

Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols

Diagramma polare



Diagramma polare

- La risposta in frequenza si analizza tramite

$$\begin{aligned} G(s) \Big|_{s=j\omega} &= G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \\ &= M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \leq \omega < \infty \end{aligned}$$

- Un'altra rappresentazione grafica di $G(j\omega)$ si ottiene riportando $M(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ su un riferimento polare del piano complesso



Diagramma polare di $G(j\omega)$



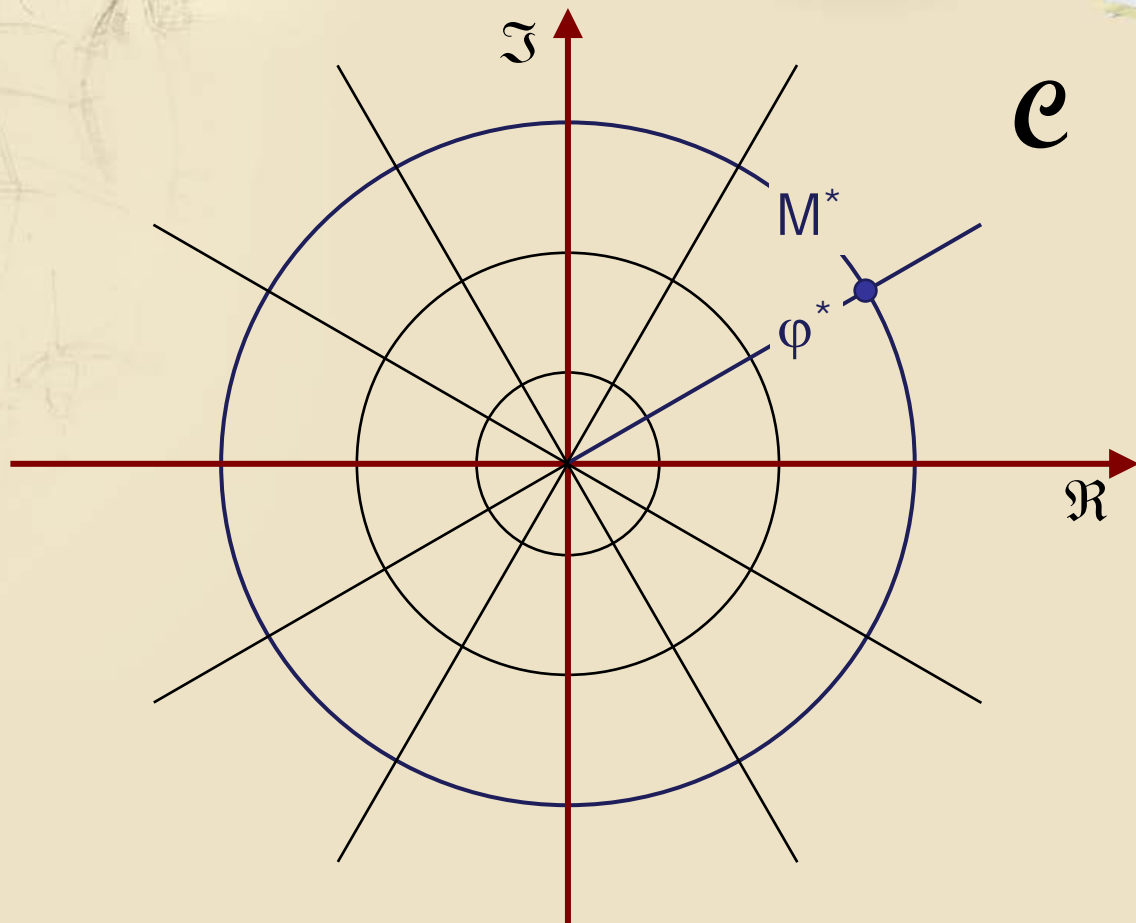
Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (1/2)

$$\begin{aligned}\rightarrow G(j\omega)\Big|_{\omega=\omega^*} &= |G(j\omega^*)| \cdot e^{j\angle G(j\omega^*)} = \\ &= M(\omega^*) \cdot e^{j\varphi(\omega^*)} = \\ &= M^* \cdot e^{j\varphi^*}\end{aligned}$$

