

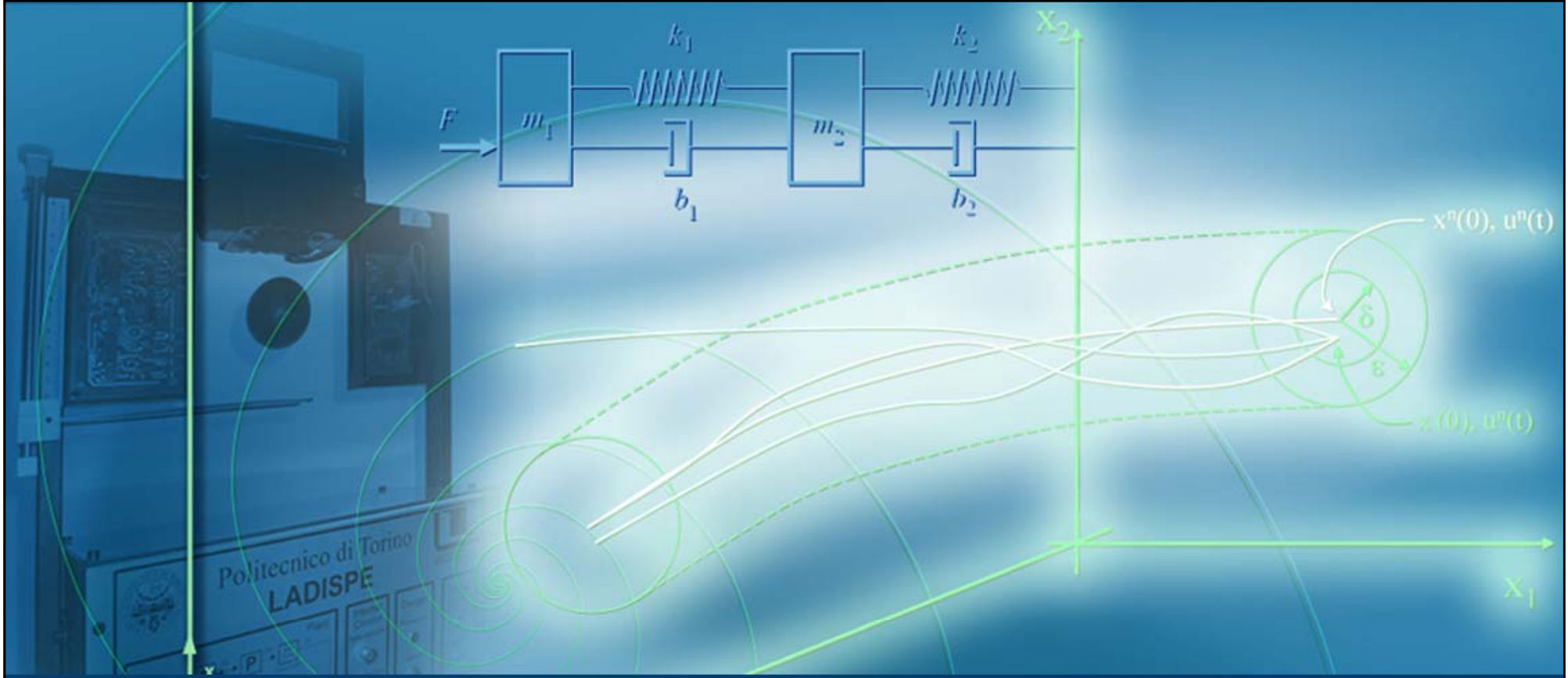
Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

$$y(t) = Cx(t)$$

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

- Modi naturali di un sistema dinamico
- Analisi modale
- Esercizio 1
- Costante di tempo
- Esercizio 2



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Modi naturali di un sistema dinamico

$$y(t) = Cx(t)$$

Analisi del movimento libero (1/3)

- Vogliamo studiare le caratteristiche del movimento libero $x_\ell(t)$ di un sistema dinamico LTI TC di ordine n descritto dall'equazione di stato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Dalla formula di Lagrange risulta che il movimento libero è:

