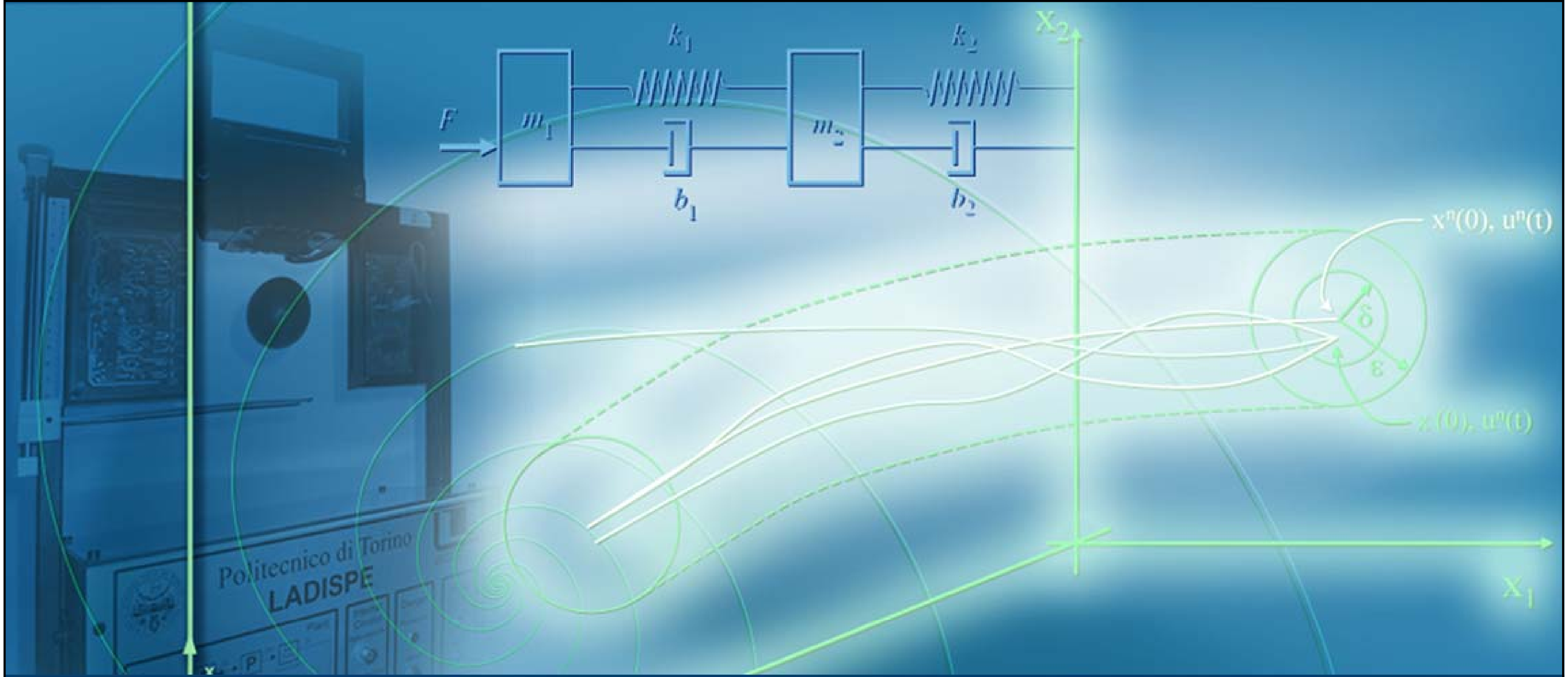
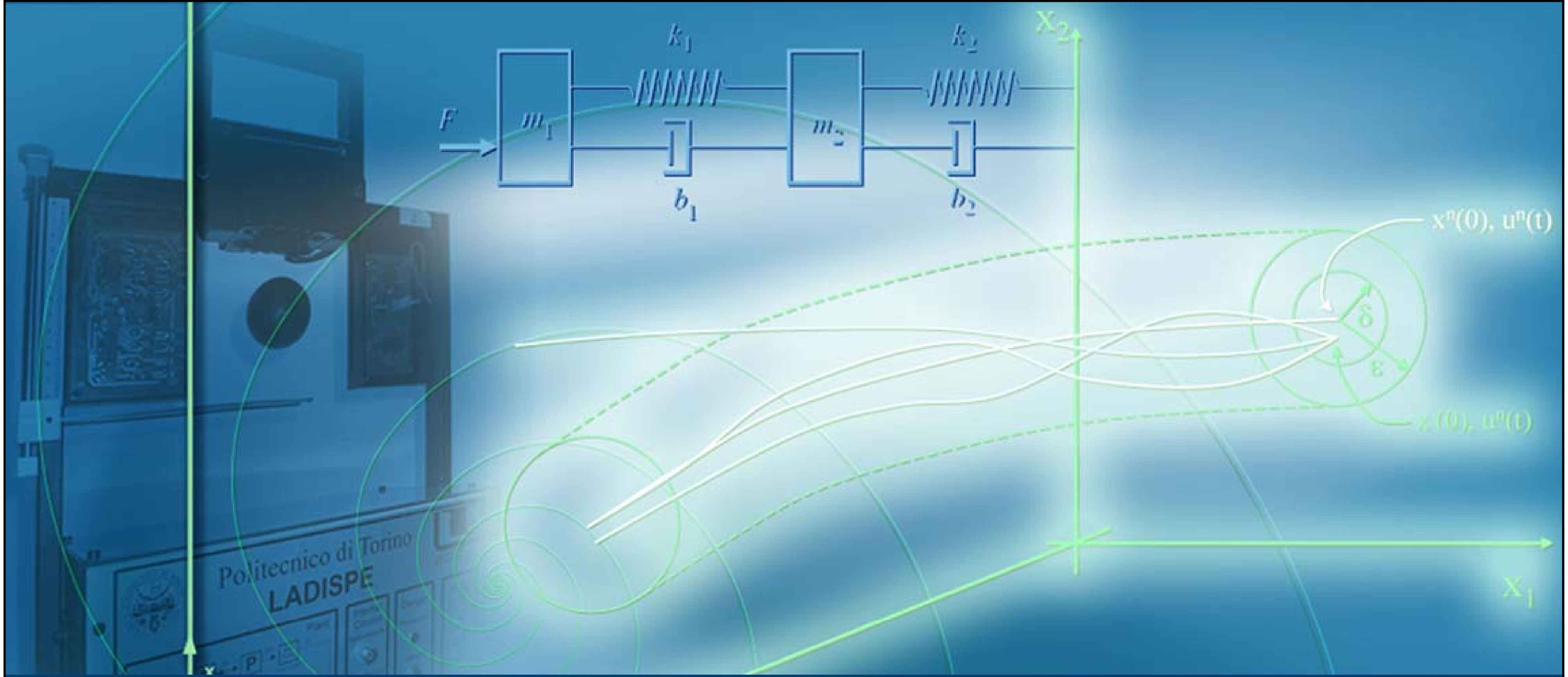


Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Soluzione per sistemi dinamici LTI TD

Soluzione per sistemi LTI TD

- Soluzione nel dominio del tempo
- Soluzione nel dominio della frequenza
- Esempio di soluzione



Soluzione per sistemi LTI TD

Soluzione nel dominio del tempo

Descrizione di sistemi dinamici LTI TD

- Il comportamento dinamico di un sistema LTI TD è descritto dalle equazioni di ingresso – stato – uscita:

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) + D\,u(k) \end{aligned}}$$

- Si ricorda che:
  - $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$
  - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$

Il movimento di sistemi dinamici LTI TD

- Utilizzando le equazioni di stato:

$$\boxed{x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)}$$

si vuole calcolare l'espressione $x(k)$ del **movimento dello stato** a partire da uno stato iniziale $x(0) = x_0$ noto e a fronte dell'ingresso $u(k)$ noto $\forall k \geq 0$

La formula di Lagrange per il calcolo di $x(k)$

$$\boxed{x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)}$$

- L'espressione di $x(k)$ può essere calcolata in modo iterativo:

$$
\begin{aligned}
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2 x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = \\
&= A^3 x(0) + A^2 Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\vdots \\
x(k) &= A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)
\end{aligned}
$$

La formula per il calcolo di $x(k)$

- L'espressione di $x(k)$ si calcola con la seguente formula:

$$\boxed{\begin{aligned} x(k) &= \underbrace{A^k x(0)}_{x_\ell(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)}_{x_f(k)} = \\ &= x_\ell(k) + x_f(k) \end{aligned}}$$