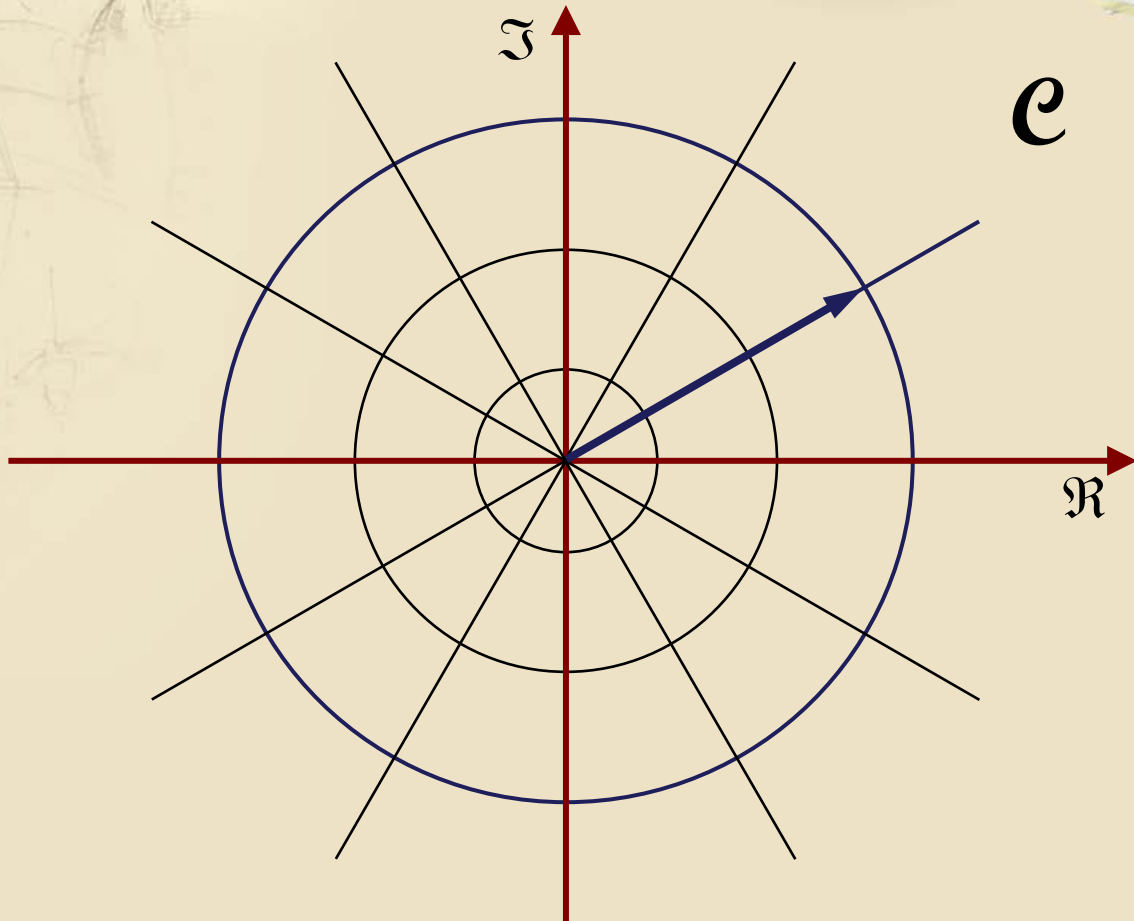


Punto sul piano complesso

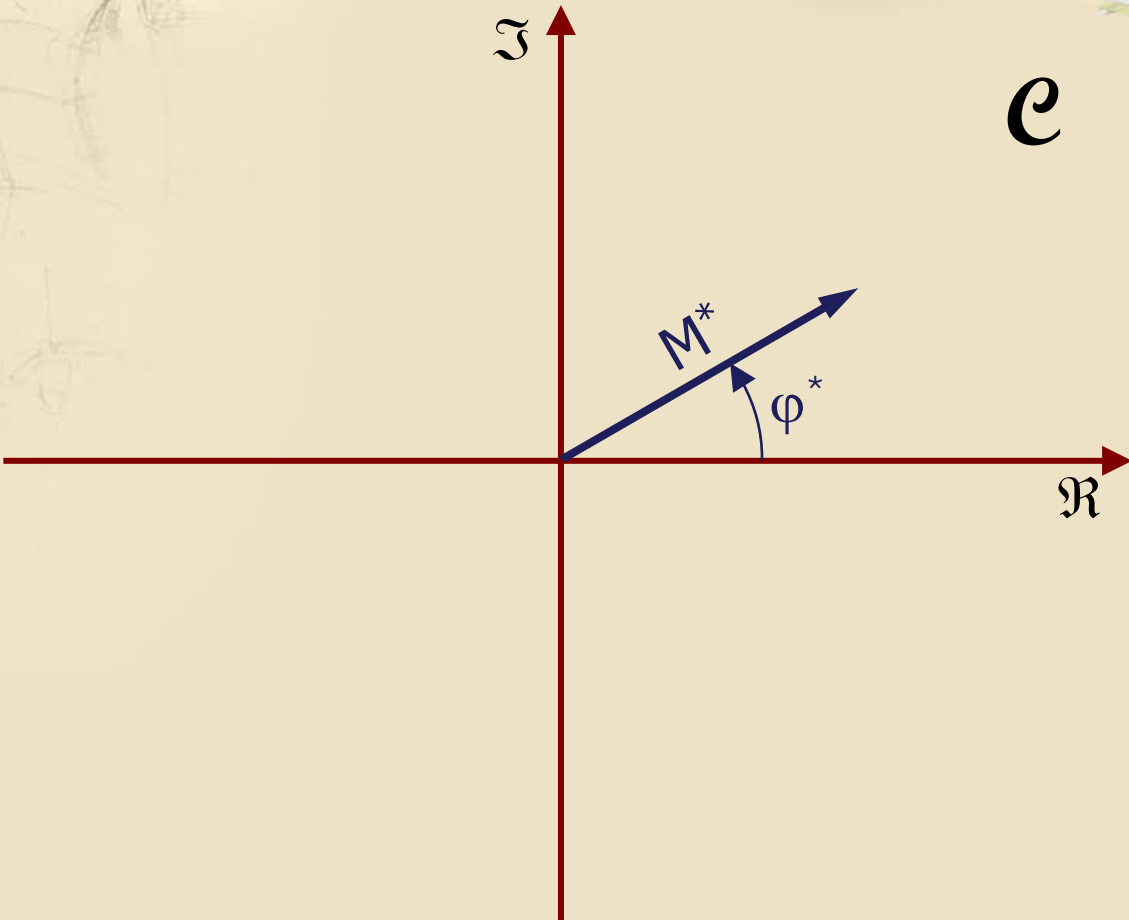
Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)



Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)



Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)





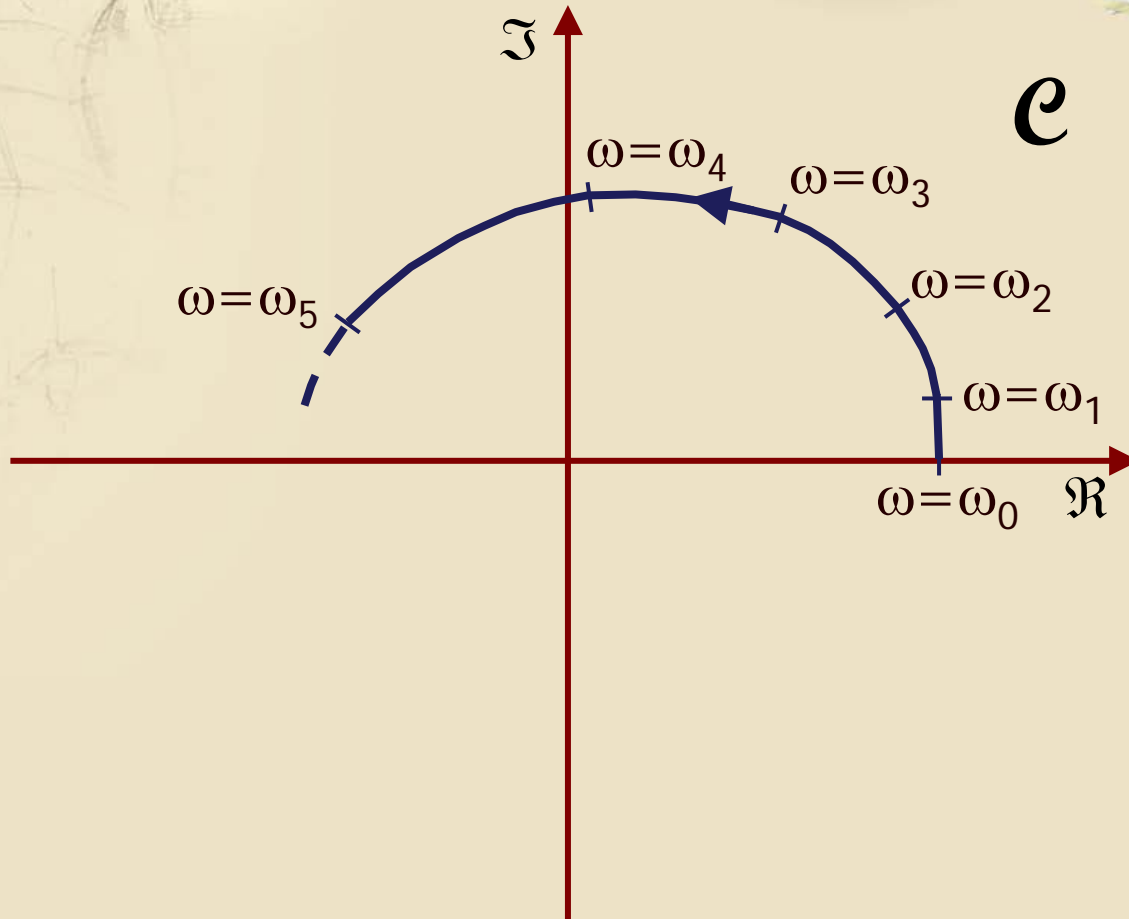
Rappresentazione polare per $\omega \in (0, \infty)$ (1/2)

► $G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} =$
 $= M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{per } \omega \in (0, \infty)$



Luogo di punti sul piano complesso

Rappresentazione polare per $\omega \in (0, \infty)$ (2/2)





Proprietà importanti (1/4)

- ▶ Per sistemi senza poli nell'origine il diagramma polare parte ($\omega \rightarrow 0^+$) da un punto sull'asse reale; la fdt in **BF** è infatti approssimabile con una costante
- ▶ Per sistemi con "i" poli nell'origine il diagramma polare parte da un punto infinitamente lontano dall'origine, con fase

$$\varphi|_{\omega \rightarrow 0^+} = i \cdot \frac{-\pi}{2} + \text{arg}(K)$$

0 0 $\pm\pi$

la fdt in BF è infatti approssimabile con $\frac{K}{s^i}$



Proprietà importanti (2/4)

- Per sistemi con poli nell'origine:

$$G_a(j\omega)\Big|_{\omega \rightarrow 0^+} = \Re(\omega)\Big|_{\omega \rightarrow 0^+} + j\Im(\omega)\Big|_{\omega \rightarrow 0^+} \cong \frac{K_{\Re}}{\omega^n} + j\frac{K_{\Im}}{\omega^m}$$

con $n \geq 0$, $m > 0$ oppure $n > 0$, $m \geq 0$

- Il quadrante di partenza ($\omega \rightarrow 0^+$) dipende dai segni di K_{\Re} e di K_{\Im}



Proprietà importanti (3/4)

► Per sistemi con poli nell'origine il diagramma polare per $\omega \rightarrow 0^+$ assume un particolare andamento asintotico. Esempi:

● $n=0, m>0 \rightarrow$ asintoto=retta verticale, $\Re = K_{\Re}$

● $n>0, m=0 \rightarrow$ asintoto=retta orizzontale, $\Im = K_{\Im}$

● $n=4, m=2 \rightarrow$ asintoto=parabola, $\Re = \frac{K_{\Re}}{K_{\Im}^2} \Im^2$