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0_-)$$

con $x(0_-) \in \mathbb{R}^n$ stato iniziale noto

$$y(t) = Cx(t)$$

Analisi del movimento libero (2/3)

- Se per semplicità supponiamo che:
 - La matrice A abbia n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reali e distinti
 - A sia diagonale
- La matrice esponenziale e^{At} è data da:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Analisi del movimento libero (3/3)

► In tal caso, l'espressione del movimento libero è:

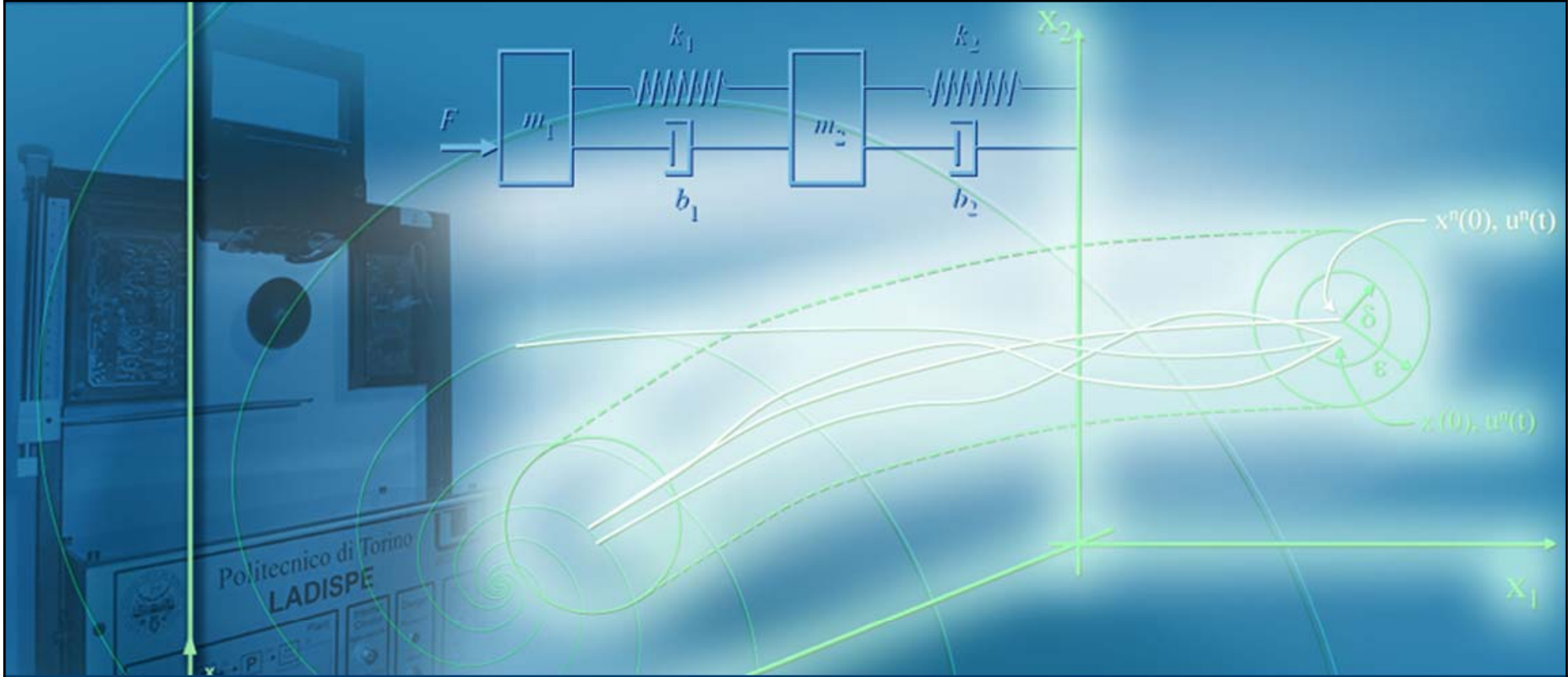
$$x_l(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{At}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0_-) \\ x_2(0_-) \\ \vdots \\ x_n(0_-) \end{bmatrix}}_{x(0_-)} = \begin{bmatrix} x_1(0_-)e^{\lambda_1 t} \\ x_2(0_-)e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ x_n(0_-)e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

