

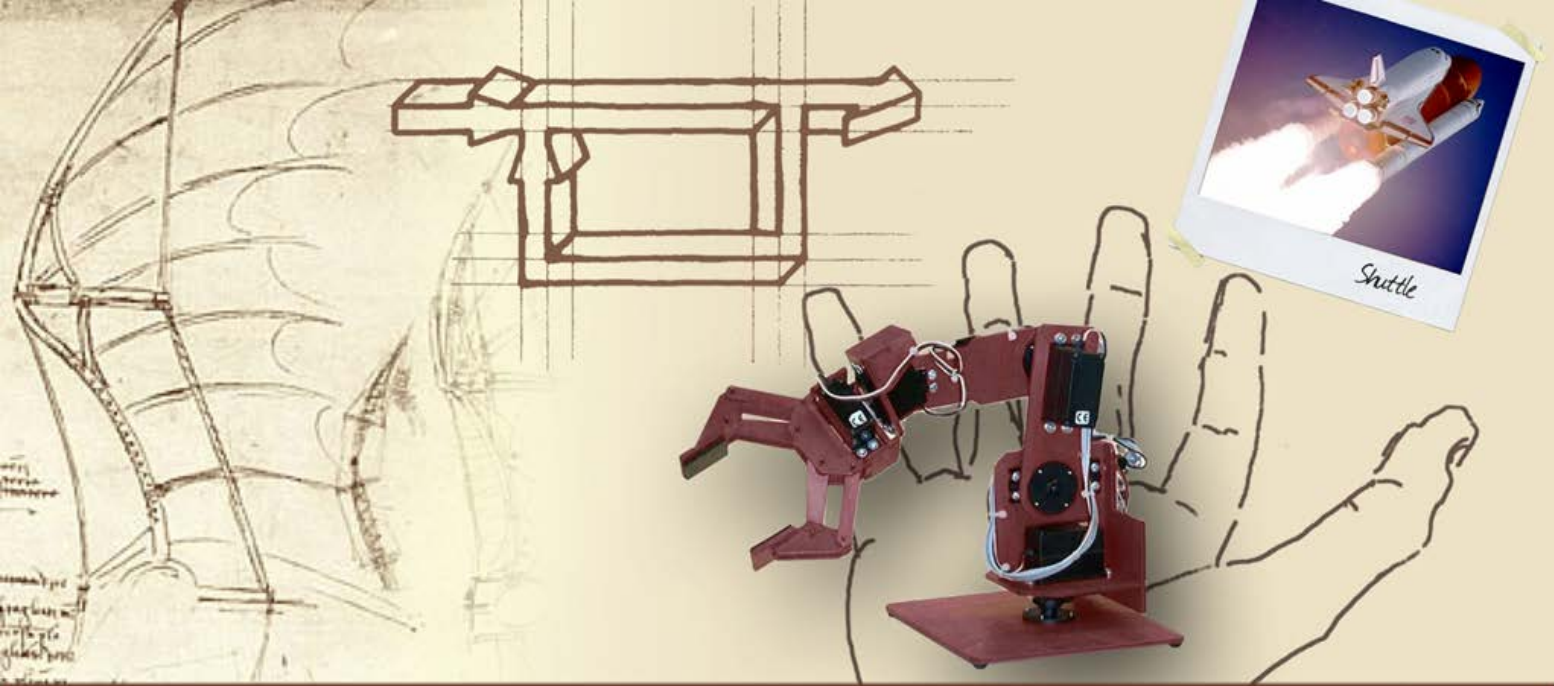
**Stabilità dei sistemi di controllo in retroazione**

**Diagrammi di Bode**



# Diagrammi di Bode

- Risposta in frequenza
- Rappresentazione grafica “naturale”
- Rappresentazione grafica “modificata”
- Diagrammi di Bode di fdt elementari
- Esempio



## Diagrammi di Bode

Risposta in frequenza



## Risposta in frequenza (1/3)

- La risposta in frequenza si analizza tramite

$$\begin{aligned} G(s) \Big|_{s=j\omega} &= G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \\ &= M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \leq \omega < \infty \end{aligned}$$

- Sia  $s$  che  $\omega$  sono misurati in **rad/s** (equivalente a **s<sup>-1</sup>**)
- L'unità di misura di  $G(j\omega)$  e di  $|G(j\omega)| = M(\omega)$ , data dal rapporto fra l'unità di misura dell'uscita e quella dell'ingresso, verrà definita d'ora in poi **unità naturale (u<sub>nat</sub>)**



## Risposta in frequenza (2/3)

- $\varphi(\omega)$  è misurata in **radianti (rad)** oppure in **gradi (°)**
- Per il modulo  $M(\omega)$  è usuale utilizzare anche l'unità di misura **decibel (dB)**:

$$M_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(M_{u_{\text{nat}}})$$

- Proprietà particolari:

- Se  $G = G_1^{\pm 1} G_2^{\pm 1} \dots G_k^{\pm 1}$  (blocchi in cascata)
- Allora  $M_{u_{\text{nat}}} = M_{1,u_{\text{nat}}}^{\pm 1} M_{2,u_{\text{nat}}}^{\pm 1} \dots M_{k,u_{\text{nat}}}^{\pm 1}$

$$M_{\text{dB}} = \pm M_{1,\text{dB}} \pm M_{2,\text{dB}} \pm \dots \pm M_{k,\text{dB}}$$

