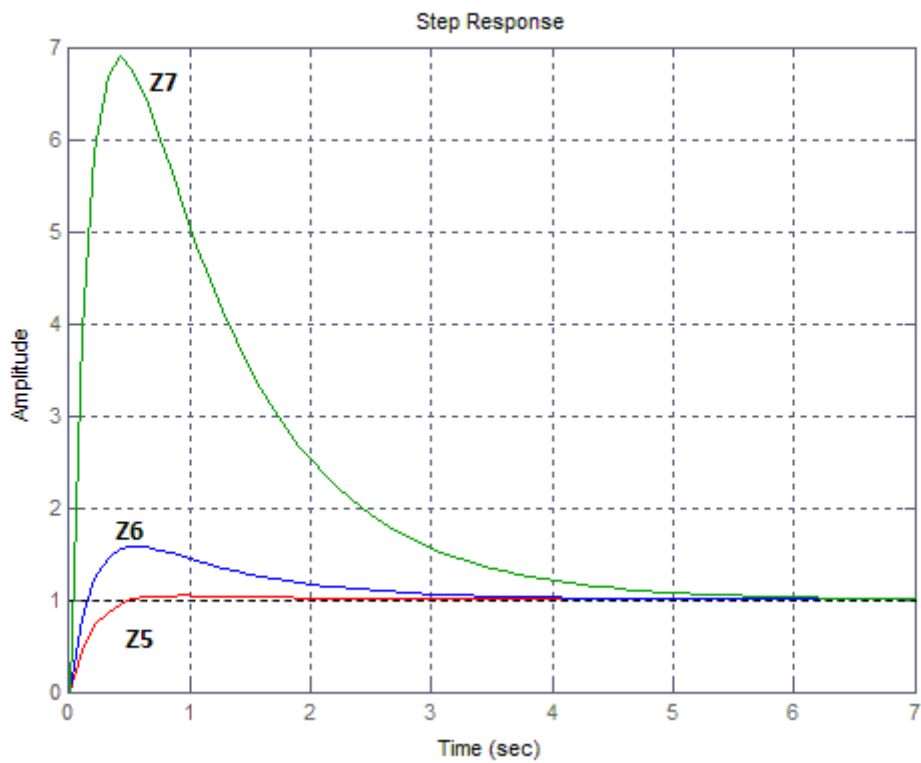
$$ts_3 = 3.22 - 1.01 = 2.21s \quad z_3 = 1$$

$$ts_4 = 3.62 - 1.43 = 2.19s \quad z_4 = 0.5$$



Dal grafico si vede che per valori di 'z' positivi il sistema ha una sottoelongazione. Questo è più evidente per $z < 5$.

b) Per valori di 'z' compresi tra $]-1, 0[$, si ha una sovralongazione $\delta = \frac{F_{max} - F_m}{F_m} > 0$



5) $\delta = \frac{1.04 - 1}{1} = 0.04$

$ts_5 = 0.35 - 0.0221 = 0.3279s$

$z_5 = -0.9$

$$6) \xi = \frac{1.89-1}{1} = 0.58 \quad ts_6 = 0.125 - 0.0104 = 0.1146s \quad z_6 = -0.5$$

$$7) \xi = \frac{6.89-1}{1} = 5.89 \quad ts_7 = 0.0244 - 0.00273 = 0.02167 \quad z_7 = -0.1$$

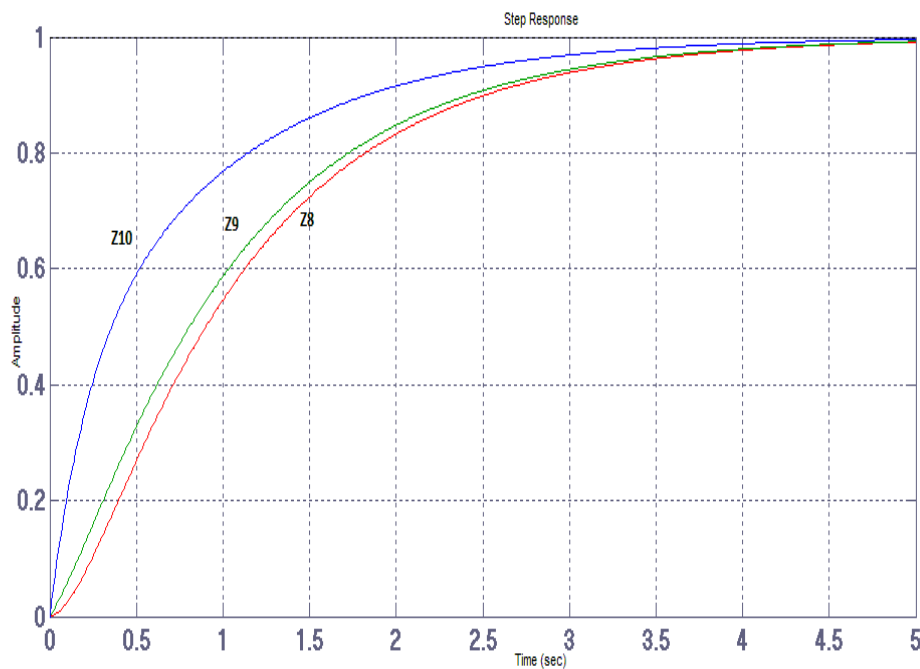
Si osserva che la sovraelongazione più alta si ha per $z = -0.1$. Il tempo di salita diminuisce al diminuire del modulo di z . Si può dedurre che tanto più veloce è il sistema tanto maggiore risulta la sovraelongazione.

c) Per valori di $z < -1$, la risposta è monotona crescente.