► Si nota che l' i -esima componente del movimento libero dipende dalla funzione $e^{\lambda_i t}$

$$y(t) = Cx(t)$$

Modi naturali

- Ogni funzione del tipo $m_i(t) = e^{\lambda_i t}$ è detta **modo naturale** (o **modo proprio**) del sistema associato all'autovalore λ_i
- In generale, le espressioni analitiche dei modi naturali $m_i(t)$ non sono di forma semplicemente esponenziale
- Infatti, possono variare a seconda che gli autovalori siano reali o complessi ed inoltre dalla loro molteplicità



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Analisi modale

$$y(t) = Cx(t)$$

Analisi modale: definizione

- Lo studio delle comportamento dei modi naturali in base alle caratteristiche degli autovalori associati va sotto il nome di **analisi modale del sistema**
- In particolare, l'**analisi modale** studia il comportamento dei **modi naturali** per $t \rightarrow \infty$
- L'analisi modale permette quindi di studiare le caratteristiche del movimento libero di un sistema dinamico

$$y(t) = Cx(t)$$

Classificazione dei modi naturali

► Si dice che un dato modo naturale $m(t)$ definito per $t \geq 0$ è

● **Convergente** se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |m(t)| = 0$$

● **Limitato** se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall t \geq 0$ risulti:

$$0 < |m(t)| \leq M < \infty$$

● **Divergente** se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |m(t)| = \infty$$

Caso generale: impostazione

- Per evidenziare i modi naturali associati alle varie tipologie di autovalori occorre calcolare e^{At}
- Il calcolo di e^{At} è immediato solo se A è diagonale
- In ogni caso, è possibile studiare le proprietà del movimento libero perché si dimostra che:

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$$

- T è una matrice costante
- \tilde{A} è una matrice in forma di Jordan (diagonale oppure diagonale a blocchi)

Caso generale: forma di Jordan

- La forma di Jordan di una matrice quadrata avente q autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ di molteplicità μ_1, \dots, μ_q è una matrice diagonale a blocchi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{A}_q \end{bmatrix}$$

- Le sottomatrici \tilde{A}_i , dette **blocchi di Jordan**, sono matrici quadrate associate all' i -esimo autovalore λ_i , e aventi dimensione $\mu_i \times \mu_i$

Caso generale: matrice esponenziale

- La matrice esponenziale di una matrice in forma di Jordan è data da una forma diagonale a blocchi del tipo:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{A}_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\tilde{A}_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\tilde{A}_q t} \end{bmatrix}$$

dove i blocchi $e^{\tilde{A}_i t}$ hanno forma diversa a seconda delle caratteristiche degli autovalori di A

Caso generale: movimento libero

➤ Si ha:

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0_-) = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} x(0_-)$$

➤ Poiché T e $x(0_-)$ sono costituite da numeri reali

- L'espressione analitica di $x_\ell(t)$ è una combinazione lineare degli elementi della matrice $e^{\tilde{A}t}$
- La forma semplificata di \tilde{A} (e quindi di $e^{\tilde{A}t}$) permette di mettere immediatamente in evidenza la forma dei modi naturali
- Si possono così analizzare in modo più immediato le proprietà qualitative del movimento libero $x_\ell(t)$

$$y(t) = Cx(t)$$

Caso generale: analisi modale

- Studieremo ora, come cambia la forma dei blocchi della matrice $e^{\tilde{A}t}$ al variare delle caratteristiche degli autovalori della matrice A
- Questo permetterà di:
 - Definire la forma dei modi naturali in base alle proprietà degli autovalori
 - Eseguire l'analisi modale del sistema
- Studieremo i seguenti casi:
 - Autovalori con molteplicità unitaria
 - Autovalori con molteplicità maggiore di uno

$$y(t) = Cx(t)$$

Autovalori \mathbb{R} semplici

- I blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti ad autovalori reali e distinti hanno forma diagonale:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

e danno origine a modi naturali esponenziali del tipo $e^{\lambda_i t}$

$$y(t) = Cx(t)$$

Autovalori \mathbb{R} semplici: analisi modale

- Il modo naturale $e^{\lambda t}$, associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità unitaria, risulta:
 - **Esponenzialmente convergente** se $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$
(Es. e^{-t})
 - **Limitato (costante)** se $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$
(Es. $e^{-0t} = 1$)
 - **Esponenzialmente divergente** se $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$
(Es. e^t)