● forma generale dell'asintoto: $\Re = H \Im^{n/m}$ o $\Im = \bar{H} \Re^{n/m}$



Proprietà importanti (4/4)

- Per sistemi strettamente propri il diagramma polare termina ($\omega \rightarrow \infty$) nell'origine (modulo nullo) con fase multipla di $\pm 90^\circ$; la **fdt in AF** è infatti approssimabile con

$$\frac{H}{s^k}, \quad k \doteq \text{n.o poli} - \text{n.o zeri} > 0$$

- Per sistemi non strettamente propri il diagramma polare termina (perpendicolarmente) in un punto sull'asse reale diverso dall'origine; in tal caso la fdt in AF è infatti approssimabile con una costante



Tracciamento qualitativo (1/3)

- È possibile tracciare **qualitativamente** l'andamento del diagramma polare a partire dai DdB della funzione:
 - Si determina il comportamento iniziale del diagramma polare per $\omega \rightarrow 0^+$:
 - tenendo conto dell'eventuale presenza di poli nell'origine
 - calcolando la fase iniziale
 - in caso di poli nell'origine, determinando il quadrante di partenza (senza calcolare esplicitamente l'asintoto) dal comportamento della fase in BF (crescente o decrescente rispetto al valore asintotico iniziale)



Tracciamento qualitativo (2/3)

- Si determina il comportamento finale del diagramma polare per $\omega \rightarrow \infty$
 - per i sistemi strettamente propri il diagramma termina nell'origine con fase corrispondente al valore per $\omega \rightarrow \infty$, calcolabile anche come:

$$\varphi|_{\omega \rightarrow \infty} = \varphi|_{\omega \rightarrow 0^+} - 90^\circ \cdot (n_n + m_p) + 90^\circ \cdot (n_p + m_n)$$

ove:

n_n = # poli a parte reale ≤ 0 (esclusi poli nell'origine)

n_p = # poli a parte reale > 0

m_n = # zeri a parte reale ≤ 0

m_p = # zeri a parte reale > 0



Tracciamento qualitativo (3/3)

- Si completa l'andamento qualitativo del diagramma polare da $\omega \rightarrow 0^+$ a $\omega \rightarrow \infty$, sulla base del comportamento di modulo e fase riportato nei DdB



Esempio 1 (1/5)

$$\rightarrow G(s) = \frac{200(s + 0.1)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$

$$\rightarrow G(s)|_{\text{BF}} \approx \frac{2}{s} \rightarrow -j \frac{2}{\omega}$$

$$\rightarrow G(s)|_{\text{AF}} \approx \frac{200}{s^3} \rightarrow (-j)^3 \frac{200}{\omega^3}$$

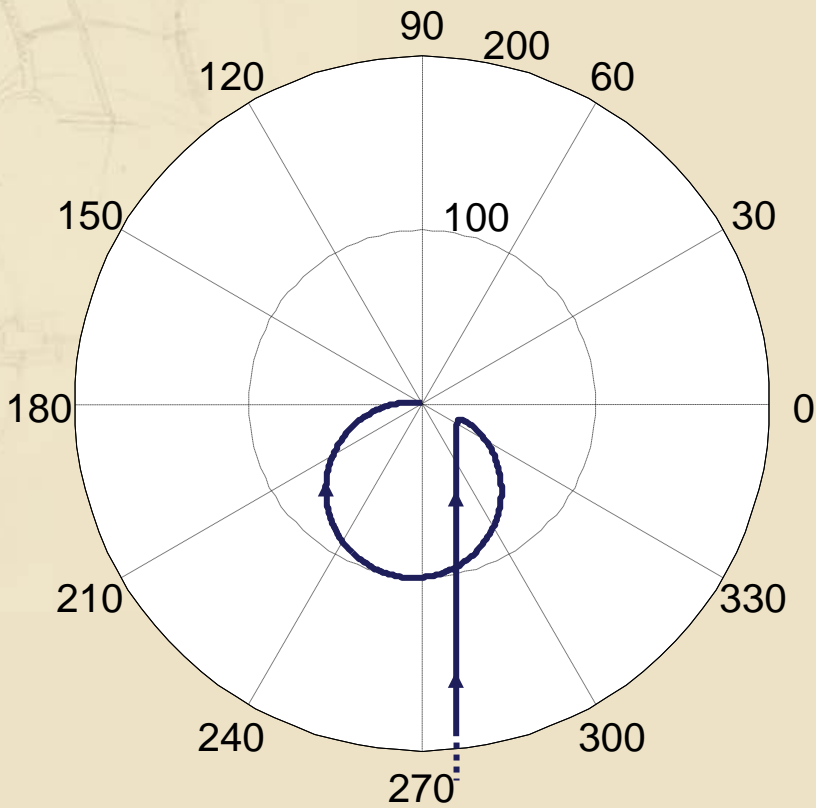


Esempio 1 (2/5)

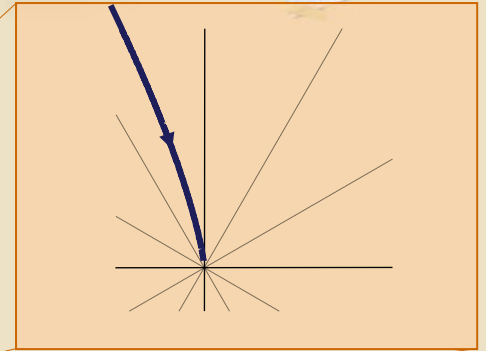
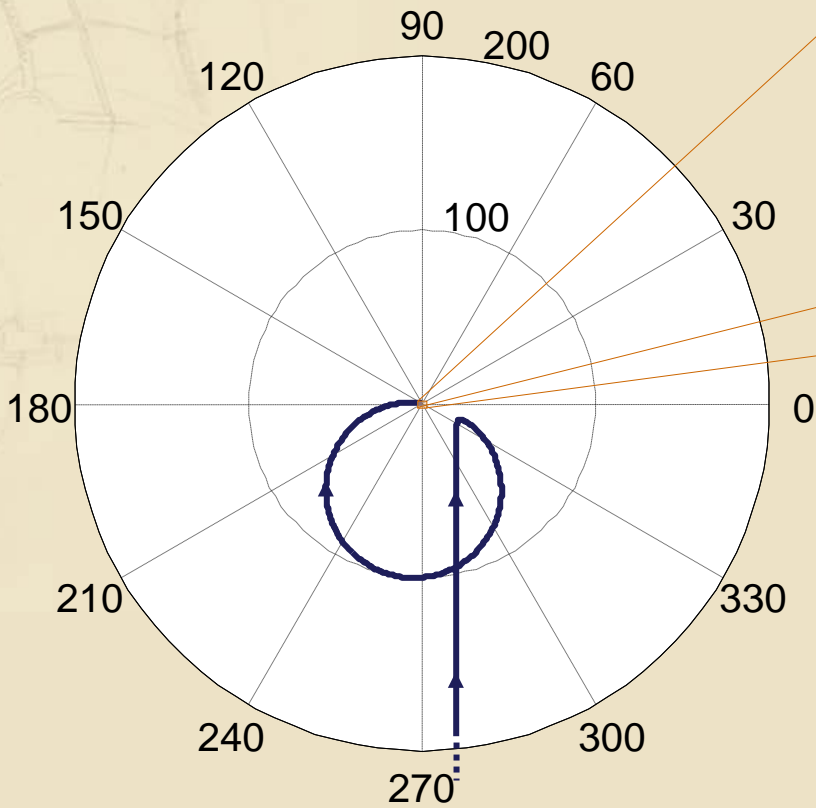
$$\rightarrow G(s)|_{\text{BF}} \cong \frac{2}{s} \rightarrow -j \frac{2}{\omega} + 19.4 \rightarrow \begin{cases} n = 0 & K_{\mathcal{R}} = 19.4 \\ m = 1 & K_{\mathcal{S}} = -2 \end{cases}$$