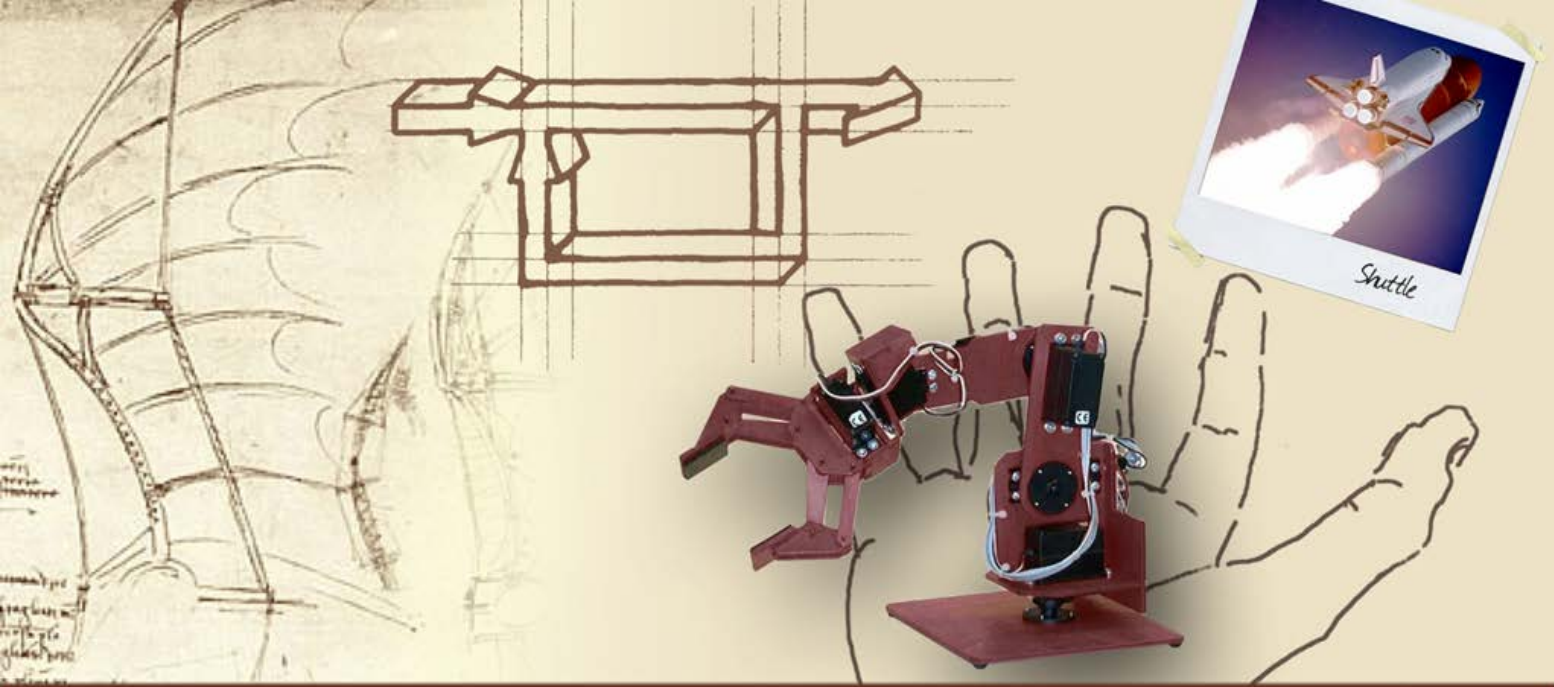
**IMPORTANTE!**

$$\varphi = \pm \varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \dots \pm \varphi_k$$



## Risposta in frequenza (3/3)

- Rappresentazioni grafiche
- $M(\omega): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  (variabile indipendente  $\omega$  in ascissa, variabile dipendente  $M$  in ordinata)
- $\varphi(\omega): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  (variabile indipendente  $\omega$  in ascissa, variabile dipendente  $\varphi$  in ordinata)



## Diagrammi di Bode

Rappresentazione grafica "naturale"



# Rappresentazione grafica "naturale"

- Pulsazione  $\omega$  (rad/s) in ascissa, modulo  $M$  ( $u_{\text{nat}}$ ) in ordinata,  $\omega$  in scala lineare

## Diagramma "naturale" del modulo

- Pulsazione  $\omega$  (rad/s) in ascissa, fase  $\varphi$  (gradi) in ordinata,  $\omega$  in scala lineare

## Diagramma "naturale" della fase





## Un esempio (1/3)

- Sia data la seguente fdt

$$G(s) = 200 \frac{s + 0.1}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$

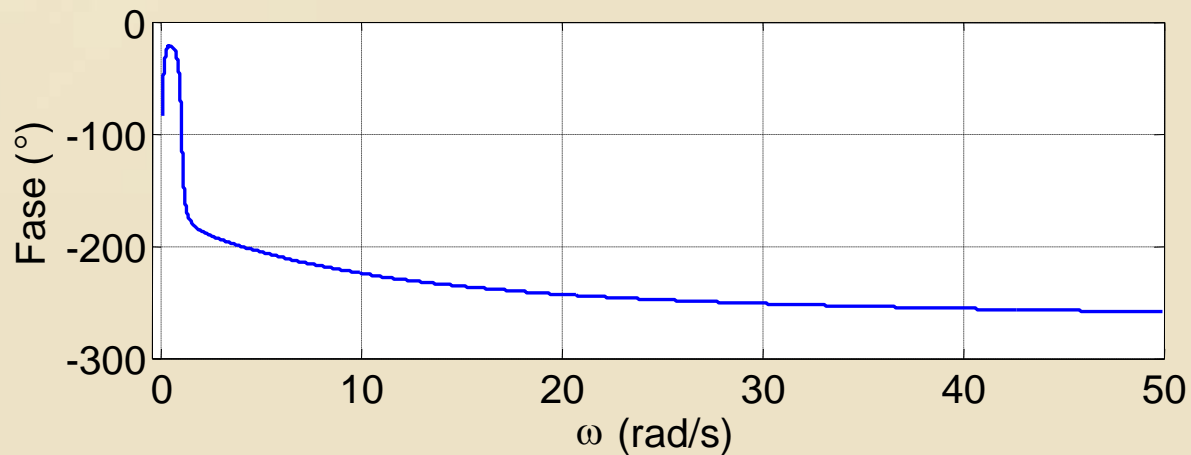
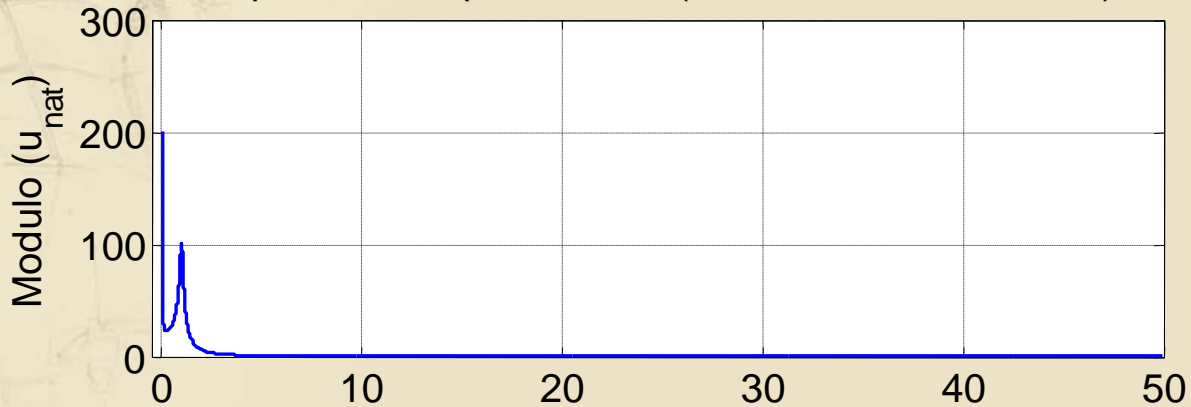
$$G(j\omega) = 200 \frac{j\omega + 0.1}{j\omega(-\omega^2 + 0.2j\omega + 1)(j\omega + 10)}$$

- Si noti che per  $\omega \rightarrow 0$   $G(j\omega) \rightarrow \frac{2}{j\omega} = -j \frac{2}{\omega} \rightarrow -j\infty$

e per  $\omega \rightarrow \infty$   $G(j\omega) \rightarrow \frac{200}{-j\omega^3} = j \frac{200}{\omega^3} \rightarrow j0$