  - $x_\ell(k)$ → **movimento libero dello stato**
  - $x_f(k)$ → **movimento forzato dello stato**
- Per il calcolo esplicito di $x(k)$ è utile fare ricorso alla **trasformata zeta**

Calcolo del movimento dell'uscita (1/2)

- Il **movimento dell'uscita** (**risposta del sistema**) $y(k)$ si ottiene dalla relazione statica:

$$\boxed{y(k) = C\,x(k) + D\,u(k)}$$

dopo avere sostituito l'espressione di $x(k)$ precedentemente ottenuta:

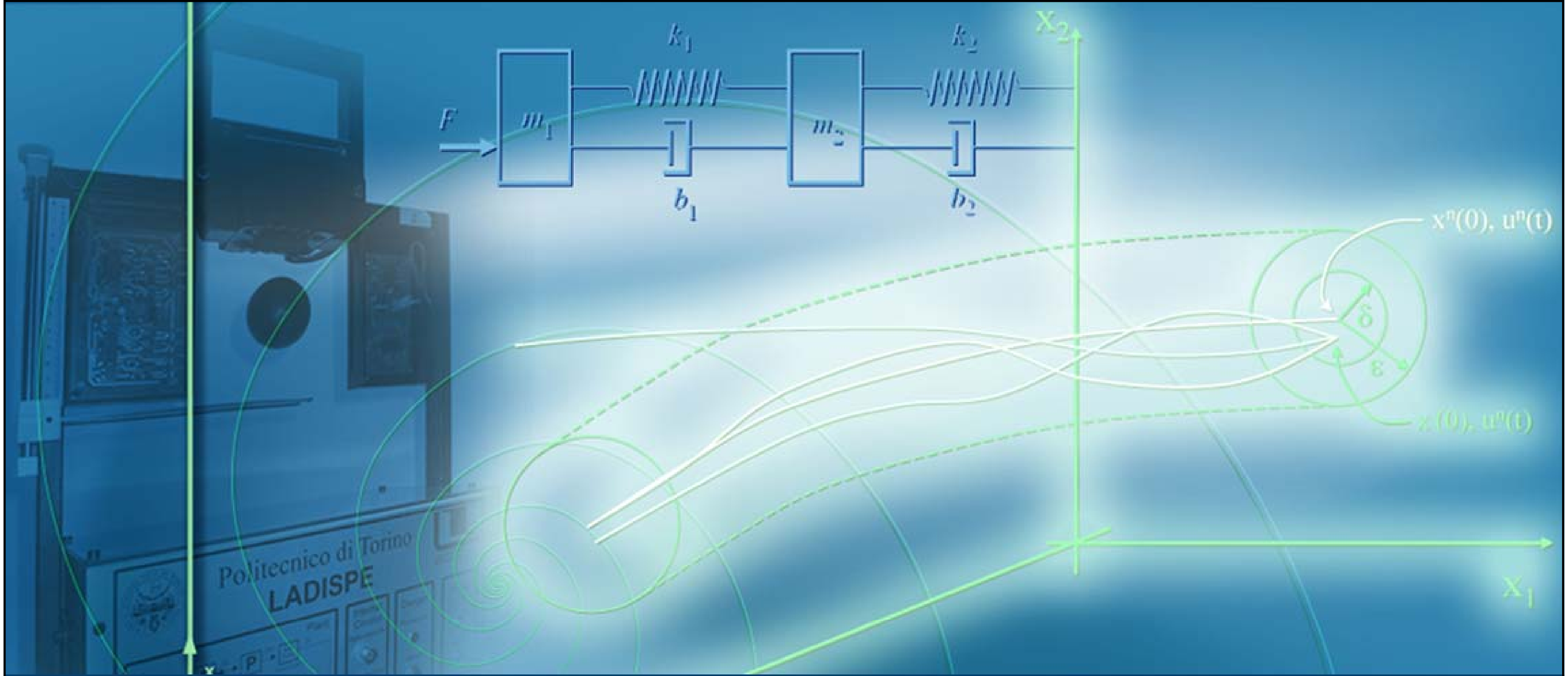
$$\boxed{\begin{aligned} y(k) &= \underbrace{CA^k x(0)}_{y_\ell(k)} + \underbrace{C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) + Du(k)}_{y_f(k)} = \\ &= y_\ell(k) + y_f(k) \end{aligned}}$$