$$ts_8 = 2.48 - 0.246 = 2.234s \quad z_8 = -100$$

$$ts_9 = 2.51 - 0.165 = 2.345s \quad z_9 = -10$$

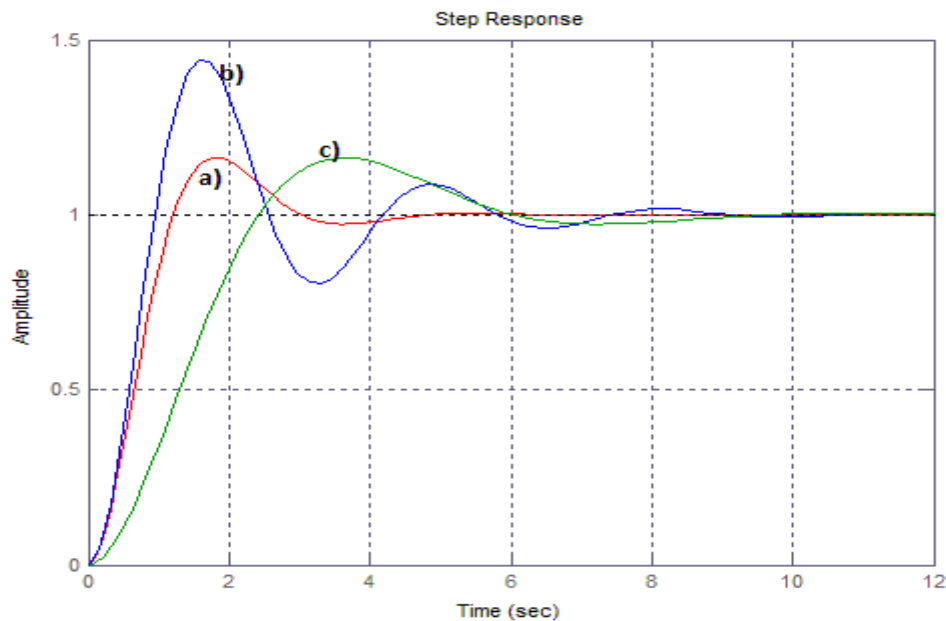
$$ts_{10} = 1.83 - 0.0442 = 1.7858s \quad z_{10} = -2$$



Dal grafico si nota che, al diminuire del modulo del parametro z , diminuisce anche il tempo di salita del sistema e quindi il sistema diventa più veloce.

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine con due poli complessi coniugati e nessuno zero

$$G_S(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



Dal grafico si nota che il valore finale delle risposte di tutti i sistemi è pari a 1

Valori ricavati dai grafici

Valori teorici

| | | | |
|--------------------|---------------------------------|----------|--------|
| a) $t_s = 1.212s$ | $\xi = \frac{1.16-1}{1} = 0.16$ | 1.2092 s | 0.163 |
| b) $t_s = 0.9417s$ | $\xi = \frac{1.44-1}{1} = 0.44$ | 0.9416 s | 0.4443 |
| c) $t_s = 2.425s$ | $\xi = \frac{1.16-1}{1} = 0.16$ | 2.4184 s | 0.163 |

Si osserva che questi valori non si discostano molto da quelli teorici.

Per calcolare $t_{a,5\%}$ Bisogna osservare quando il grafico entra definitivamente all'interno della fascia [0.95 ; 1.05]. Si ricavano i seguenti valori:

$$a) t_{a,5\%} = 2.65s \quad b) t_{a,5\%} = 5.39s \quad c) t_{a,5\%} = 5.29s$$

Script Matlab

```
% Risposta al gradino di sistemi del II ordine con due poli reali e nessuno zero
```

```
s = tf('s');  
G1 = 20/((s+1)*(s+10));  
G2 = 2/((s+1)^2);  
G3 = 0.2/((s+1)*(s+0.1));  
figure(1), step(G1,'r', G2,'b', G3,'y'),grid on,
```

```
% Risposta al gradino di sistemi del II ordine con due poli reali e uno zero
```

```
z1 = 100; z2 = 10; z3 = 1; z4 = 0.5;  
G41 = (5*(s-z1)) / ((-z1)*(s+1)*(s+5));  
G42 = (5*(s-z2)) / ((-z2)*(s+1)*(s+5));  
G43 = (5*(s-z3)) / ((-z3)*(s+1)*(s+5));  
G44 = (5*(s-z4)) / ((-z4)*(s+1)*(s+5));  
figure(2), step(G41,'r', G42,'g', G43,'b', G44,'y'), grid on,
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
z5 = -0.9; z6 = -0.5; z7 = -0.1;  
G45 = (5*(s-z5)) / ((-z5)*(s+1)*(s+5));  
G46 = (5*(s-z6)) / ((-z6)*(s+1)*(s+5));  
G47 = (5*(s-z7)) / ((-z7)*(s+1)*(s+5));  
figure(3), step(G45,'r', G46,'b', G47,'g'), grid on,  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
z8 = -100; z9 = -10; z10 = -2;  
G48 = (5*(s-z8)) / ((-z8)*(s+1)*(s+5));  
G49 = (5*(s-z9)) / ((-z9)*(s+1)*(s+5));  
G410 = (5*(s-z10)) / ((-z10)*(s+1)*(s+5));  
figure(4), step(G48,'r', G49,'b', G410,'g'),grid on,
```

```
%-----
```

```
% Risposta al gradino di sistemi del II ordine con due poli complessi coniugati
```

```
w1 = 2; sigma1 = 0.5; sigma2 = 0.25; w2 = 1;  
G51 = (w1^2)/((s^2)+(2*sigma1*w1*s)+(w1^2));  
G52 = (w1^2)/((s^2)+(2*sigma2*w1*s)+(w1^2));  
G53 = (w2^2)/((s^2)+(2*sigma1*w2*s)+(w2^2));  
figure(5), step(G51,'r', G52,'b', G53,'g'),grid on,
```

```
% Calcolo della sovraelongazione
```

```
se1 = exp(-pi*sigma1/sqrt(1-sigma1^2))  
se2 = exp(-pi*sigma2/sqrt(1-sigma2^2))  
se3 = exp(-pi*sigma1/sqrt(1-sigma1^2))
```

```
% Calcolo del tempo di salita
```

```
a = (sqrt(1-sigma1^2))/sigma1;  
b = (sqrt(1-sigma2^2))/sigma2;  
ts1 = (1/(w1*sqrt(1-sigma1^2)))*(pi-atan(a))  
ts2 = (1/(w1*sqrt(1-sigma2^2)))*(pi-atan(b))  
ts3 = (1/(w2*sqrt(1-sigma1^2)))*(pi-atan(a))
```