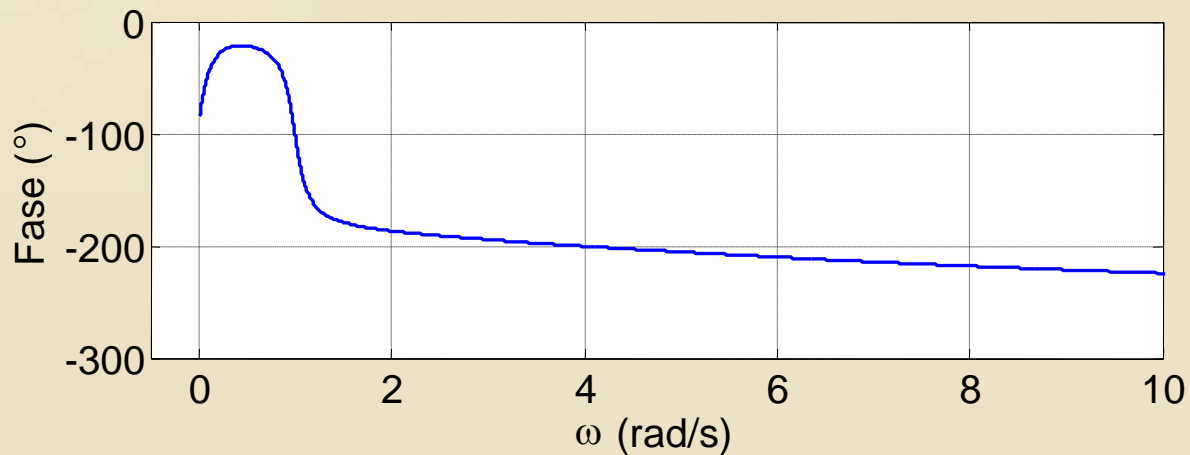
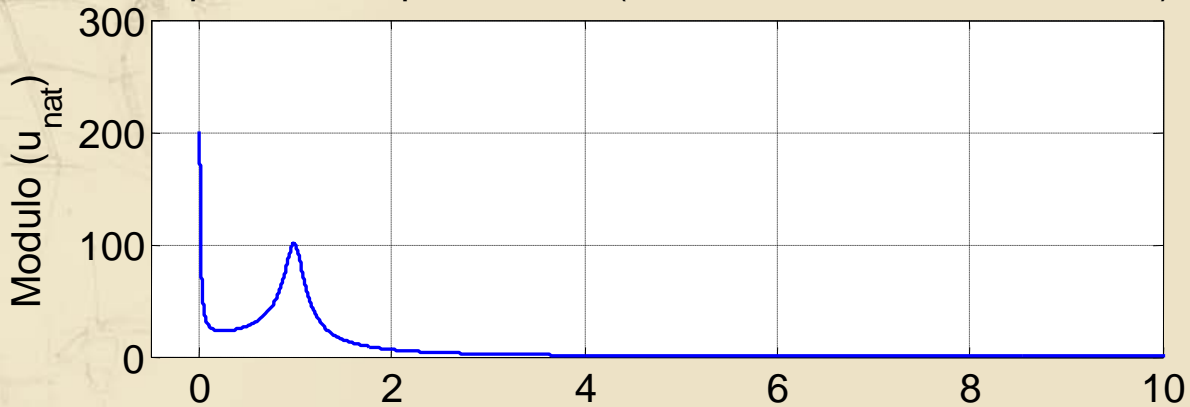
## Un esempio (2/3)

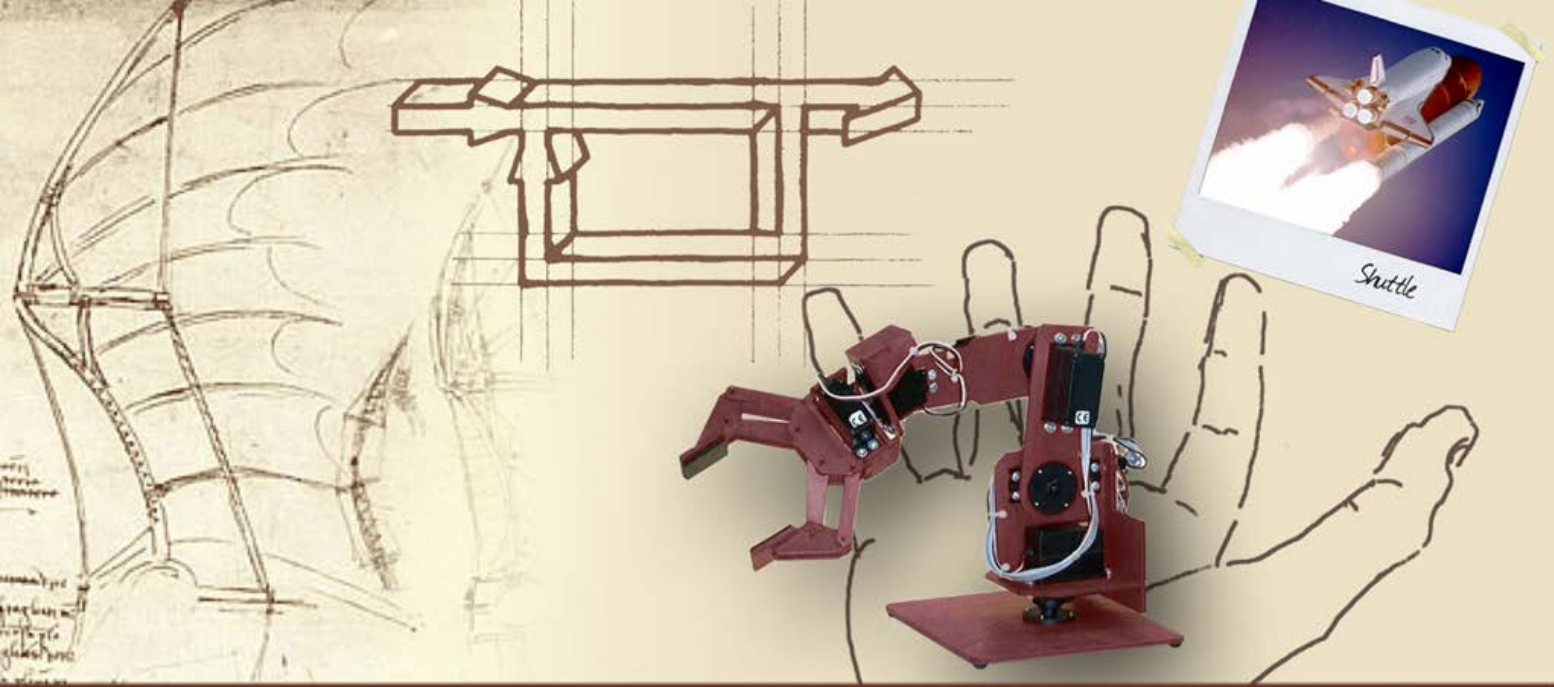
Risposta in frequenza di G (ascisse in scala lineare)



# Un esempio (3/3)

Risposta in frequenza di G (ascisse in scala lineare, zoom)





## Diagrammi di Bode

Rappresentazione grafica  
"modificata"



## Rappresentazione grafica “modificata”

- Pulsazione  $\omega$  (rad/s) in ascissa, modulo  $M$  (dB) in ordinata,  $\omega$  in scala logaritmica

### Diagramma “di Bode” del modulo

- Pulsazione  $\omega$  (rad/s) in ascissa, fase  $\varphi$  (gradi) in ordinata,  $\omega$  in scala logaritmica

### Diagramma “di Bode” della fase

- Diagramma di Bode → DdB



## Un esempio (1/3)

- Sia data la fdt dell'esempio precedente

$$G(s) = 200 \frac{s + 0.1}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$