Calcolo del movimento dell'uscita (2/2)

$$y(k) = \underbrace{CA^k x(0)}_{y_\ell(k)} + \underbrace{C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) + Du(k)}_{y_f(k)} =$$
$$= y_\ell(k) + y_f(k)$$

- $y_\ell(k)$ → **movimento libero dell'uscita**
- $y_f(k)$ → **movimento forzato dell'uscita**

- Per il calcolo esplicito di $y(k)$ è utile fare ricorso alla **trasformata zeta**

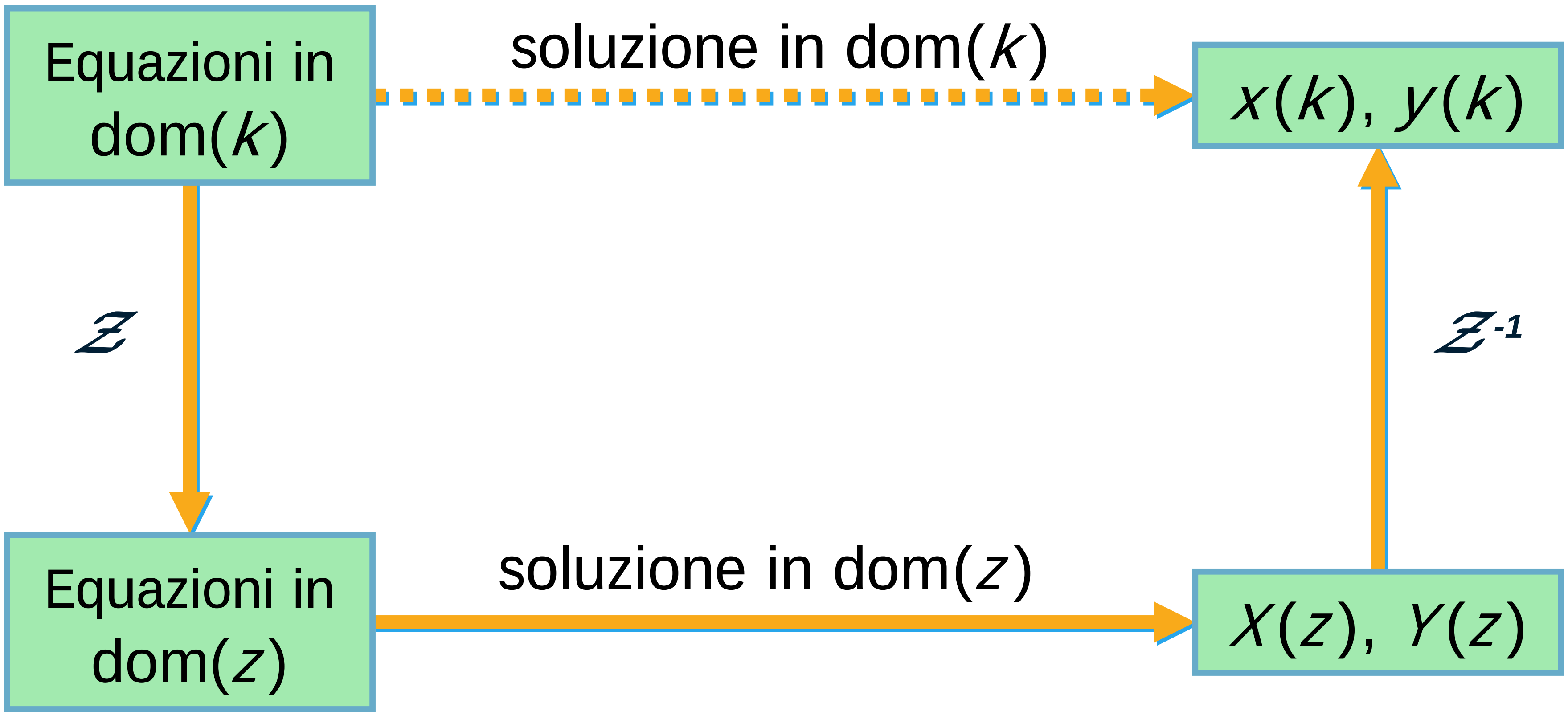


Soluzione per sistemi LTI TD

Soluzione nel dominio della frequenza

Schema della soluzione

- Il calcolo di $x(k)$ e $y(k)$ con la trasformata zeta avviene secondo lo schema:



Calcolo della soluzione (1/4)

- La soluzione nel dominio della frequenza si ottiene trasformando le equazioni di ingresso - stato - uscita:

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}$$

$$\begin{cases} zX(z) - zx(0) = AX(z) + B\,U(z) \\ Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z) \end{cases}$$

e calcolando esplicitamente $X(z)$ e $Y(z)$

Calcolo della soluzione (2/4)

- Per il movimento dello stato si ottiene:

$$X(z) = \underbrace{\overbrace{z\left(zI - A\right)^{-1}}^{H_0^x(z)} x(0)}_{\substack{MOVIMENTO\ LIBERO \\ X_\ell(z)=\mathcal{Z}(x_\ell(k))}} + \underbrace{\overbrace{\left(zI - A\right)^{-1} B}^{H_f^x(z)} U(z)}_{\substack{MOVIMENTO\ FORZATO \\ X_f(z)=\mathcal{Z}(x_f(k))}} =$$

$$= H_0^x(z)x(0) + H_f^x(z)U(z)$$

Calcolo della soluzione (3 / 4)

- Per il movimento dell'uscita si ha:

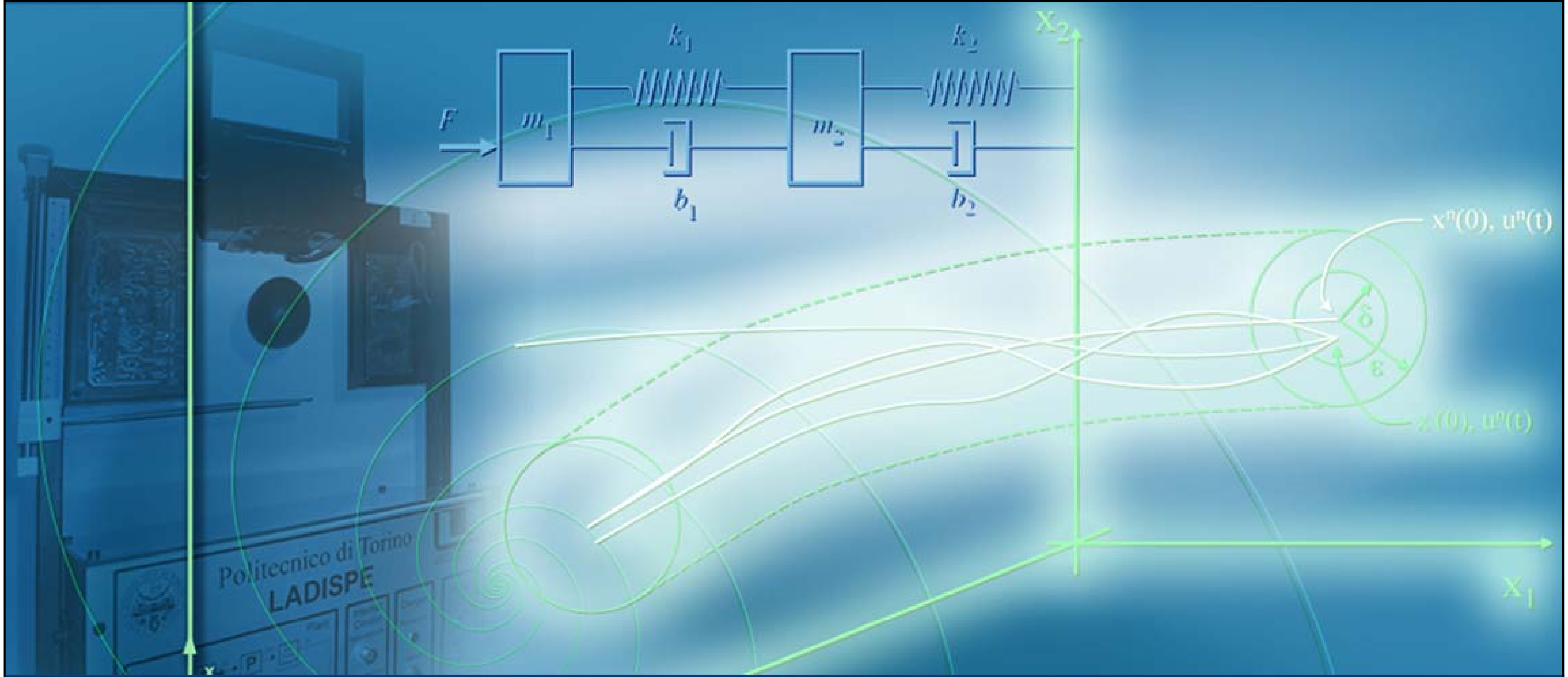
$$Y(z) = \underbrace{\overbrace{zC\left(zI - A\right)^{-1}}^{H_0(z)} x(0)}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA} \\ Y_\ell(z) = \mathcal{Z}(y_\ell(k))}} + \underbrace{\overbrace{\left[C\left(zI - A\right)^{-1} B + D\right]}^{\substack{H(z) \to \text{MATRICE DI} \\ \text{TRASFERIMENTO}}} U(z)}_{\substack{\text{RISPOSTA FORZATA} \\ Y_f(z) = \mathcal{Z}(y_f(k))}}$$