- **Analisi della stabilità interna di sistemi dinamici LTI**

Si analizza l'evoluzione libera del sistema, ossia l'effetto di condizioni iniziali non nulle in assenza di ingresso. Le matrici sono triangolari e quindi gli autovalori sono i coefficienti della diagonale principale.

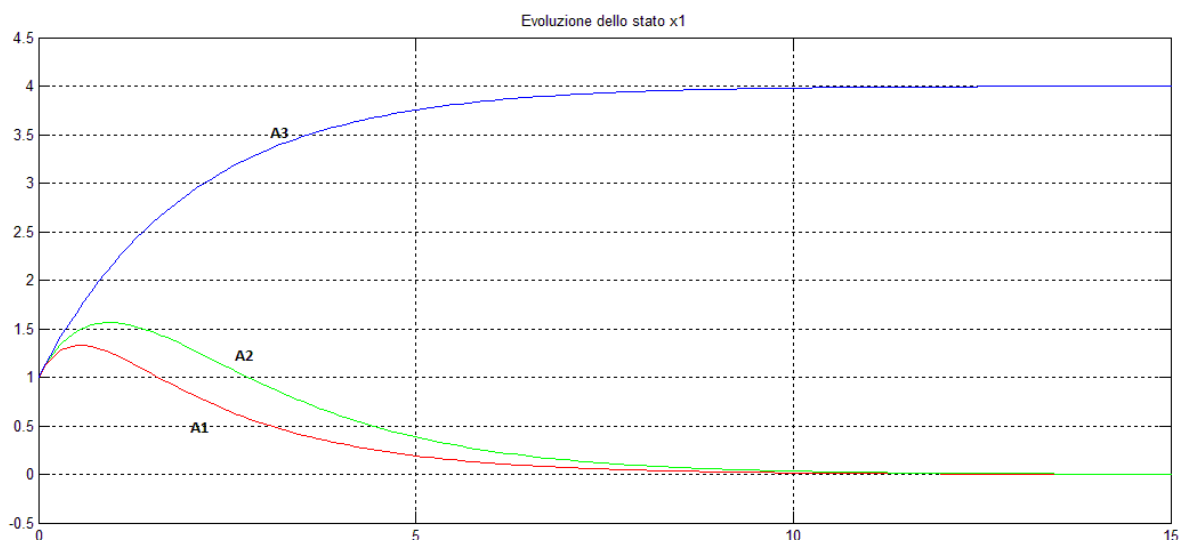
| | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 |
|------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| Autovalori | -0.5 e -2 | -0.5 e -1 | -0.5 e 0 | -0.5 e 1 |
| Stabilità interna a tempo continuo | Asintoticamente stabile | Asintoticamente stabile | Semplicemente stabile | Instabile |
| Stabilità interna a tempo discreto | Instabile | Semplicemente stabile | Asintoticamente stabile | Semplicemente stabile |

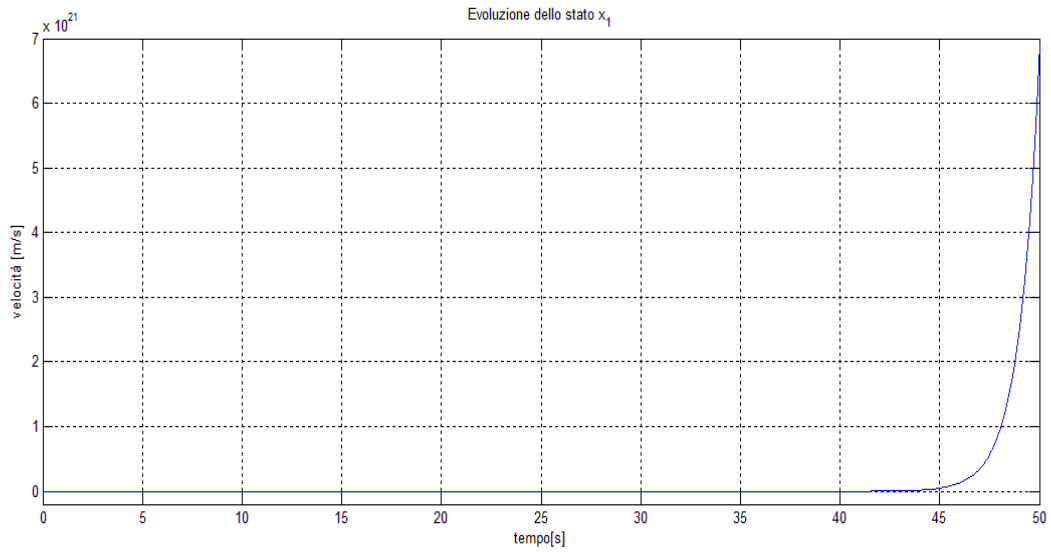
- **Tempo continuo**

Le seguenti osservazioni sono fatte per l'evoluzione degli stati x_1 e x_2 .