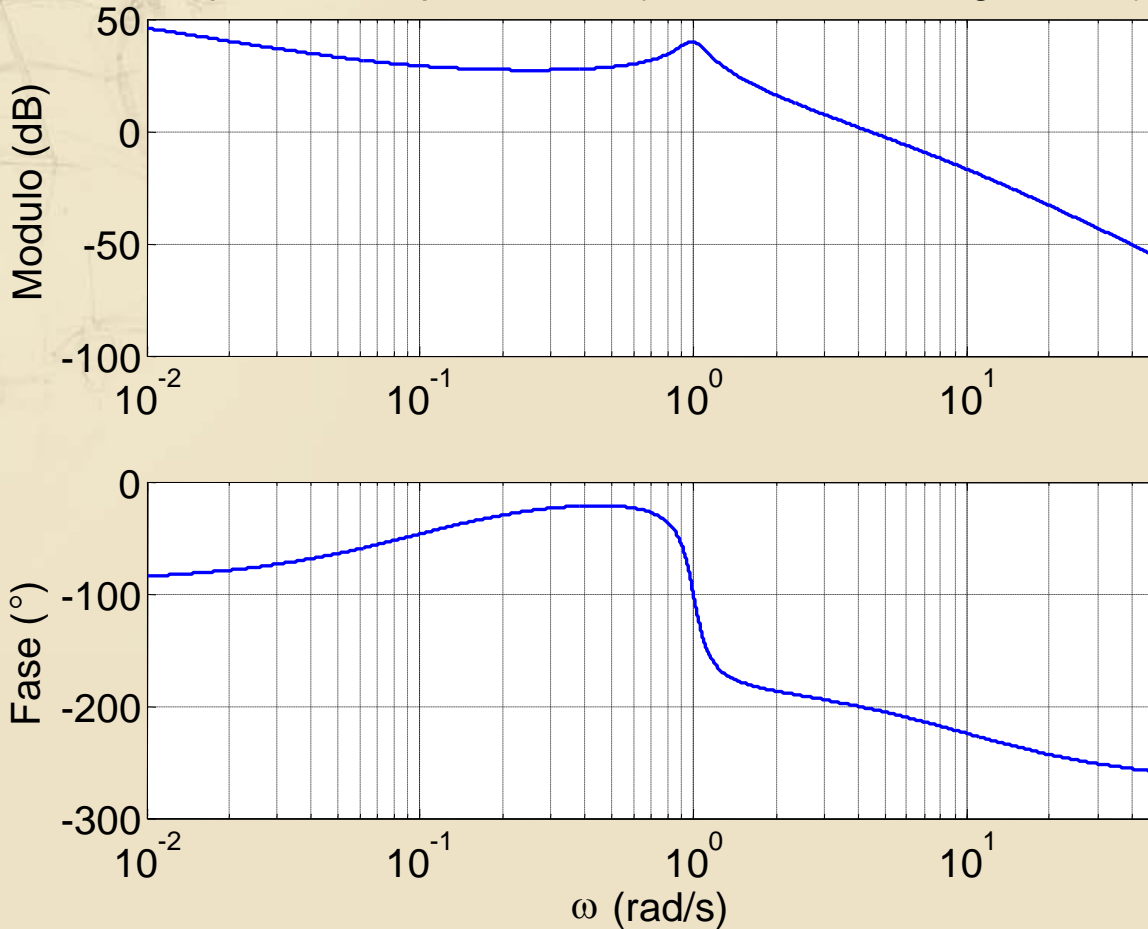
$$G(j\omega) = 200 \frac{j\omega + 0.1}{j\omega(-\omega^2 + 0.2j\omega + 1)(j\omega + 10)}$$

- Si noti che per  $\omega \rightarrow 0$   $G(j\omega) \rightarrow \frac{2}{j\omega} = -j\frac{2}{\omega} \rightarrow -j\infty$

e per  $\omega \rightarrow \infty$   $G(j\omega) \rightarrow \frac{200}{-j\omega^3} = j\frac{200}{\omega^3} \rightarrow j0$

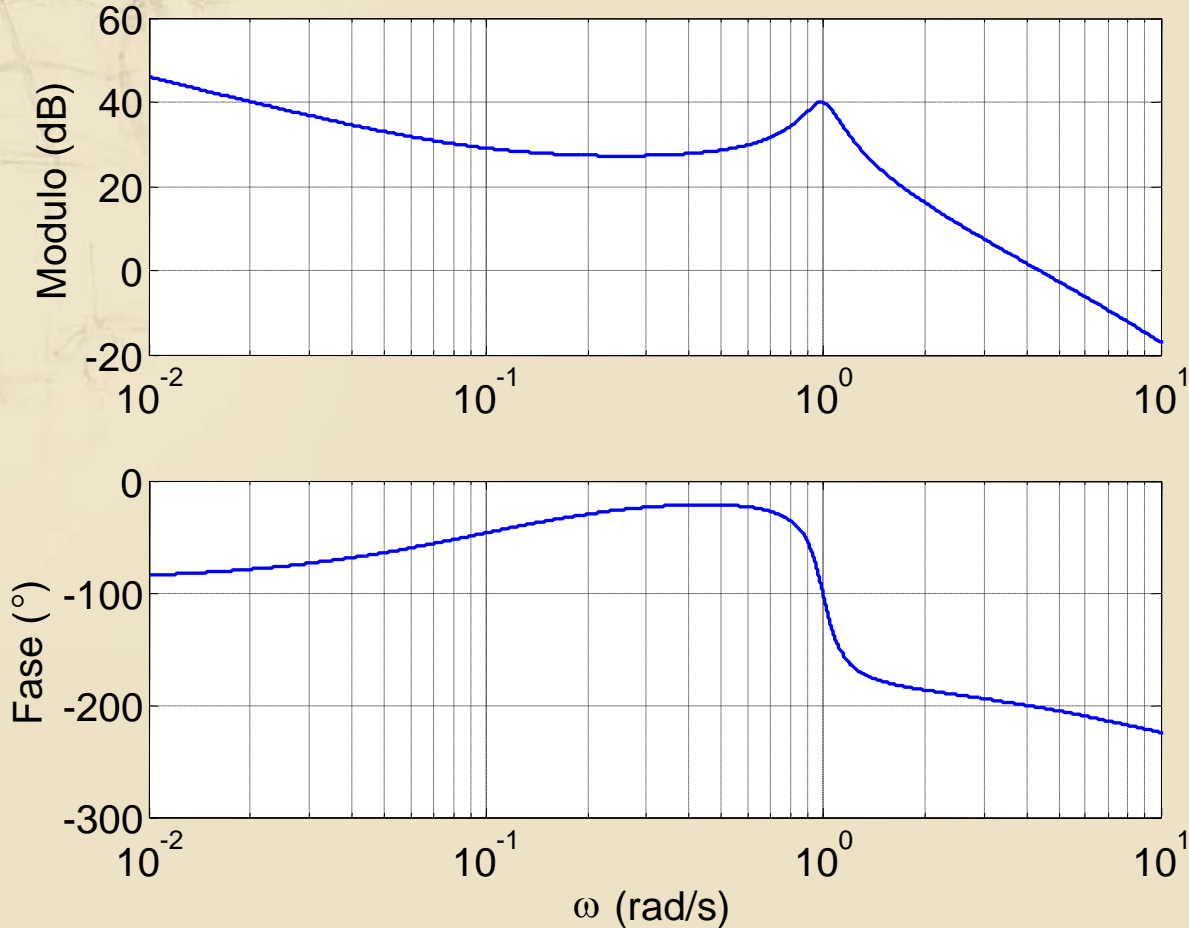
## Un esempio (2/3)

Risposta in frequenza di G (ascisse in scala logaritmica)