asintoto = retta verticale

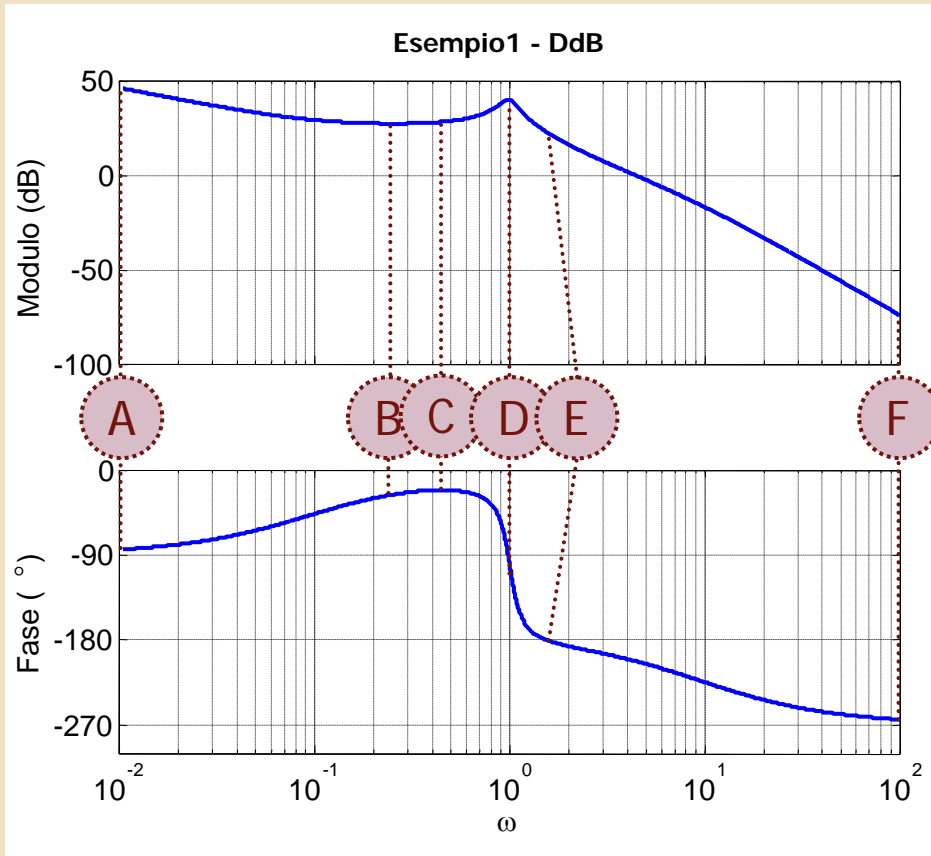
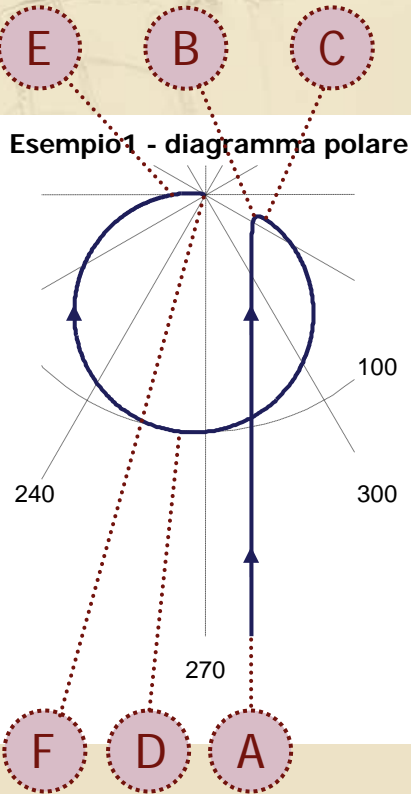
Esempio 1 (3/5)



Esempio 1 (3/5)



Esempio 1 (4/5)





Esempio 2 (1/5)

$$\rightarrow G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

$$\rightarrow G(s)|_{BF} \cong \frac{1.25}{s^2} \rightarrow (-j)^2 \frac{1.25}{\omega^2}$$

$$\rightarrow G(s)|_{AF} \cong \frac{10}{s^3} \rightarrow (-j)^3 \frac{10}{\omega^3}$$



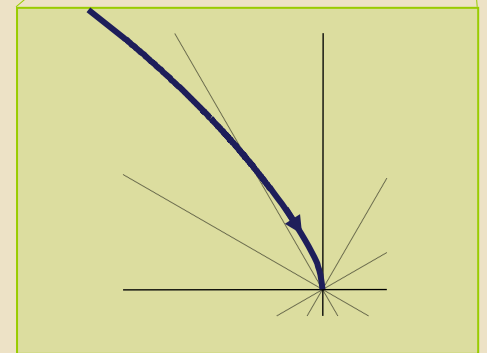
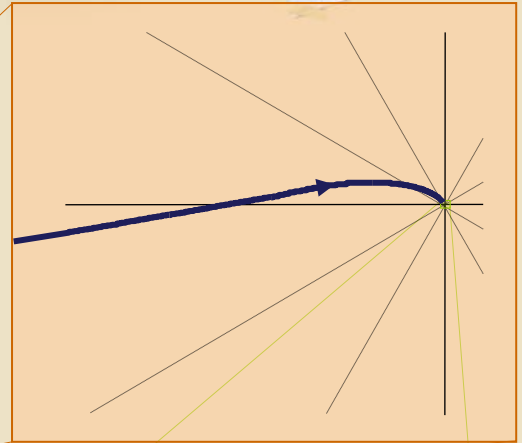
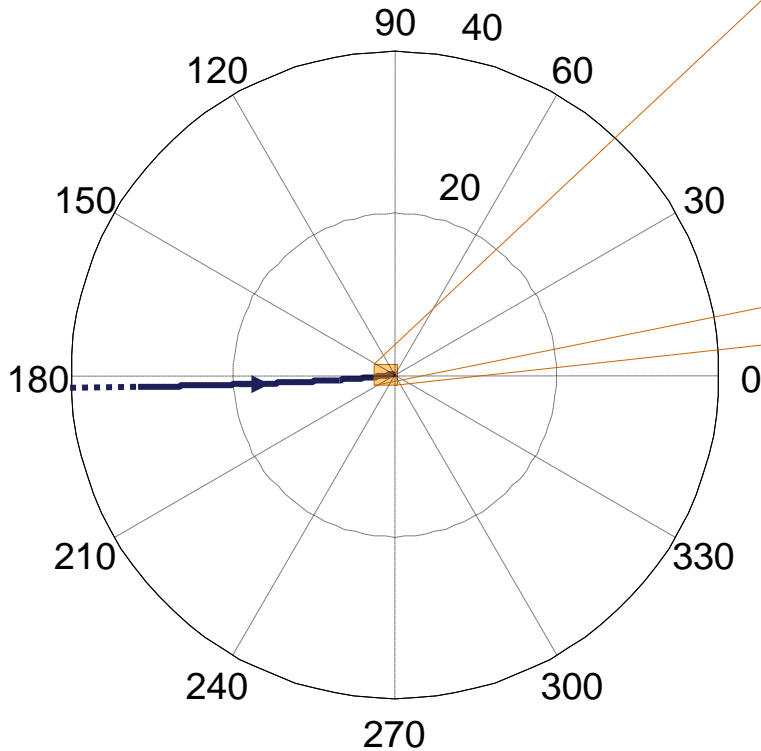
Esempio 2 (2/5)

$$\rightarrow G(s)|_{\text{BF}} \cong \frac{1.25}{s^2} \rightarrow (-j)^2 \frac{1.25}{\omega^2} + j \frac{-1}{3.2\omega} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \\ K_{\Re} = -1.25 \\ K_{\Im} = -1/3.2 \end{cases}$$