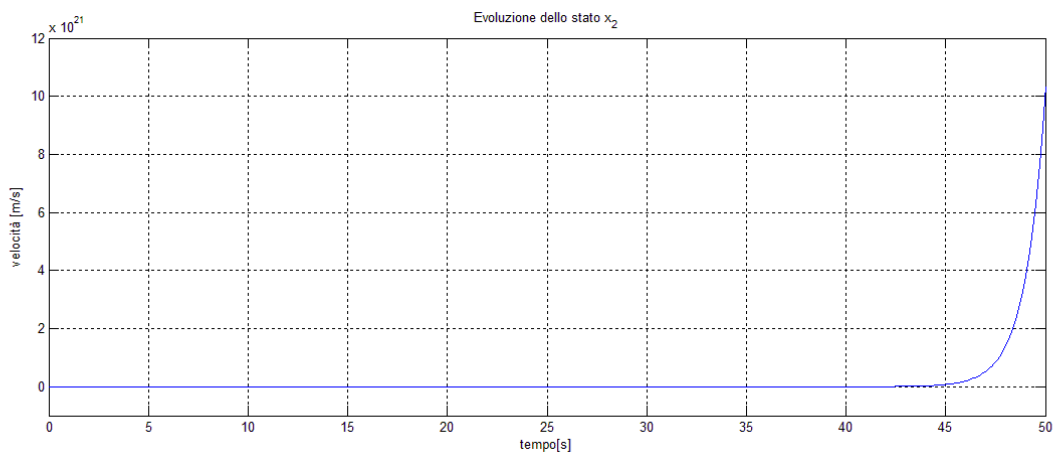
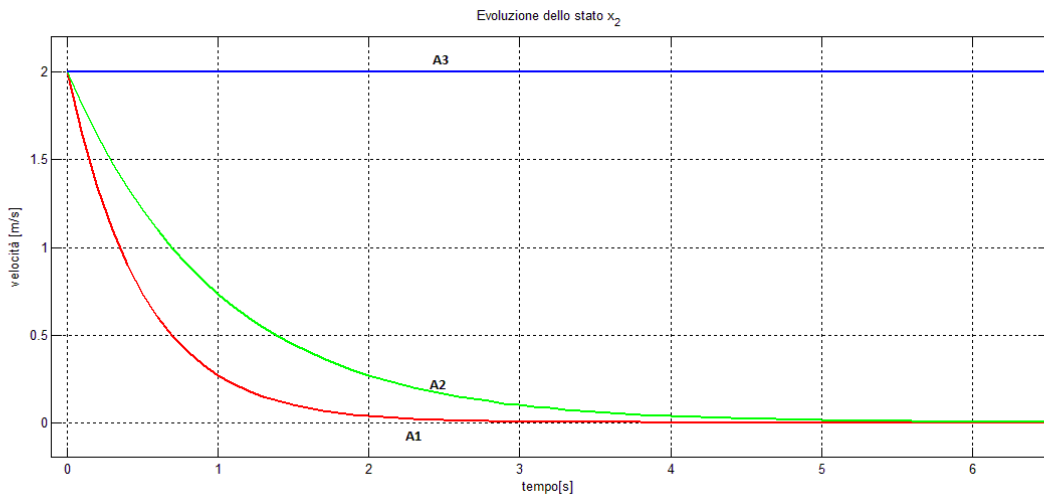
L'evoluzione degli stati dei sistemi corrispondenti alle matrici A_1 e A_2 converge asintoticamente a zero perché tutti i rispettivi autovalori sono strettamente minori di zero. La matrice A_3 ha un autovalore nullo e quindi l'evoluzione degli stati si mantiene limitata senza convergere a zero (in questo caso a al valore 4). La matrice A_4 ha un autovalore positivo e quindi l'evoluzione di almeno uno degli stati diverge asintoticamente.

- **Evoluzione dello stato x_1**



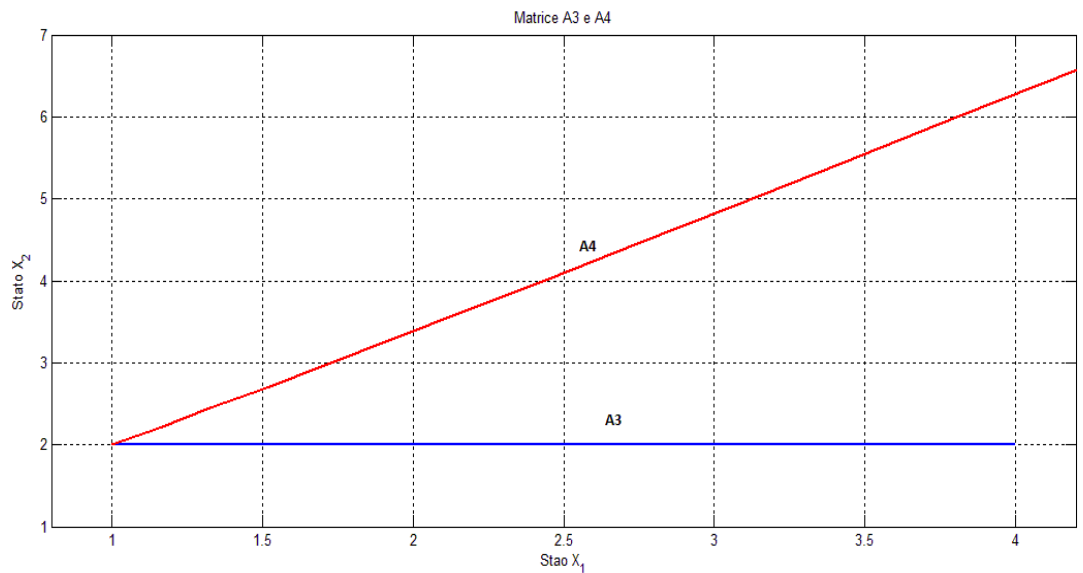
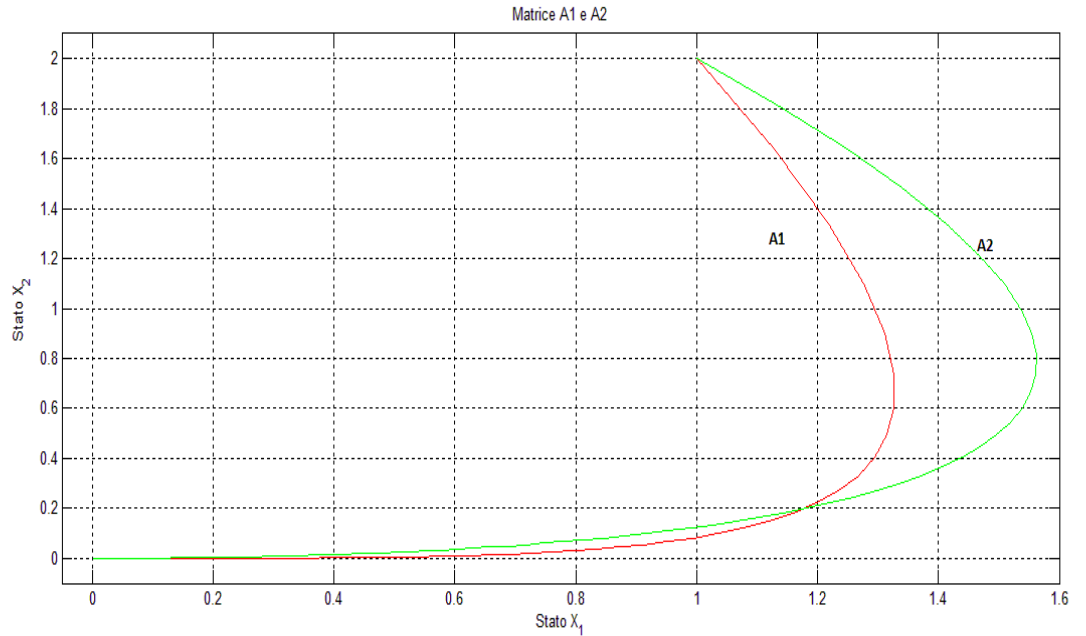