Autovalori \mathbb{C} semplici

- I blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi coniugati con molteplicità unitaria del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega$ hanno la forma:

$$e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

e danno origine a modi naturali del tipo $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$

$$y(t) = Cx(t)$$

Autovalori \mathbb{C} semplici: analisi modale

► I modi naturali della forma $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$, associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati di molteplicità semplice del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega$ sono:

- **Esponenzialmente convergenti**
se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma < 0$ (Es. $e^{-t} \sin(5t)$)
- **Limitati (oscillanti)**
se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma = 0$, $\operatorname{Im}(\lambda) = \omega \neq 0$ (Es. $\sin(5t)$)
- **Esponenzialmente divergenti**
se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma > 0$ (Es. $e^t \sin(5t)$)

Autovalori \mathbb{R} multipli

- I blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti ad un autovalore reale λ con molteplicità μ sono matrici diagonali a blocchi contenenti sottomatrici del tipo:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{\mu'-1}}{(\mu'-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{\mu'-2}}{(\mu'-2)!} e^{\lambda t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

e danno origine a $\mu' \leq \mu$ modi naturali del tipo $t^{\mu'-1}e^{\lambda t}, \dots, te^{\lambda t}, e^{\lambda t}$

Autovalori \mathbb{R} multipli: analisi modale

- I μ' modi naturali della forma $t^{\mu'-1}e^{\lambda t}, \dots, te^{\lambda t}$, associati ad un autovalore reale λ con molteplicità μ sono:
- **Esponenzialmente convergenti** se $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$
(Es. te^{-t})
 - **Polinomialmente divergenti** se $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$
(Es. $te^{0t} = t$)
 - **Esponenzialmente divergenti** se $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$
(Es. $te^{0t} = t, te^t$)

Autovalori \mathbb{C} multipli

- I blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi $\lambda = \sigma \pm j\omega$ con molteplicità μ hanno una forma analoga al caso reale \Rightarrow danno origine in generale a $\mu' \leq \mu$ modi naturali del tipo:

$$t^{\mu'-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t), \dots, t e^{\sigma t} \cos(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

$$t^{\mu'-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t), \dots, t e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \sin(\omega t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Autovalori \mathbb{C} multipli: analisi modale