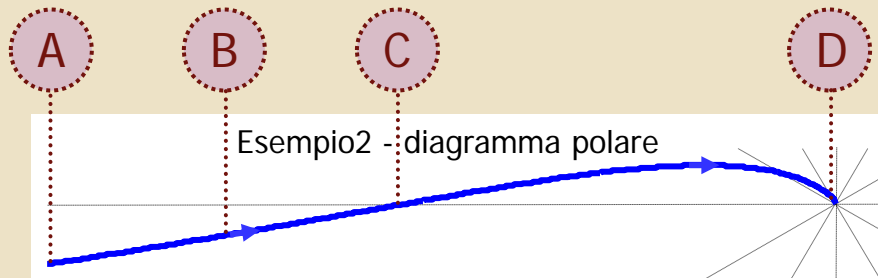
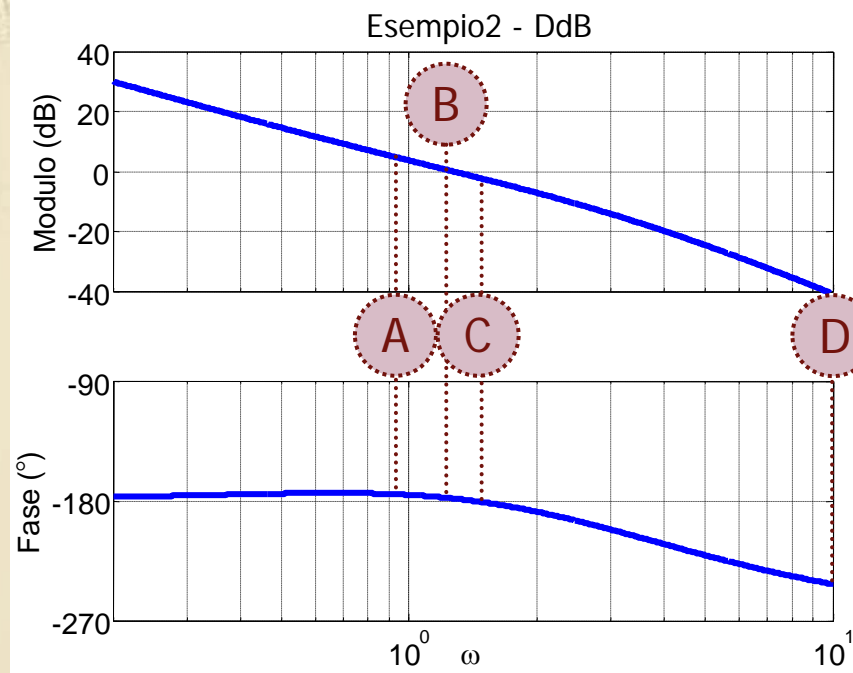
asintoto = parabola

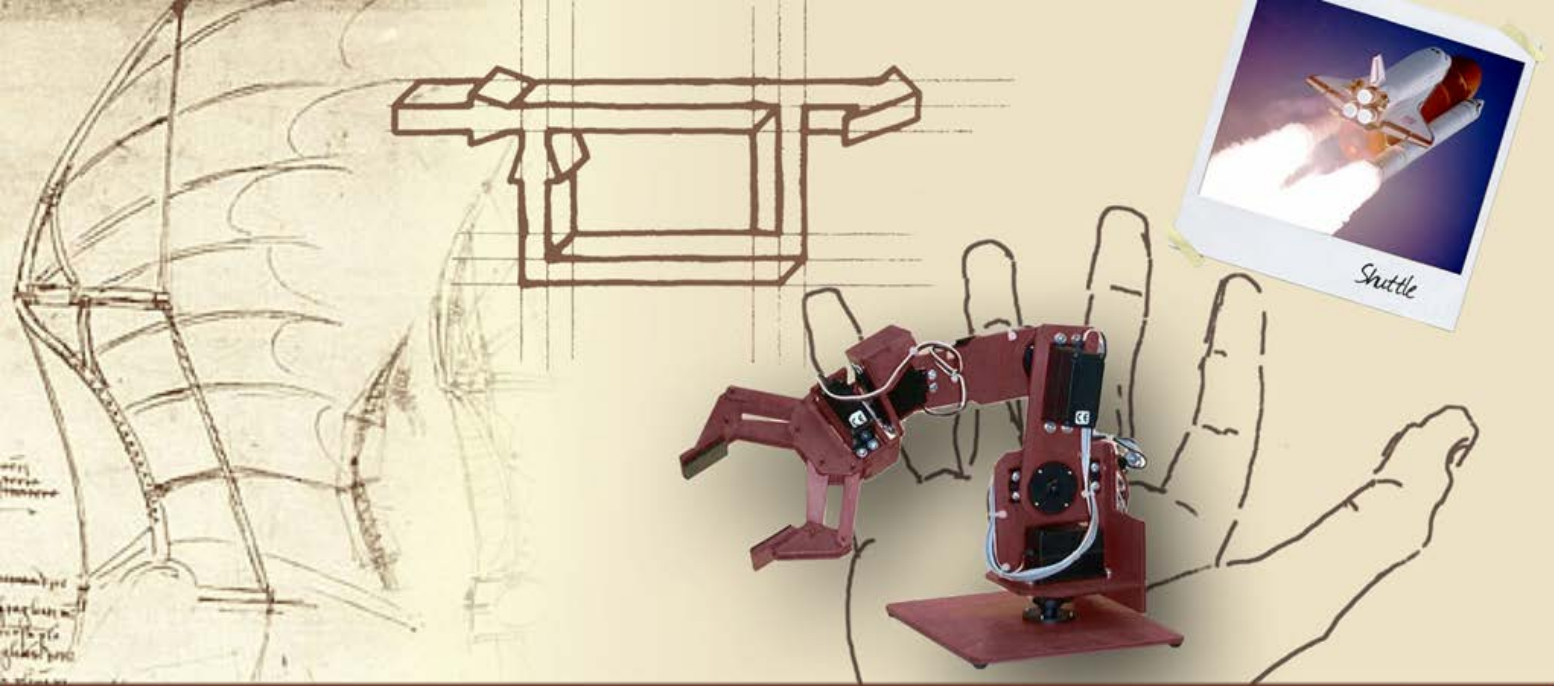
$$\Re = -12.8 \Im^2$$

Esempio 2 (3/5)



Esempio 2 (4/5)





Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols

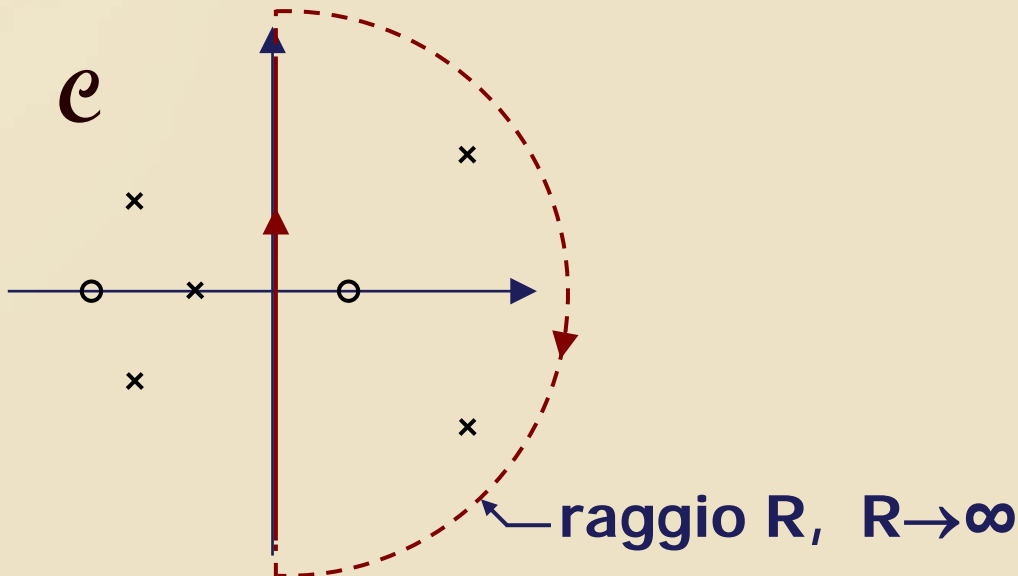
Diagramma di Nyquist

Dominio della variabile s (1/3)

- Il diagramma di Nyquist (**DdN**) di una fdt consiste nella rappresentazione grafica sul piano \mathcal{C} di