- **Evolutione dello stato x_2**



- **Proiezione sul piano degli stati X_1 e X_2 (tempo continuo)**

Dai grafici si vede che le proiezioni delle evoluzioni degli stati X_1 e X_2 sono stabili nei casi cui è soddisfatta la condizione di asintotica stabilità, ossia per i sistemi aventi come matrici di stato A_1 e A_2 .

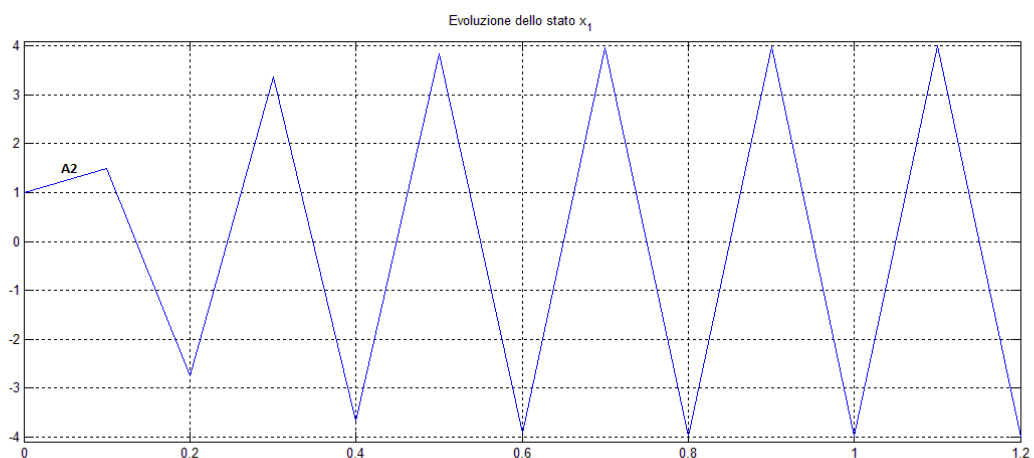
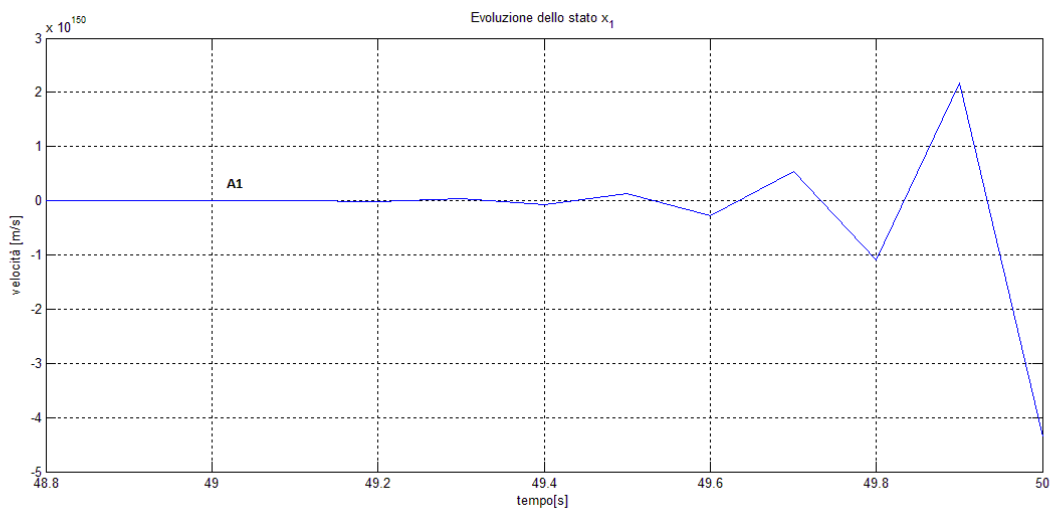