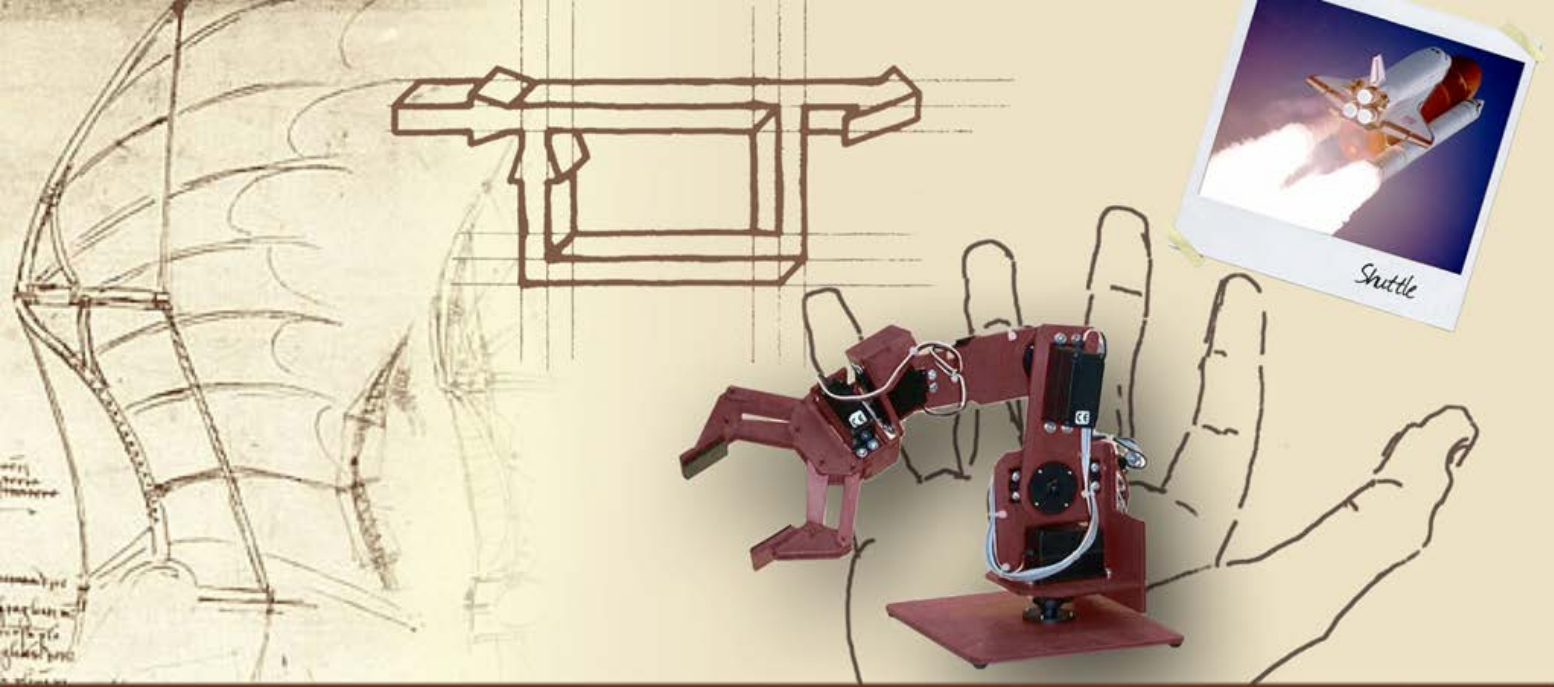


## Un esempio (3/3)

Risposta in frequenza di G (ascisse in scala logaritmica, zoom)







## Diagrammi di Bode

**Diagrammi di Bode di fdt elementari**



## Fdt elementari (1/5)

- Una qualunque fdt può essere espressa come prodotto di fdt elementari (fattori) appartenenti a quattro diverse tipologie

$$f_1(s) : K$$

$$f_2(s) : s^{\pm i}$$

$$f_3(s) : \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{\pm i}$$

$$f_4(s) : \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm i}$$



## Fdt elementari (2/5)

- La molteplicità  $i$  implica che i DdB del singolo fattore si ottengono semplicemente moltiplicando per  $i$  i DdB di modulo e fase dei fattori di molteplicità unitaria:

$$f_1(s) : K$$

$$f_2(s) : s^{\pm 1}$$

$$f_3(s) : \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{\pm 1}$$

$$f_4(s) : \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$$



## Fdt elementari (3/5)

- I DdB di un fattore che è l'inverso di un altro si ottengono semplicemente cambiando segno sia al DdB del modulo che a quello della fase. Si può quindi fare riferimento ai seguenti fattori elementari

$$f_1(s) : K$$

$$f_2(s) : s^{-1}$$

$$f_3(s) : \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$f_4(s) : \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$$



## Fdt elementari (4/5)

- I fattori elementari  $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$ ,  $f_3(s)$ ,  $f_4(s)$  sono caratterizzati **rispettivamente** da:
- $f_1$ : un guadagno
  - $f_2$ : un polo nell'origine 0 (integratore)
  - $f_3$ : un polo reale  $\lambda$  (negativo o positivo, ovvero stabile o instabile)
  - $f_4$ : una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale  $\omega_n$  e fattore di smorzamento  $-1 < \zeta < 1$  (si ricorda che:  $\zeta > 0 \Rightarrow$  coppia stabile;  $\zeta < 0 \Rightarrow$  coppia instabile;  $\zeta = 0 \Rightarrow$  coppia sull'asse immaginario)



## Fdt elementari (5/5)

- I fattori elementari  $f_2(s)$ ,  $f_3(s)$ ,  $f_4(s)$

$$f_2(s) : s^{-1}$$

$$f_3(s) : \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$f_4(s) : \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$$