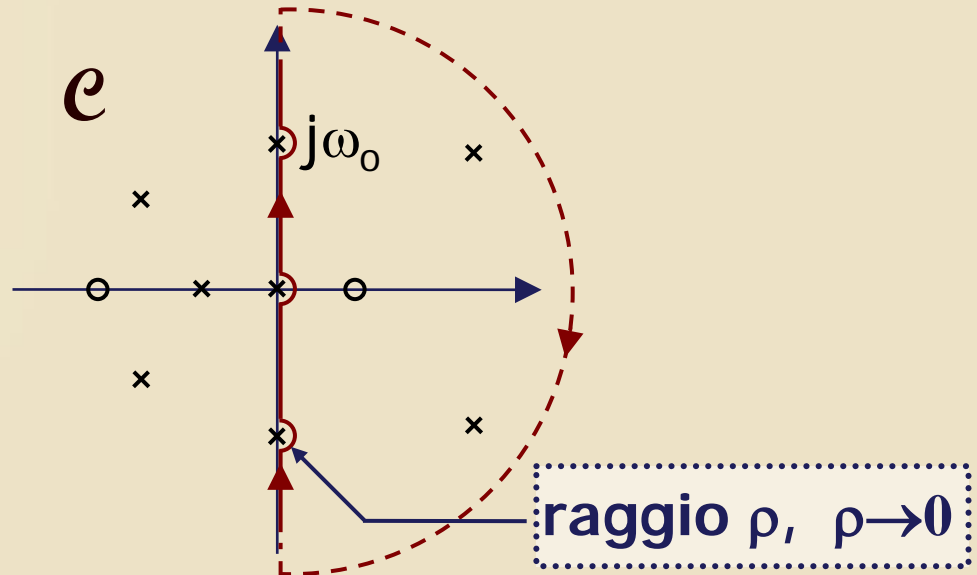
$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) \text{ per } \omega \in (-\infty, +\infty)$$

- Variazione della variabile indipendente:



Dominio della variabile s (2/3)

- Problema: presenza di poli sull'asse immaginario
- Soluzione:



- Naturalmente

$$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (j\omega_0 + \rho e^{j\alpha}), \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow G(s) \rightarrow \infty$$



Dominio della variabile s (3/3)

- ▶ s varia su un “**percorso chiuso**”



- ▶ Il **DdN** della $G(s)$ **consiste in un luogo di punti** anche esso **chiuso**



Poli sull'asse immaginario (1/3)

- ▶ Particolare attenzione ai punti in cui $G(j\omega) \rightarrow \infty$ (presenza di poli sull'asse immaginario)
- ▶ Se s varia da $j\omega_0^-$ a $j\omega_0^+$ percorrendo una semicirconferenza di raggio infinitesimo in verso antiorario, allora ...
- ▶ $G(s)$ varia da $G(j\omega_0^-)$ a $G(j\omega_0^+)$ percorrendo una semicirconferenza di raggio infinito in verso orario
- ▶ Se il polo in $j\omega_0$ ha molteplicità i allora da $G(j\omega_0^-)$ a $G(j\omega_0^+)$ verranno percorse, sempre in verso orario, i semicirconferenze di raggio infinito



Poli sull'asse immaginario (2/3)

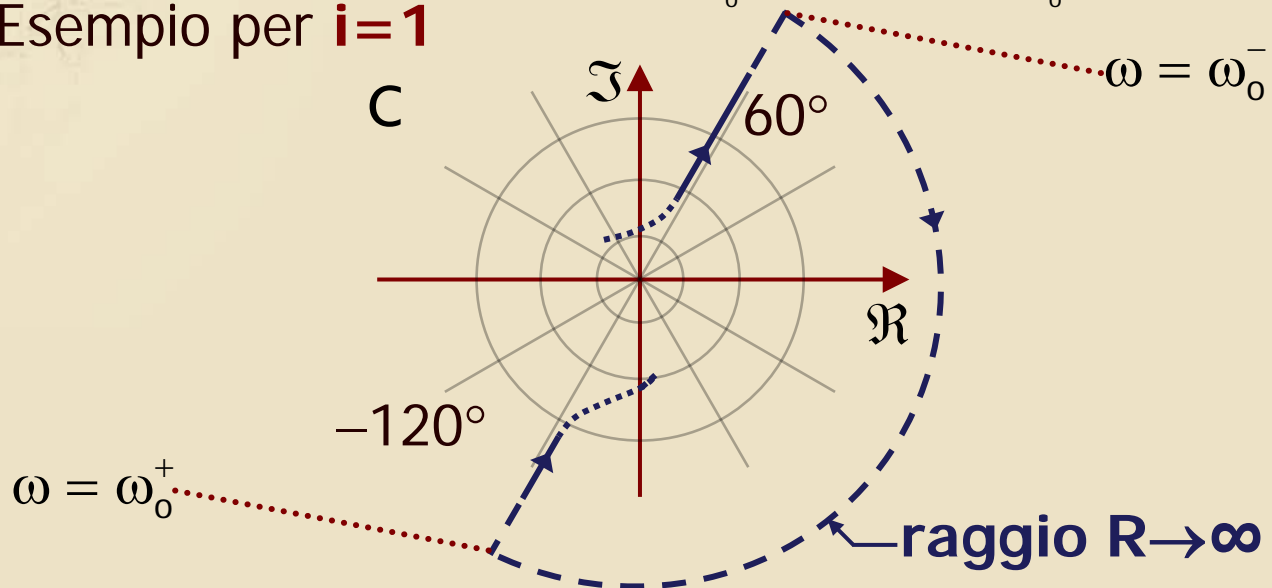
- **NB:** il percorso orario di una semicirconferenza di raggio infinito, per ω da ω_0^- a ω_0^+ , equivale a una rotazione di fase di -180° in un intervallo infinitesimo di $\omega \Rightarrow$ la fase di $G(j\omega)$ presenta una discontinuità di -180° in ω_0
- È facile dimostrare infatti che in presenza di fattori con poli sull'asse immaginario, del tipo

$$\frac{1}{s} \left(= \frac{1}{s + \omega_0} \text{ per } \omega_0 = 0 \right) \text{ oppure } \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \text{ per } \omega_0 \neq 0,$$

la fase presenta una discontinuità di -180° da ω_0^- a ω_0^+

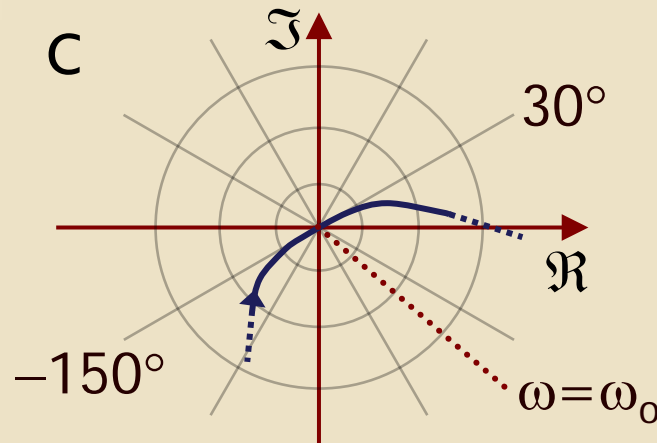
Poli sull'asse immaginario (3/3)

- Se il polo in $j\omega_0$ ha molteplicità i allora la fase presenterà una discontinuità di $-i180^\circ$ in ω_0
- Per ciò che è stato fin qui detto valgono ovviamente le seguenti eguaglianze: $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} |G(j\omega)| = \infty$
- Esempio per $i=1$



Zeri sull'asse immaginario

- La **presenza di i zeri sull'asse immaginario** (in $j\omega_0$) induce in $\omega=\omega_0$ una discontinuità di **$+i180^\circ$** nella fase e un modulo nullo ($-\infty$ dB) \Rightarrow **il DdN attraversa l'origine del piano complesso proprio per $\omega=\omega_0$**





Costruzione del DdN (1/4)

► Risultato importante:

sia definito $\bar{x} \doteq \text{coniugato}(x)$

$$G(\bar{s}) = \overline{G(s)} = \bar{G}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |G(-j\omega)| = |G(j\omega)| \\ \angle G(-j\omega) = -\angle G(j\omega) \end{cases}$$