$$= H_0(z)x(0) + H(z)U(z)$$

- $H(z) \rightarrow$ matrice di trasferimento del sistema (legame ingresso uscita)

Calcolo della soluzione (4/4)

- $H^{x}{}_{0}(z)$, $H^{x}{}_{f}(z)$, $H_0(z)$, $H(z)$ sono matrici complesse i cui elementi sono funzioni razionali fratte nella variabile complessa z
- $H(z)$ è la **matrice di trasferimento** (legame tra l'ingresso e l'uscita)
- Per un sistema a p ingressi e q uscite $H(z)$ è una matrice a q righe e p colonne di funzioni razionali fratte della variabile z
- Se $p = q = 1$ (sistema SISO) → $H(z)$ viene detta **funzione di trasferimento**



Soluzione per sistemi LTI TD

Esempio di soluzione

Formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema dinamico LTI TD:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3.5 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k)$$

- Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato $x(k)$ e dell'uscita $y(k)$ nel caso in cui
  - L'ingresso sia un gradino di ampiezza 2 ($u(k) = 2\varepsilon(k)$)
  - Le condizioni iniziali siano: $x(0) = [1 \;\; -2]^T$

Procedimento di soluzione

- I passi da seguire sono:
  - Calcolo della soluzione $X(z)$ nel dominio della trasformata zeta
  - Calcolo della scomposizione in fratti semplici (e dei corrispondenti residui) di $X(z)$
  - Calcolo di $x(k)$ tramite antitrasformazione della scomposizione in fratti semplici di $X(z)$
  - Calcolo di $y(k)$ tramite la relazione statica $y(k) = Cx(k)$

Impostazione dei calcoli in dom(z)

- Soluzione nel dominio della trasformata zeta:

$$X(z) = \underbrace{z(zI - A)^{-1} x(0)}_{X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - A)^{-1} BU(z)}_{X_f(z)}$$

- Con:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3.5 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, U(z) = \frac{2z}{z-1}$$

Passi della soluzione in dom(z)

$$\boxed{X(z) = \underbrace{z\left(zI - A\right)^{-1} x(0)}_{X_\ell(z)} + \underbrace{\left(zI - A\right)^{-1} BU(z)}_{X_f(z)}}$$

- Per calcolare $X(z)$ procediamo con i seguenti passi:
  - Calcolo del termine $(z\,I - A\,)^{-1}$
  - Calcolo del movimento libero $X_\ell(z)$
  - Calcolo del movimento forzato $X_f(z)$
  - Calcolo di $X(z)$ come $X(z) = X_\ell(z) + X_f(z)$
  - Scomposizione i fratti semplici di $X(z)$

Calcolo di $(z\,I - A)^{-1}$

- Ricordiamo che: $(zI - A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(zI - A)} Adj\,(zI - A)$

$$(zI - A)^{-1} = \left[\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3.5 & -0.5 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} z-3 & 0 \\ 3.5 & z+0.5 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(z-3)(z+0.5)}}_{\det(zI-A)} \underbrace{\begin{bmatrix} z+0.5 & 0 \\ -3.5 & z-3 \end{bmatrix}}_{Adj\,(zI-A)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-3} & 0 \\ \dfrac{-3.5}{(z-3)(z+0.5)} & \dfrac{1}{z+0.5} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $X_\ell(z)$