sono espressi in forma a guadagno stazionario unitario

- Naturalmente i fattori inversi sono caratterizzati da zeri



## DdB di un guadagno (1/2)

►  $f_1(s) = K$ , con  $K \neq 0$

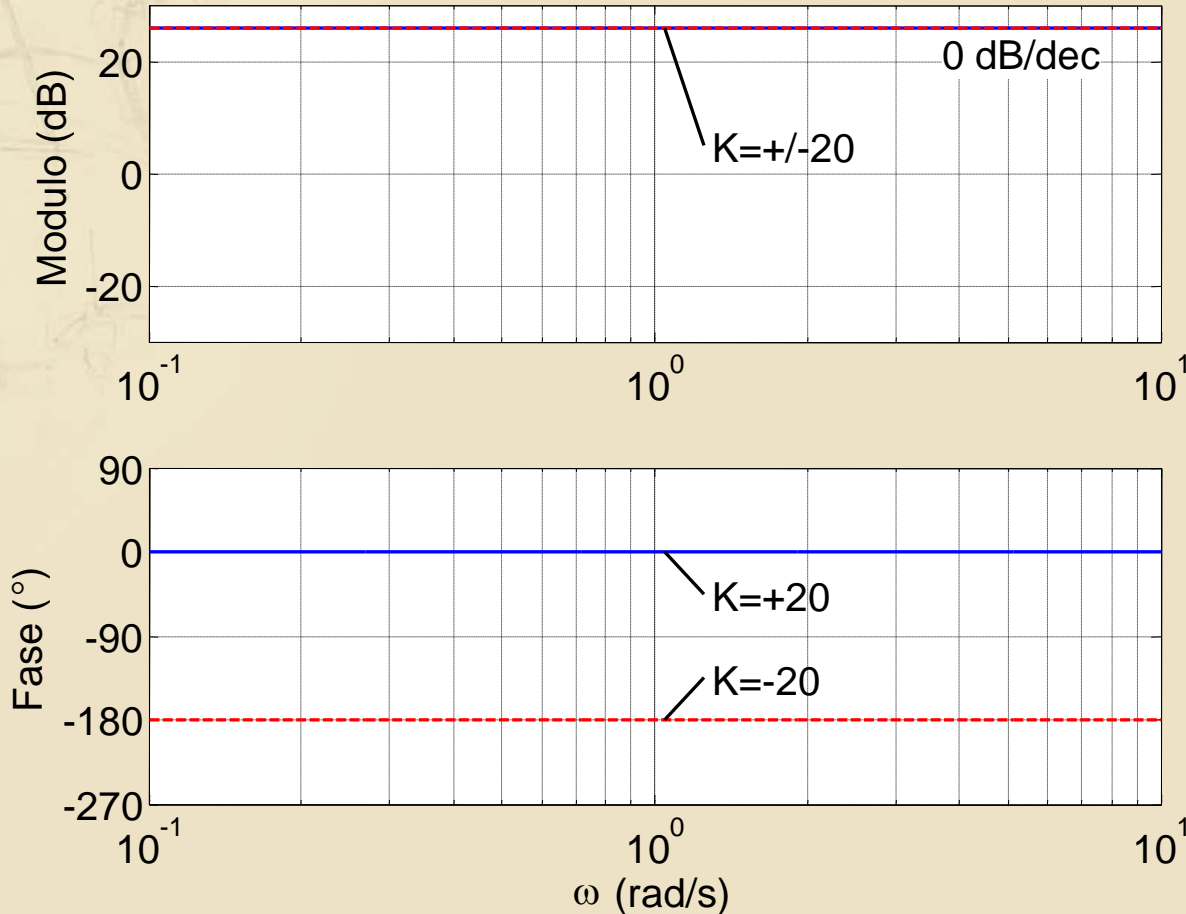
$$M(\omega) = 20 \log_{10}(|K|), \text{ costante } \forall \omega$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{per } K > 0, \text{ costante } \forall \omega \\ -180^\circ & \text{per } K < 0, \text{ costante } \forall \omega \end{cases}$$

Ovviamente è altrettanto corretto il valore di  $+180^\circ$  (sul piano complesso sono indistinguibili)

# DdB di un guadagno (2/2)

Risposta in frequenza di  $K=+20$  e  $K=-20$







## DdB di un polo nell'origine (1/3)

- Per maggiore generalità si prende in considerazione il fattore

$$f_2(s) = \frac{K}{s}, \quad \text{con } K > 0$$

$$f_2(j\omega) = -j \frac{K}{\omega}$$

$$M(\omega) = 20 \log_{10} \left( \frac{|K|}{\omega} \right) = K_{\text{dB}} - 20 \log_{10}(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ = \text{costante } \forall \omega$$



## DdB di un polo nell'origine (2/3)

► Dall'espressione del modulo di  $f_2(\omega)$  si deduce che

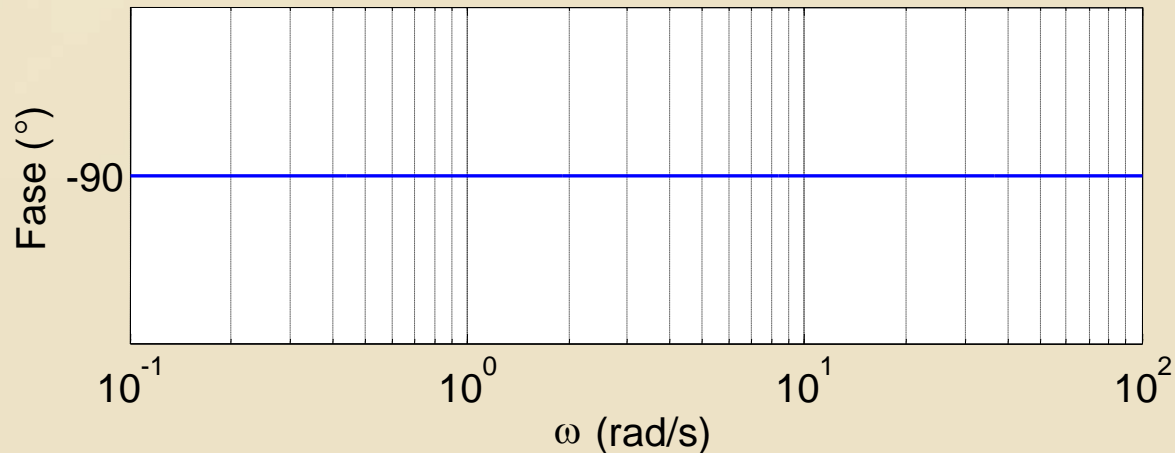
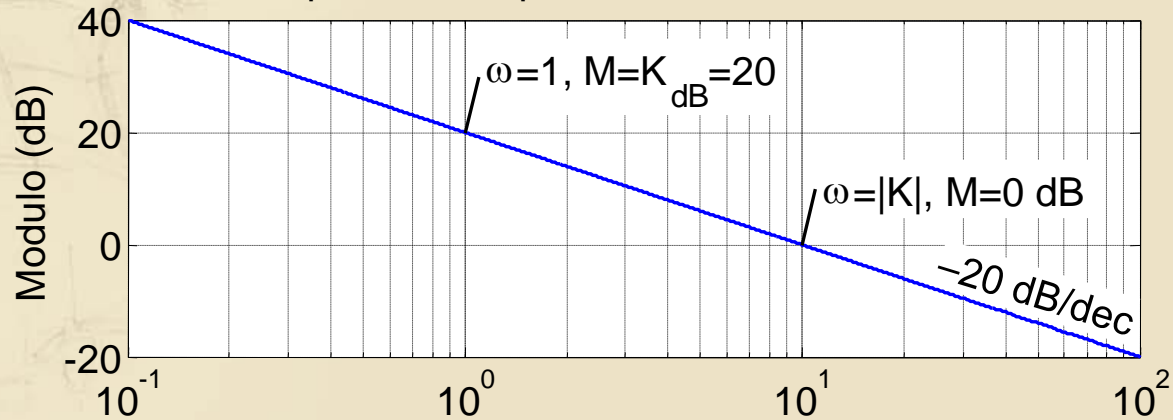
- Per  $\omega = 1 \rightarrow M = K_{\text{dB}}$
- Per  $\omega = |K| \rightarrow M = 0 \text{ dB}$  (cioè  $1 u_{\text{nat}}$ )
- Il modulo dipende linearmente da  $\log_{10}(\omega)$  attraverso il coefficiente  $-20$

⇒

**Il DdB del modulo è una retta con pendenza di  $-20 \text{ dB/dec}$**

# DdB di un polo nell'origine (3/3)

Risposta in frequenza di  $G=K/s$ , con  $K=10$



## DdB di un polo multiplo nell'origine

► Sia  $f'_2(s) = \frac{K}{s^i}$ , con  $K > 0$

$i =$  molteplicità del polo



## DdB di un polo multiplo nell'origine

► Sia  $f'_2(s) = \frac{K}{s^i}$ , con  $K > 0$

- Per  $\omega = 1 \rightarrow M = K_{\text{dB}}$
- Per  $\omega = i\sqrt{|K|} \rightarrow M = 0 \text{ dB}$  (cioè  $1 u_{\text{nat}}$ )
- Il modulo dipende linearmente da  $\log_{10}(\omega)$  attraverso il coefficiente  $-20i$