Costruzione del DdN (2/4)

- ▶ $G(j\omega)$ per $\omega \in (-\infty, 0)$ coincide con
 $G(-j\omega)$ per $\omega \in (\infty, 0)$ ovvero con
 $\overline{G(j\omega)}$ per $\omega \in (\infty, 0)$
- ▶ **Sia $\omega \in (0, \infty)$; il luogo dei punti $G(-j\omega)$ sul piano complesso \mathcal{C} è il luogo simmetrico, rispetto all'asse reale, a quello dei punti $G(j\omega)$**
- ▶ **NB:** non è difficile dimostrare che $G(-j\infty) \equiv G(j\infty)$



Costruzione del DdN (3/4)

- Per tracciare il DdN di una fdt $G(s)$ è sufficiente seguire poche regole pratiche
 - tracciare il diagramma polare di $G(j\omega)$
 - tracciare il diagramma simmetrico al precedente rispetto all'asse reale (basta "ribaltare" il diagramma polare rispetto all'asse reale)
 - nel caso siano presenti rami all'infinito ovvero poli sull'asse immaginario, congiungere i rami all'infinito con un opportuno numero di semicirconferenze orarie di raggio $R \rightarrow \infty$ così come illustrato nelle diapositive precedenti

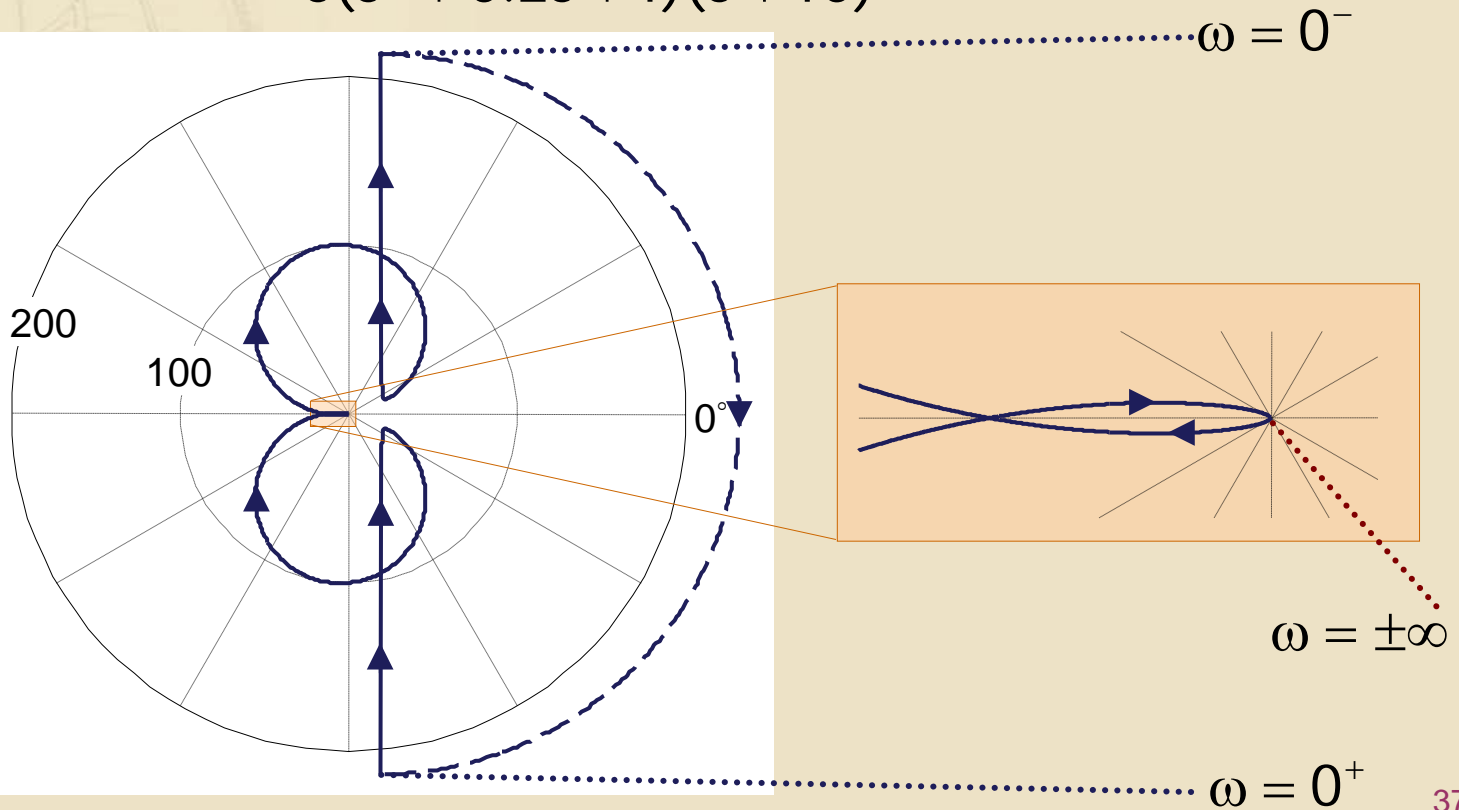


Costruzione del DdN (4/4)

- mettere in evidenza il verso di percorrenza (da $\omega=0^+$ a $\omega=+\infty/-\infty$ a $\omega=0^-$)
- verificare che il DdN sia costituito da una curva chiusa

Esempio 1 (1/2)

$$G(s) = \frac{200(s + 0.1)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$



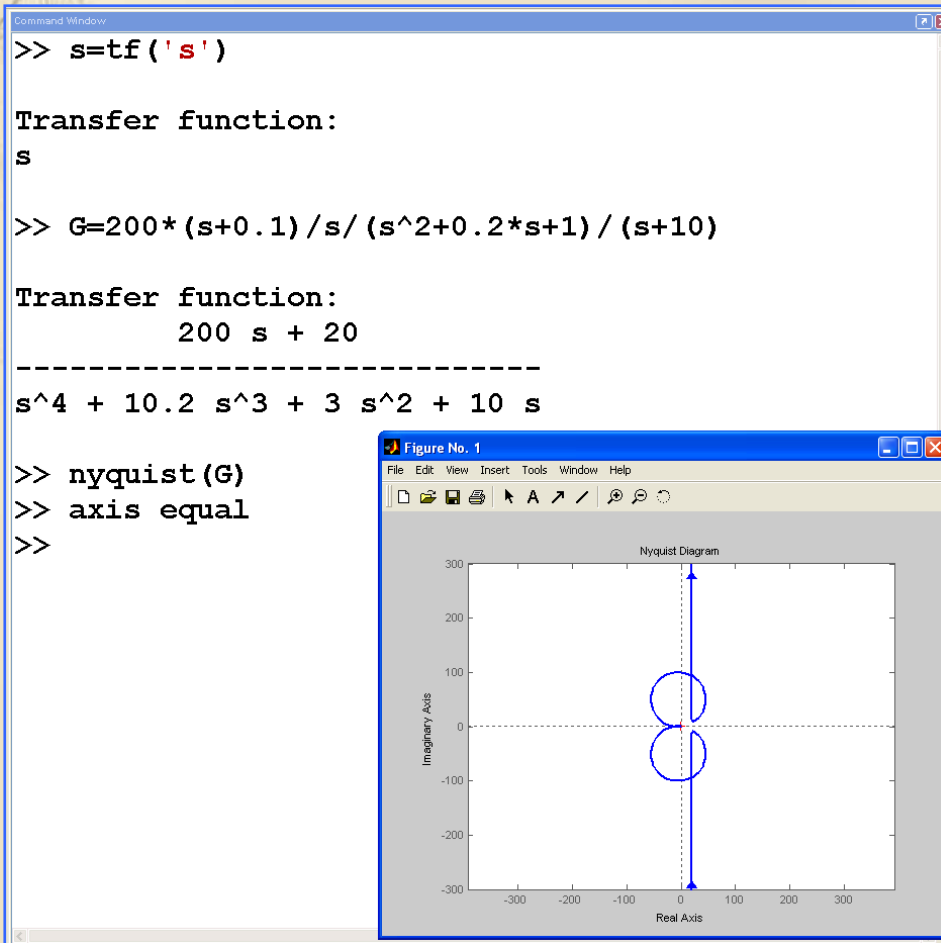


Esempio 1 in Matlab (1/3)