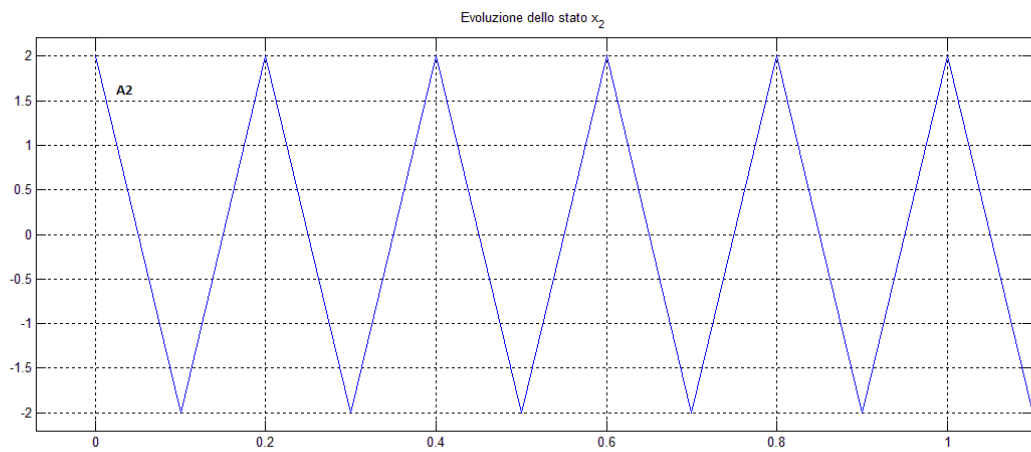
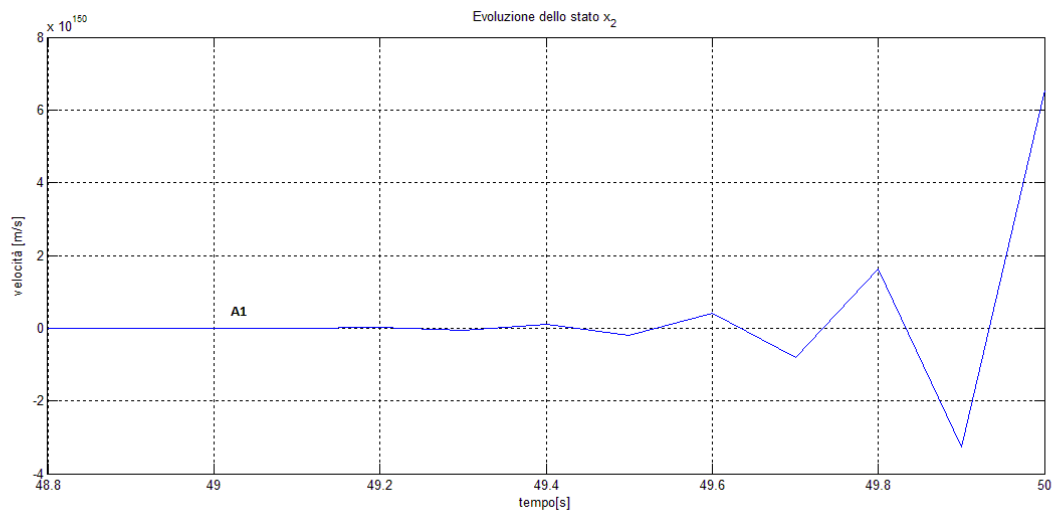
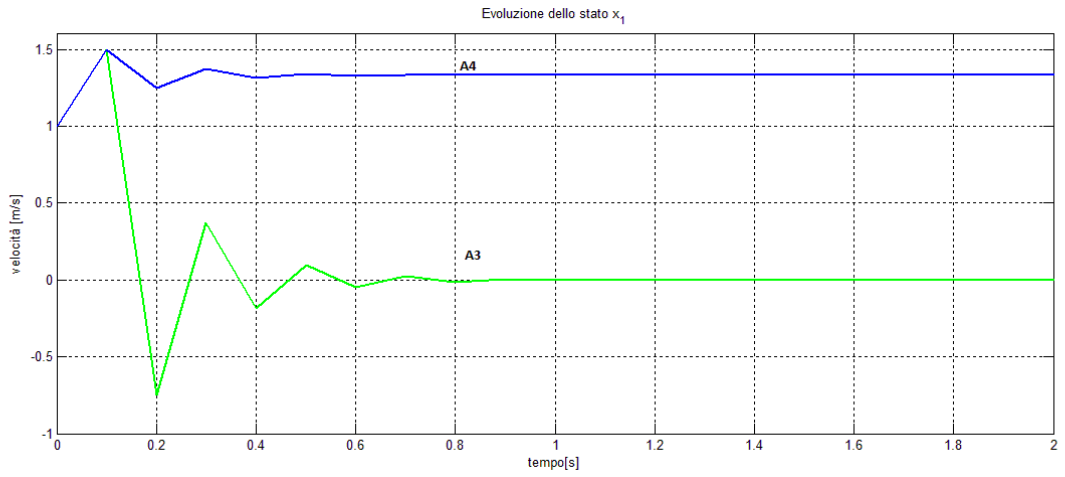
• Tempo discreto