**Il DdB del modulo è una retta con pendenza di  $-20i \text{ dB/dec}$**



## DdB di un polo reale $\lambda$ (1/6)

$$\blacktriangleright f_3(s) = \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1} \rightarrow f_3(j\omega) = \left(1 - j\frac{\omega}{\lambda}\right)^{-1}$$

è comodo definire  $\Omega \doteq \frac{\omega}{|\lambda|}$  (adimensionata)

$$f_3(j\Omega) = (1 - j\text{sign}(\lambda)\Omega)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} M(\Omega) = -20 \log_{10}(\sqrt{1^2 + \Omega^2}) \\ \varphi(\Omega) = \text{sign}(\lambda) \arctan(\Omega) \end{cases}$$



## DdB di un polo reale $\lambda$ (2/6)

- Approssimazione in bassa frequenza (BF):  $\omega \ll |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega \ll |\lambda| \\ \Omega \ll 1}} (f_3) = 1 \rightarrow \begin{cases} M = 0 \text{ dB} \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

M e  $\varphi$  indipendenti da  $\lambda$  e in particolare dalla stabilità del polo



## DdB di un polo reale $\lambda$ (3/6)

- Approssimazione in alta frequenza (AF):  $\omega \gg |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega \gg |\lambda| \\ \Omega \gg 1}} (f_3) = -\text{sign}(\lambda) \frac{1}{j\Omega} \rightarrow \begin{cases} M = -20 \log_{10}(\Omega) \\ \varphi = \text{sign}(\lambda) \cdot 90^\circ \end{cases}$$

$\varphi$  dipendente da  $\lambda$  e in particolare:

$\varphi = -90^\circ$  per polo stabile ( $\Re\{\lambda\} < 0$ )

$\varphi = +90^\circ$  per polo instabile ( $\Re\{\lambda\} > 0$ )

M indipendente da  $\lambda$  e in particolare dalla  
stabilità del polo (pend. =  $-20$  dB/dec)





## DdB di un polo reale $\lambda$ (4/6)

- Calcolo nel “punto centrale”  $\Omega = 1$  ovvero  $\omega = |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega=|\lambda| \\ \Omega=1}}(f_3) = (1 - j\text{sign}(\lambda))^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cong -3 \text{ dB} \\ \varphi = \text{sign}(\lambda) \cdot 45^\circ \end{cases}$$

$\varphi$  dipendente da  $\lambda$  e in particolare:

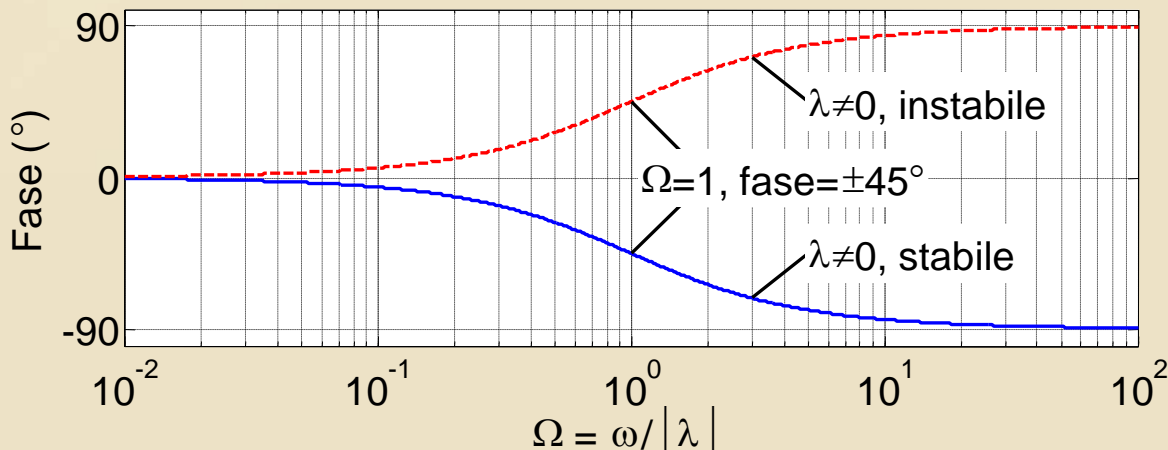
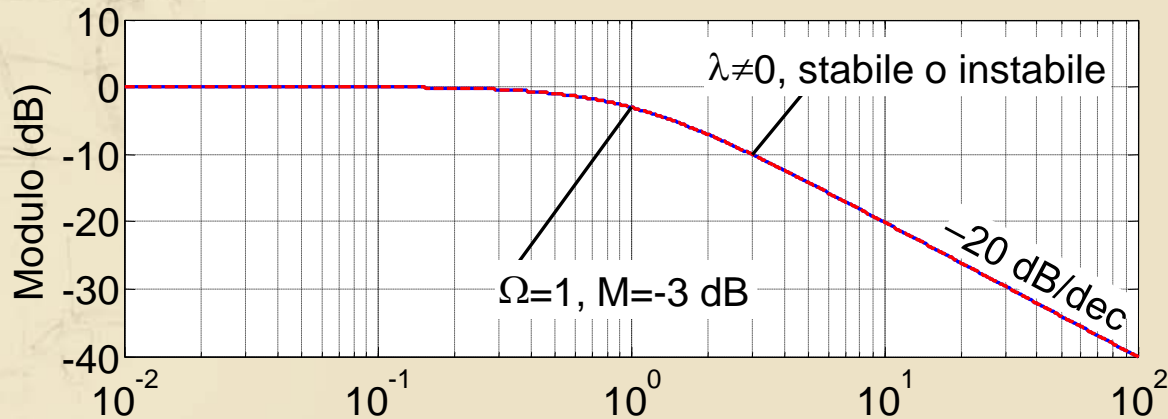
$\varphi = -45^\circ$  per polo stabile

$\varphi = +45^\circ$  per polo instabile

M indipendente da  $\lambda$  e in particolare  
dalla stabilità del polo

# DdB di un polo reale $\lambda$ (5/6)

Risposta in frequenza di  $G=(1-s/\lambda)^{-1}$





## DdB di un polo reale $\lambda$ (6/6)

### ► Da ricordare

- Il contributo di un polo in BF è di  $\sim 0$  dB/dec e di  $\sim 0^\circ$ , indipendentemente che sia stabile o instabile
- Il contributo di un polo in AF è di  $\sim -20$  dB/dec, che sia stabile o meno, di  $\sim +90^\circ$  se instabile e di  $\sim -90^\circ$  se stabile
- Nel “punto centrale”,  $\Omega = 1$  ovvero  $\omega = |\lambda|$ , il modulo vale  $\sim -3$  dB e la fase vale  $+45^\circ$  se instabile e  $-45^\circ$  se stabile
- L’asintoto del modulo in AF (a  $-20$  dB/dec) interseca l’asse a  $0$  dB esattamente in  $\Omega = 1$

## DdB di poli complessi coniugati (1/9)

$$\rightarrow f_4(s) = \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1} \rightarrow f_4(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$$