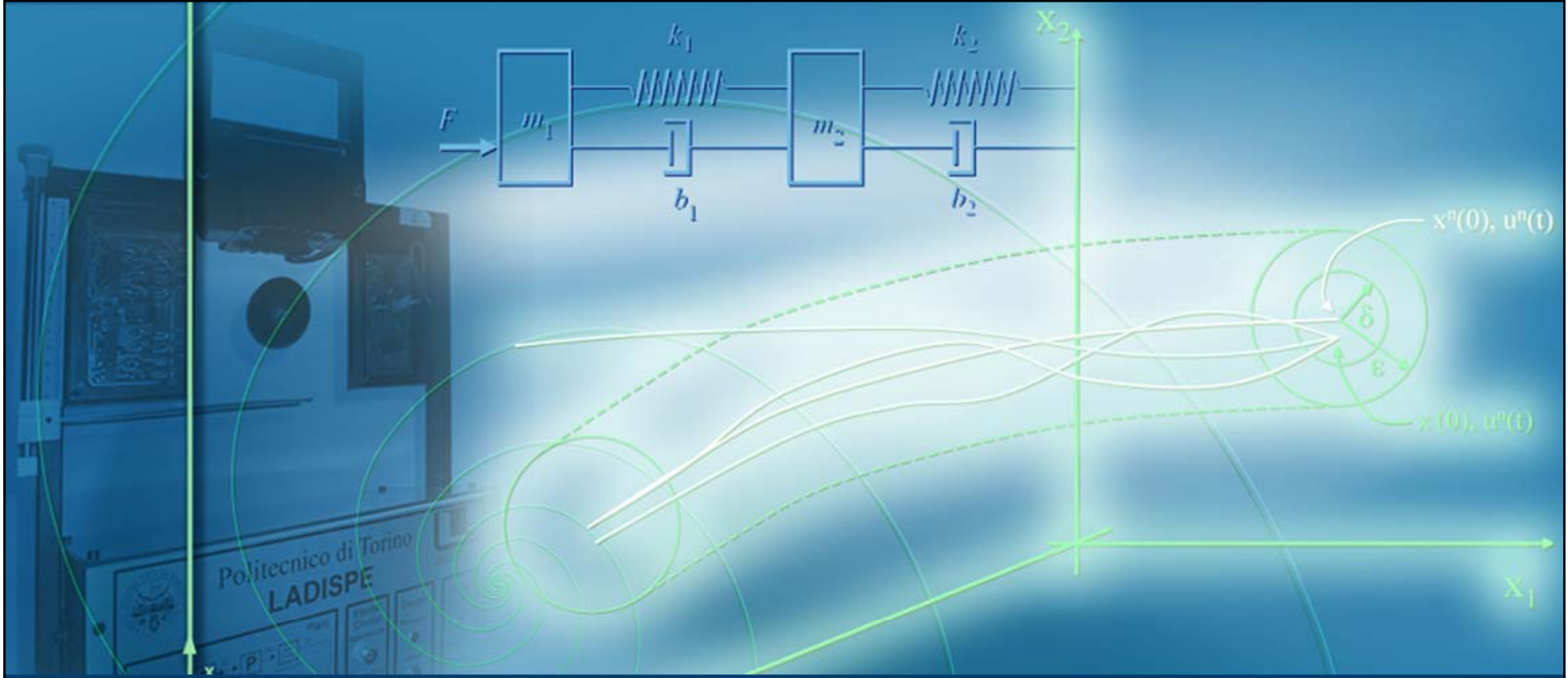
► I μ' modi naturali della forma

$$t^{\mu'-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t), \dots, e^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

$$t^{\mu'-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t), \dots, t e^{\sigma t} \sin(\omega t)$$

associati ad una coppia di autovalori complessi del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega$ con molteplicità μ sono:

- **Esponenzialmente convergenti** se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma < 0$ (Es. $t e^{-t} \sin(5t)$)
- **Polinomialmente divergenti** se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma = 0$ (Es. $t \sin(5t)$)
- **Esponenzialmente divergenti** se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma > 0$ (Es. $t e^t \sin(5t)$)



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Esercizio 1

$$y(t) = Cx(t)$$

Formulazione del problema

- Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determinare le caratteristiche dei modi naturali

$$y(t) = Cx(t)$$

Soluzione: calcolo dei modi naturali

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

- Poiché la matrice A risulta triangolare, gli autovalori si leggono direttamente sulla diagonale e sono:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 0$$