- ▶ Il DdN può essere tracciato in ambiente Matlab utilizzando il comando **nyquist** (per la sintassi consultare il relativo help)
- ▶ Nel caso della fdt precedente, ad esempio, i comandi Matlab che permettono di tracciare il DdN nel modo più semplice sono i seguenti:

```
>> s=tf('s')  
>> G=200*(s+0.1)/s/(s^2+0.2*s+1)/(s+10)  
>> nyquist(G)  
>> axis equal
```

Esempio 1 in Matlab (2/3)



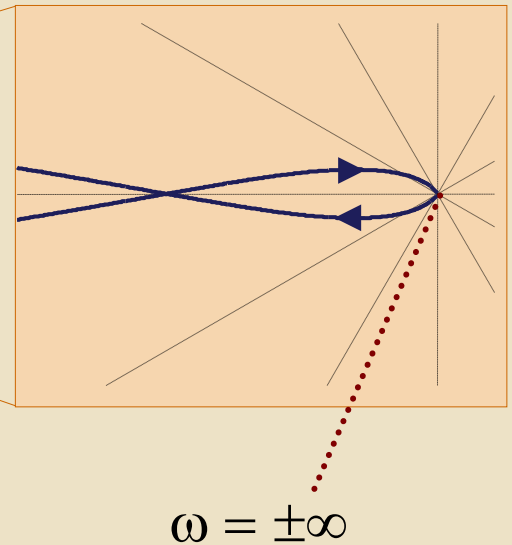
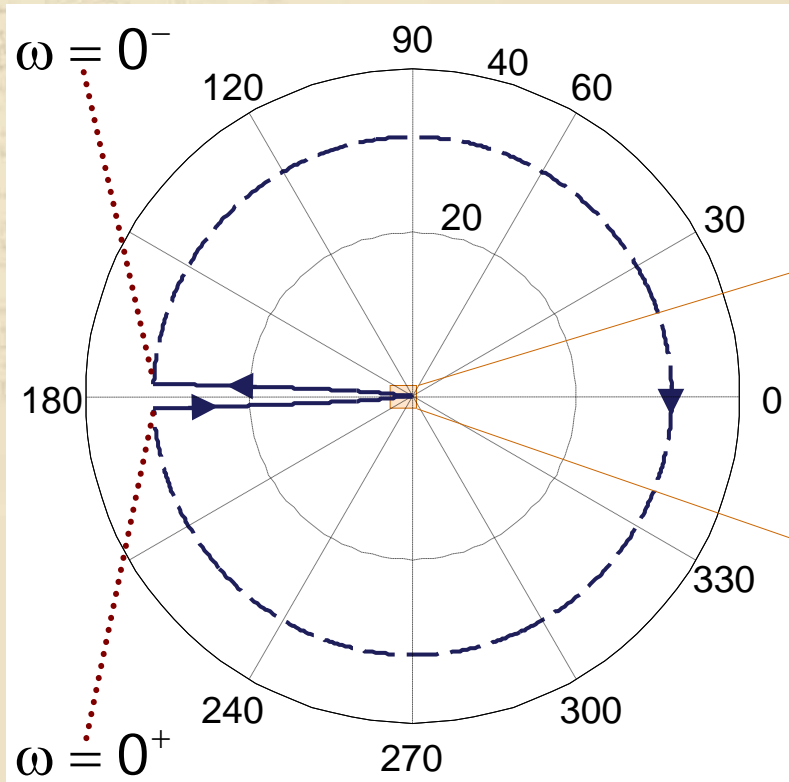


Esempio 1 in Matlab (3/3)

- ▶ Si noti che in ambiente Matlab i DdN possono non essere completi perché mancanti delle eventuali semicirconferenze all'infinito
- ▶ I dettagli del DdN possono essere meglio analizzati con successive operazioni di zoom sul diagramma stesso

Esempio 2 (1/2)

$$G(s) = \frac{10(s + 1)}{s^2(s + 2)(s + 4)}$$





Esempio 2 in Matlab (1/3)

- I comandi Matlab che permettono di tracciare il DdN nel modo più semplice sono i seguenti:

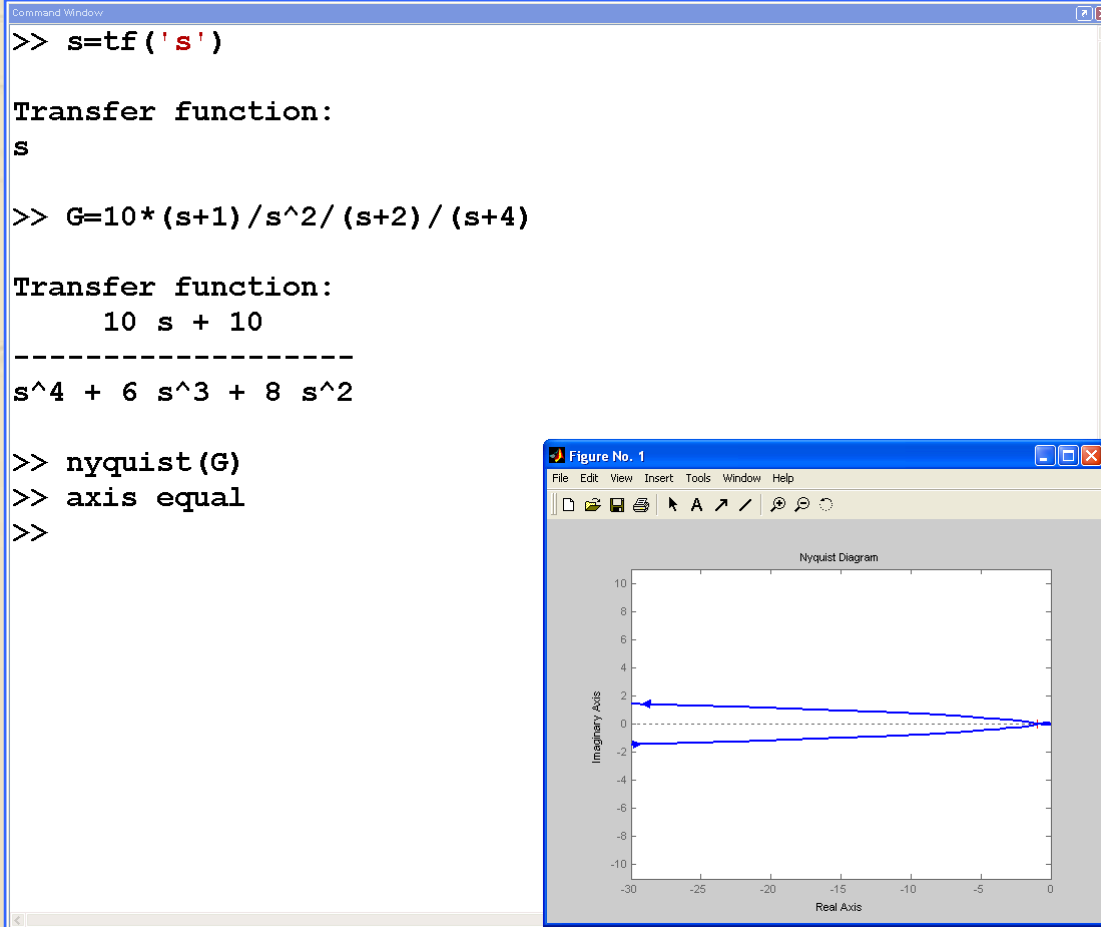
```
>> s=tf('s')
```

```
>> G=10*(s+1)/s^2/(s+2)/(s+4)
```

```
>> nyquist(G)
```

```
>> axis equal
```

Esempio 2 in Matlab (2/3)



Esempio 2 in Matlab (3/3)

- ▶ Anche in questo caso il DdN non è completo perché mancante delle semicirconferenze all'infinito
- ▶ I dettagli del DdN possono essere meglio analizzati con successive operazioni di zoom sul diagramma stesso