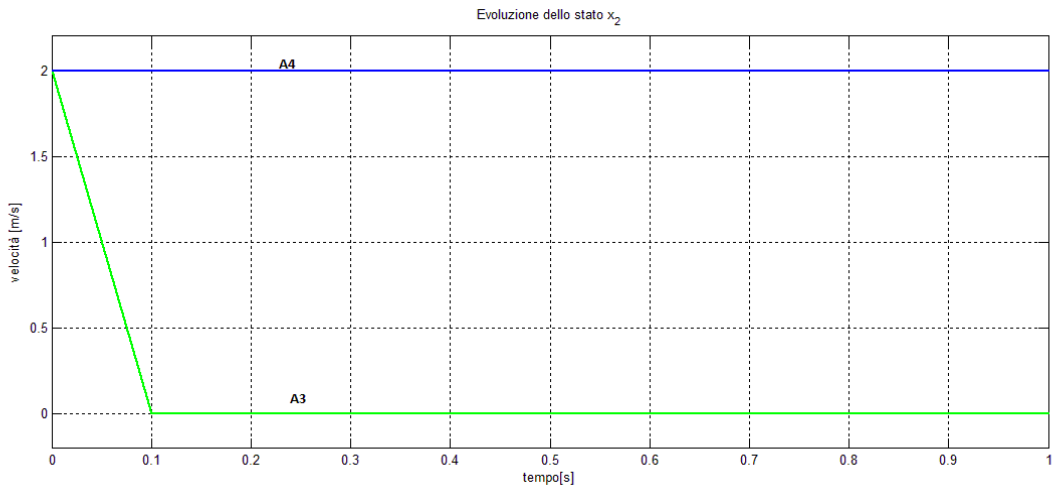
Le seguenti osservazioni sono fatte per l'evoluzione degli stati X_1 e X_2 .

La matrice A_1 ha un autovalore (-2) il cui modulo è maggiore di uno e quindi l'evoluzione di almeno uno degli stati diverge asintoticamente. L'evoluzione degli stati del sistema corrispondente alla matrice A_3 converge asintoticamente a zero perché il modulo di tutti gli autovalori è strettamente minore di uno.

Le matrici A_2 e A_4 hanno un autovalore con modulo pari a uno e quindi l'evoluzione degli stati si mantiene limitata senza convergere a zero.