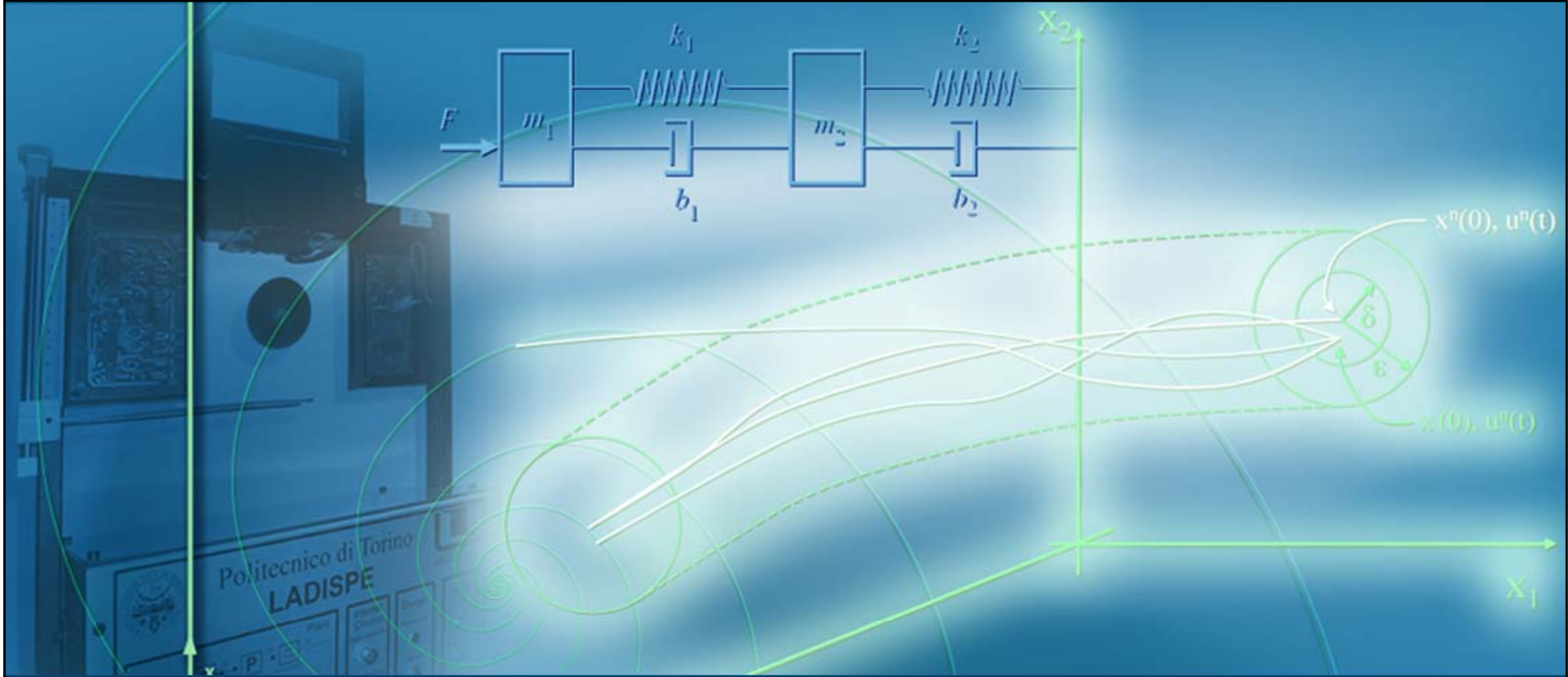
- Gli autovalori sono reali e distinti pertanto i corrispondenti modi naturali sono rispettivamente:

$$\lambda_1 \rightarrow e^{-t}, \lambda_2 \rightarrow e^{-2t}, \lambda_3 \rightarrow e^{4t}, \lambda_4 \rightarrow e^{0t}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Soluzione: analisi modale

- $e^{-t} \rightarrow$ modo esponenzialmente convergente
- $e^{-2t} \rightarrow$ modo esponenzialmente convergente
- $e^{4t} \rightarrow$ modo esponenzialmente divergente
- $e^{0t} = 1 \rightarrow$ modo limitato costante



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Costante di tempo

Definizione

- Per un modo convergente associato all'autovalore λ con $\text{Re}(\lambda) < 0$ si definisce **costante di tempo** la quantità:

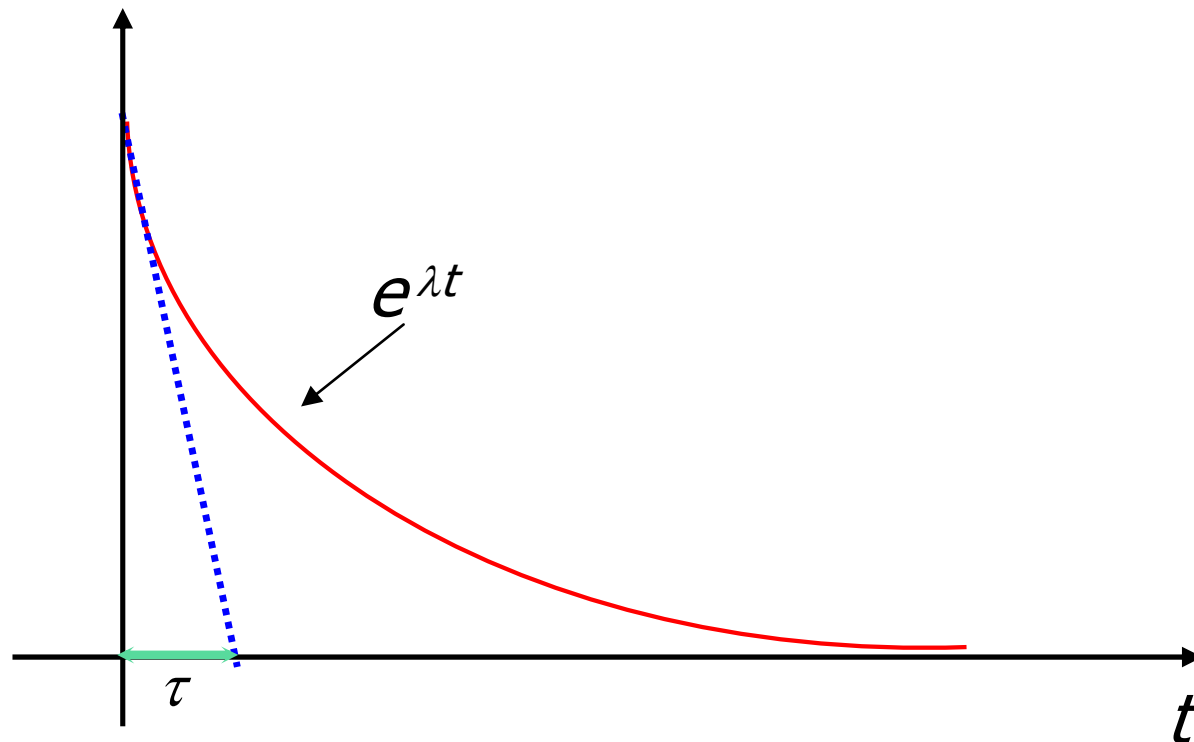
$$\tau = \left| \frac{1}{\text{Re}(\lambda)} \right|$$

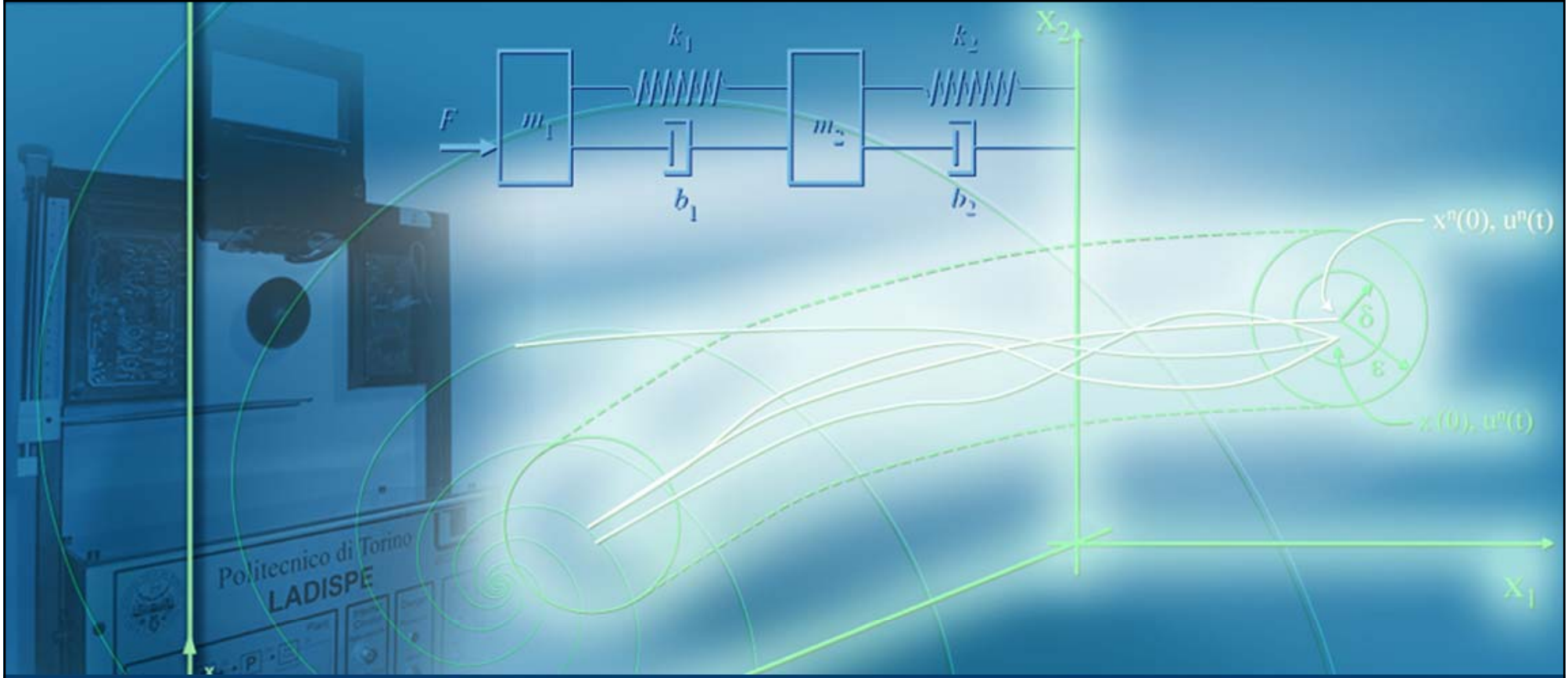
- La costante di tempo τ rappresenta una misura della velocità di convergenza a zero del modo
- Ad esempio, il modo e^{-2t} (costante di tempo 0.5 s) converge a zero più rapidamente del modo e^{-t} (costante di tempo 1 s)