$$X_\ell(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) = z\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-3} & 0 \\ \dfrac{-3.5}{(z-3)(z+0.5)} & \dfrac{1}{z+0.5} \end{bmatrix}}_{(zI-A)^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{x(0)} =$$

$$= z\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-3} \\ \dfrac{-2z+2.5}{(z-3)(z+0.5)} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $X_f(z)$

$$X_f(z) = (zI - A)^{-1} B U(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-3} & 0 \\ \dfrac{-3.5}{(z-3)(z+0.5)} & \dfrac{1}{z+0.5} \end{bmatrix}}_{(zI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} U(z) =$$

$$\underset{U(z)=\frac{2z}{z-1}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-3} \\ \dfrac{2z-9.5}{(z-3)(z+0.5)} \end{bmatrix} \frac{2z}{z-1} = z \begin{bmatrix} \dfrac{2}{(z-3)(z-1)} \\ \dfrac{4z-19}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $X(z)$

- $X(z)$ viene calcolato come somma di $X_\ell(z)$ e $X_f(z)$

$$X(z) = X_\ell(z) + X_f(z) = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{(z-3)(z-1)} \\ \dfrac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} \end{bmatrix}$$

Scomposizione in fratti semplici di $X(z)$

$$X(z) = z\begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{(z-3)(z-1)} \\ \dfrac{-2z^2+8.5z-21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} \dfrac{R_1^{(1)}}{z-3}+\dfrac{R_2^{(1)}}{z-1} \\ \dfrac{R_1^{(2)}}{z-3}+\dfrac{R_2^{(2)}}{z+0.5}+\dfrac{R_3^{(2)}}{z-1} \end{bmatrix}$$

Calcolo dei residui per $X_1(z)$

$$\tilde{X}_1(z) = \frac{X_1(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} = \frac{R_1^{(1)}}{z-3} + \frac{R_2^{(1)}}{z-1}$$

$$R_1^{(1)} = \lim_{z\to 3}(z-3)\tilde{X}_1(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{z+1}{(z-3)(z-1)} = 2$$

$$R_2^{(1)} = \lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{X}_1(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z+1}{(z-3)(z-1)} = -1$$

$$\to \tilde{X}_1(z) = \frac{2}{z-3} - \frac{1}{z-1}$$

$$\to X_1(z) = z\tilde{X}_1(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z-1}$$

Calcolo dei residui per $X_2(z)$

$$\tilde{X}_2(z) = \frac{X_2(z)}{z} = \frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} = \frac{R_1^{(2)}}{z-3} + \frac{R_2^{(2)}}{z+0.5} + \frac{R_3^{(2)}}{z-1}$$

$$R_1^{(2)} = \lim_{z\to 3}(z-3)\tilde{X}_2(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} = -2$$

$$R_2^{(2)} = \lim_{z\to -0.5}(z+0.5)\tilde{X}_2(z) = \lim_{z\to -0.5}(z+0.5)\frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} = -5$$

$$R_3^{(2)} = \lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{X}_2(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{-2z^2 + 8.5z - 21.5}{(z-3)(z+0.5)(z-1)} = 5$$

$$\to \tilde{X}_2(z) = -\frac{2}{z-3} - \frac{5}{z+0.5} + \frac{5}{z-1}$$

$$\to X_2(z) = z\tilde{X}_2(z) = -\frac{2z}{z-3} - \frac{5z}{z+0.5} + \frac{5z}{z-1}$$

Risultato $x(k)$

- Pertanto:

$$X(z) = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2z}{z-3} - \dfrac{z}{z-1} \\ -\dfrac{2z}{z-3} - \dfrac{5z}{z+0.5} + \dfrac{5z}{z-1} \end{bmatrix}$$

- Si può procedere con l'antitrasformazione ricordando che $Ra^k \varepsilon(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{Rz}{z-a}\right\}$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^k - 1 \\ -2 \cdot 3^k - 5 \cdot (-0.5)^k + 5 \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

Risultato $y(k)$

- L'espressione del movimento dell'uscita si ottiene dalla relazione $y(k) = C\,x(k)$:

$$y(k) = Cx(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^k - 1 \\ -2 \cdot 3^k - 5 \cdot (-0.5)^k + 5 \end{bmatrix} \varepsilon(k) =$$

$$= \left(4 \cdot 3^k + 5 \cdot (-0.5)^k - 6 \right) \varepsilon(k)$$