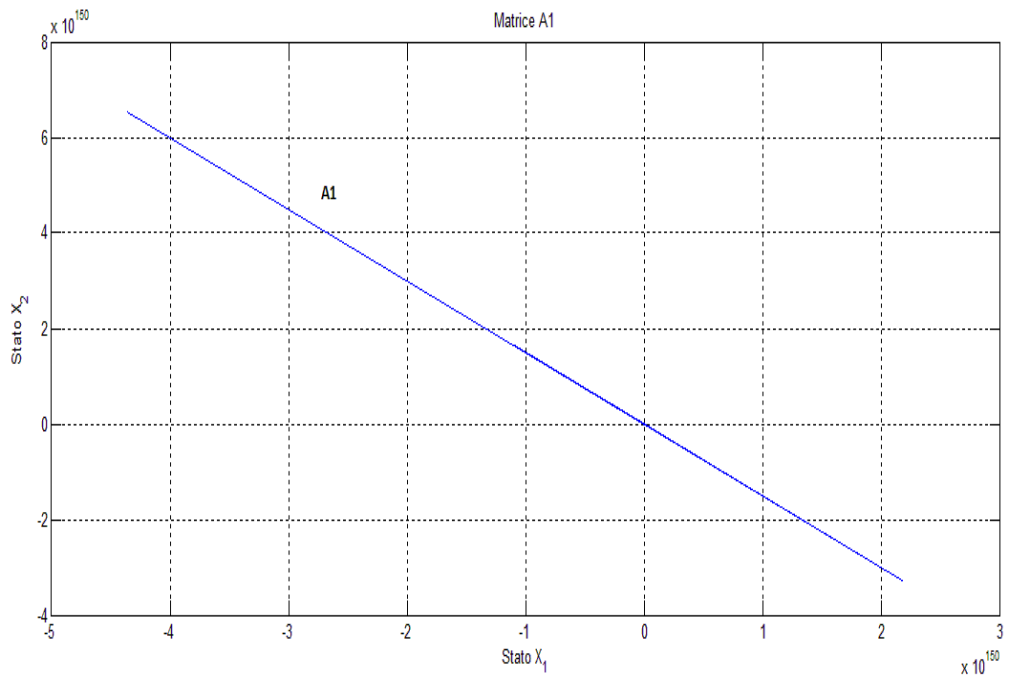


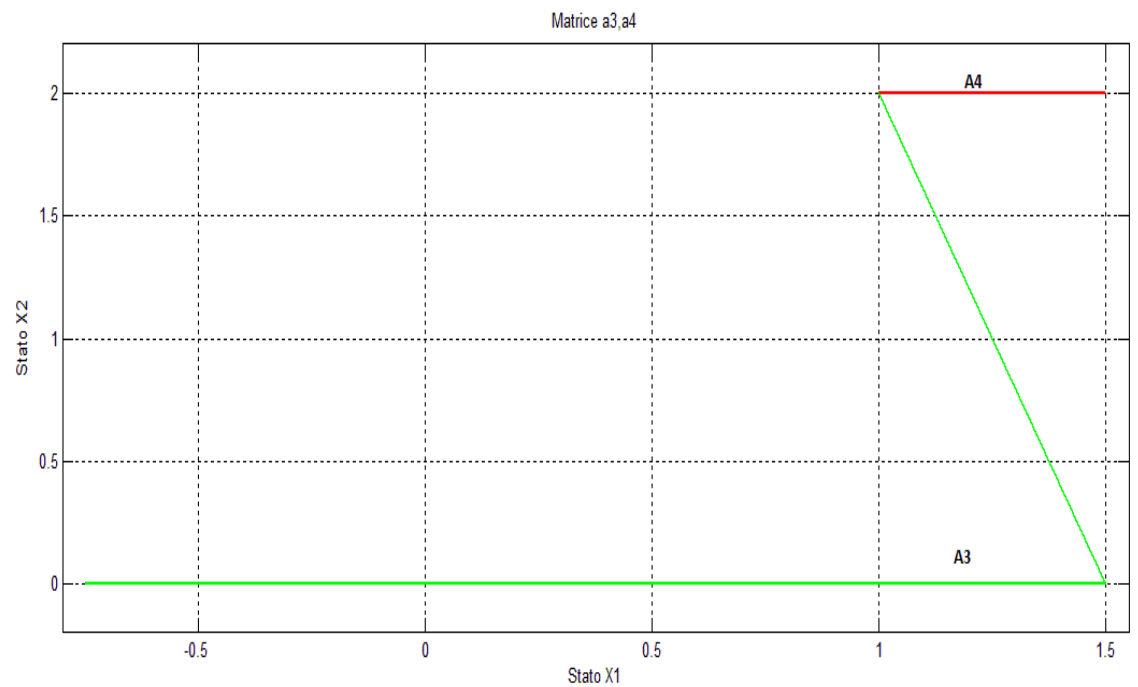
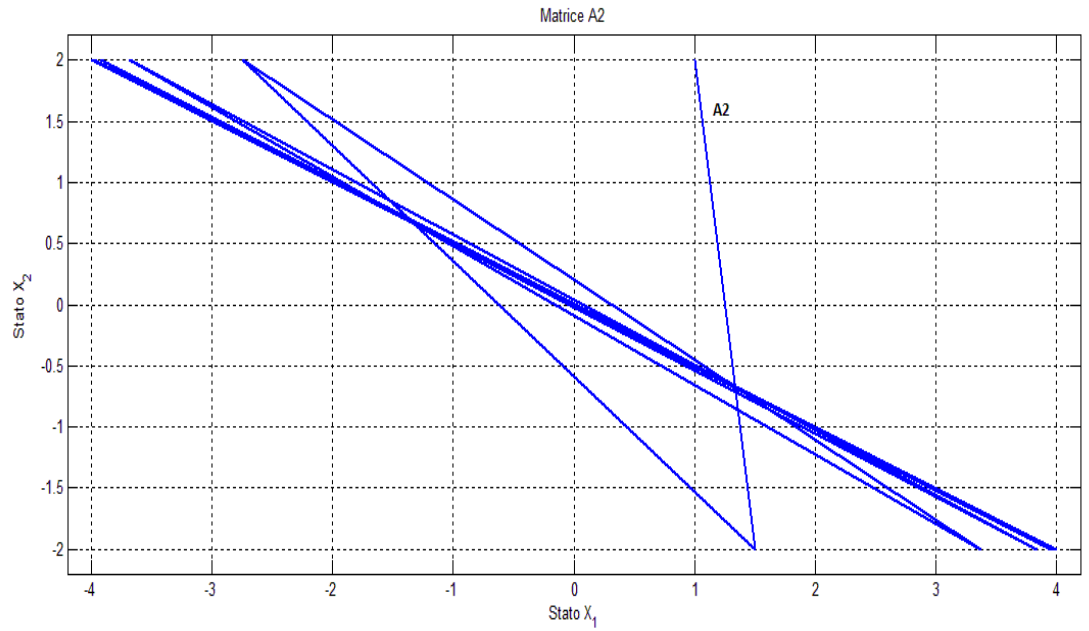




- **Proiezione sul piano degli stati X_1 e X_2 (tempo discreto)**

Dai grafici si vede che le proiezioni delle evoluzioni degli stati X_1 e X_2 sono stabili nei casi cui è soddisfatta la condizione di asintotica stabilità, cioè per il sistema avente come matrice di stato A_3 .





• Script Matlab

```
% Tempo discreto
```

```
B = [1; 1];
```

```
C = [1, 3];
```

```
D = [1];
```

```
x0 = [1; 2];
```

```
A1 = [-0.5 1 ; 0 -2];
```

```
A2 = [-0.5 1 ; 0 -1];
```

```
A3 = [-0.5 1 ; 0 0];
```

```
A4 = [-0.5 1 ; 0 1];
```

```
T = 0:1:20;
```

```

% INGRESSO NULLO
U = (0*T);

SYS1 = ss(A1,B,C,D,-1);
[YS1,TS1,XS1] = lsim(SYS1,U,T,x0) ;

SYS2 = ss(A2,B,C,D,-1);
[YS2,TS2,XS2] = lsim(SYS2,U,T,x0);

SYS3 = ss(A3,B,C,D,-1);
[YS3,TS3,XS3] = lsim(SYS3,U,T,x0);

SYS4 = ss(A4,B,C,D,-1);
[YS4,TS4,XS4] = lsim(SYS4,U,T,x0);

% EVOLUZIONE DELLO STATO X1

figure(13), plot(TS3,XS3(:,1),'g',TS4,XS4(:,1),' b'),grid on,
title('Evoluzione dello stato x_1');
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

figure(12), plot(TS2,XS2(:,1),'b'),grid on,
title('Evoluzione dello stato x_1 A2');
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

figure(11), plot(TS1,XS1(:,1),'b'), grid on, zoom on,
title('Evoluzione dello stato x_1'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

% EVOLUZIONE DELLO STATO X2

figure(23), plot(TS3,XS3(:,2),'g',TS4,XS4(:,2)),grid on,
title('Evoluzione dello stato x_2');
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

figure(22), plot(TS2,XS2(:,2),'b'),grid on,
title('Evoluzione dello stato x_2');

figure(21), plot(TS1,XS1(:,2),'b'), grid on, zoom on,
title('Evoluzione dello stato x_2'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

% Proiezione di X2 su X1

figure(1),plot(XS4(:,1),XS4(:,2),'r',XS3(:,1),XS3(:,2),'g'), grid on,
title ('Matrice A3,A4'), xlabel ('Stato X_1'), ylabel ('Stato X_2'),

figure(2),plot (XS1(:,1),XS1(:,2),'b'), grid on ,
title('Matrice A1'), xlabel ('Stato X_1'), ylabel ('Stato X_2'),

figure(3),plot (XS2(:,1),XS2(:,2),'b'), grid on ,
title('Matrice A2'), xlabel ('Stato X_1'), ylabel ('Stato X_2'),

```