$$y(t) = Cx(t)$$

Interpretazione grafica

- La **costante di tempo** può anche essere valutata graficamente considerando l'intersezione con l'asse dei tempi della retta tangente al grafico di $e^{\lambda t}$ ($e^{\sigma t}$) passante per il punto di ascissa nulla





Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Esercizio 2

$$y(t) = Cx(t)$$

Formulazione del problema

- Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

- Determinare le caratteristiche dei modi naturali e, se appropriato, calcolare le corrispondenti costanti di tempo

$$y(t) = Cx(t)$$

Soluzione: calcolo degli autovalori

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

The matrix A is shown with two submatrices highlighted in red circles. The top-left 2x2 submatrix is labeled A_{11} and the bottom-right 2x2 submatrix is labeled A_{22} .

- Poiché la matrice A risulta triangolare a blocchi gli autovalori sono quelli delle sottomatrici A_{11} e A_{22}
- Per la sottomatrice A_{11} si ha $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 5j$
- Per la sottomatrice A_{22} si ha $\lambda_3 = -1, \lambda_4 = -3$

$$y(t) = Cx(t)$$

Soluzione: analisi modale

- Il sistema presenta quattro autovalori distinti a parte reale negativa di cui due complessi coniugati.
- I modi naturali corrispondenti sono:
 - $\lambda_{1,2} \rightarrow e^{-0.5t}\cos(5t), e^{-0.5t}\sin(5t) \rightarrow$ modi esponenzialmente convergenti
 - $\lambda_3 \rightarrow e^{-t} \rightarrow$ modo esponenzialmente convergente
 - $\lambda_4 \rightarrow e^{-3t} \rightarrow$ modo esponenzialmente convergente
- Poiché tutti i modi naturali sono convergenti si possono calcolare le costanti di tempo

$$y(t) = Cx(t)$$

Soluzione: costanti di tempo

- Per i modi $e^{-0.5t}\cos(5t)$, $e^{-0.5t}\sin(5t)$ si ha:

$$\tau_{1,2} = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_{1,2})} \right| = \left| \frac{1}{-0.5} \right| = 2 \text{ s}$$

- Per il modo e^{-t} si ha:

$$\tau_3 = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_3)} \right| = \left| \frac{1}{-1} \right| = 1 \text{ s}$$

- Per il modo e^{-3t} si ha:

$$\tau_4 = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_4)} \right| = \left| \frac{1}{-3} \right| = 0.\bar{3} \text{ s}$$