è comodo definire  $\Omega \doteq \frac{\omega}{\omega_n}$  (adimensionata)

$$f_4(j\Omega) = (1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} M(\Omega) = -20 \log_{10} \left( \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2} \right) \\ \varphi(\Omega) = -\arg(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega) \end{cases}$$

## DdB di poli complessi coniugati (2/9)

- Approssimazione in BF:  $\omega \ll \omega_n$  (Ipotesi:  $\zeta \neq 0$ )

$$\lim_{\substack{\omega \ll \omega_n \\ \Omega \ll 1}} (f_4) = 1 \rightarrow \begin{cases} M = 0 \text{ dB} \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

M e  $\varphi$  indipendenti da  $\zeta$  e in particolare dalla stabilità dei poli

## DdB di poli complessi coniugati (3/9)

- Approssimazione in AF:  $\omega \gg \omega_n$  (Ipotesi:  $\zeta \neq 0$ )

$$\lim_{\substack{\omega \gg \omega_n \\ \Omega \gg 1}} (f_4) = (-\Omega^2 + j2\zeta\Omega)^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = -40 \log_{10}(\Omega) \\ \varphi = -\text{sign}(\zeta) \cdot 180^\circ \end{cases}$$

$\varphi$  dipendente da  $\zeta$  e in particolare:

$\varphi = -180^\circ$  per poli stabili ( $\zeta > 0$ )

$\varphi = +180^\circ$  per poli instabili ( $\zeta < 0$ )

M indipendente da  $\zeta$  e in particolare dalla stabilità dei poli. Pendenza =  $-40$  dB/dec



## DdB di poli complessi coniugati (4/9)

- Calcolo nel “punto centrale”:  $\omega = \omega_n$  (Ipotesi:  $\zeta \neq 0$ )

$$\lim_{\substack{\omega=\omega_n \\ \Omega=1}} (f_4) = (j2\zeta)^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{2|\zeta|} \right) \\ \varphi = -\text{sign}(\zeta) \cdot 90^\circ \end{cases}$$

$\varphi$  dipendente da  $\zeta$  e in particolare:

$\varphi = -90^\circ$  per poli stabili ( $\zeta > 0$ )

$\varphi = +90^\circ$  per poli instabili ( $\zeta < 0$ )

M dipendente da  $|\zeta|$ , ma non  
dalla stabilità dei poli

## DdB di poli complessi coniugati (5/9)

► Caso particolare:  $\zeta = 0$

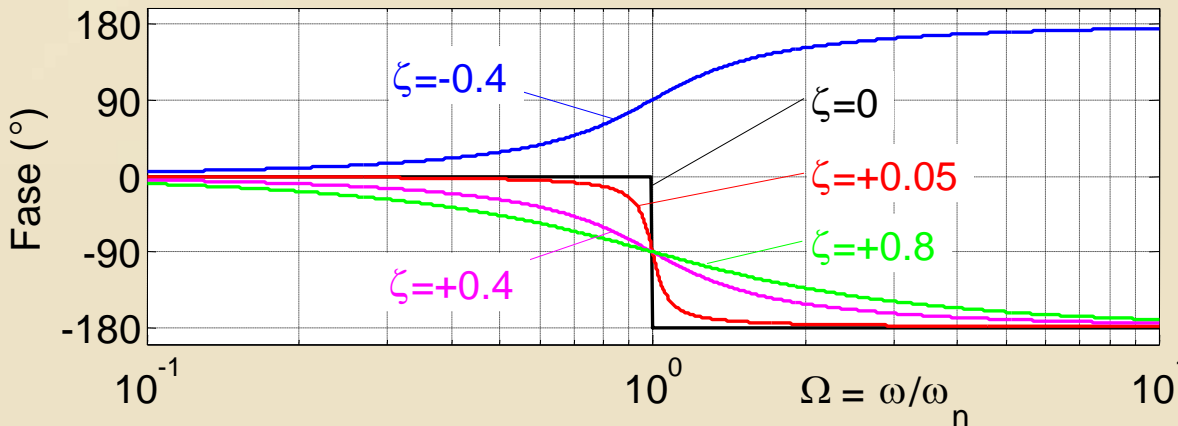
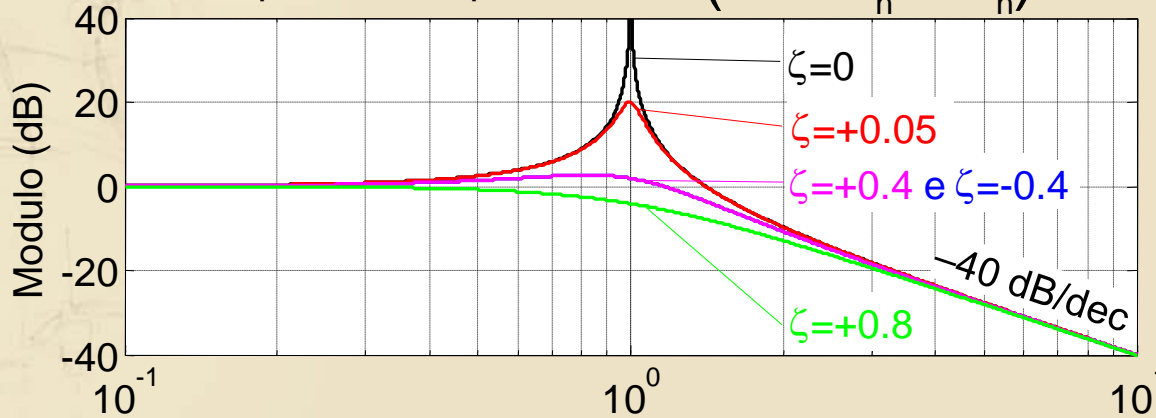
$$f_4|_{\zeta=0} = (1 - \Omega^2)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = -20 \log_{10} |1 - \Omega^2| = \begin{cases} \cong 0 & \text{in BF} \\ \cong -40 \log_{10}(\Omega) & \text{in AF} \\ \rightarrow \infty & \text{per } \Omega \rightarrow 1^\pm \end{cases} \\ \varphi = \begin{cases} 0^\circ & \forall \Omega < 1 \\ \pm 180^\circ & \forall \Omega > 1 \\ \text{indeterm. per } & \Omega = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$



# DdB di poli complessi coniugati (6/9)

Risposta in frequenza di  $G = \left(1 + 2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2\right)^{-1}$





## DdB di poli complessi coniugati (7/9)

### ► Da ricordare

- Il contributo in BF è di  $\sim 0$  dB/dec e di  $\sim 0^\circ$ , indipendentemente che siano stabili o instabili
- Il contributo in AF è di  $\sim -40$  dB/dec, che siano stabili o meno, di  $\sim +180^\circ$  se instabili e di  $\sim -180^\circ$  se stabili
- Nel “punto centrale”,  $\Omega = 1$  ovvero  $\omega = \omega_n$ , il modulo vale  $1/(2|\zeta|) u_{\text{nat}}$  mentre la fase vale  $+90^\circ$  se instabili e  $-90^\circ$  se stabili
- L’asintoto del modulo in AF interseca l’asse a 0 dB esattamente in  $\Omega = 1$



## DdB di poli complessi coniugati (8/9)

► NB:

- Il DdB del modulo presenta un massimo  $M_r$  (risonanza) in  $\omega_r \neq \omega_n$

- Tale massimo esiste se  $|\zeta| < \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$

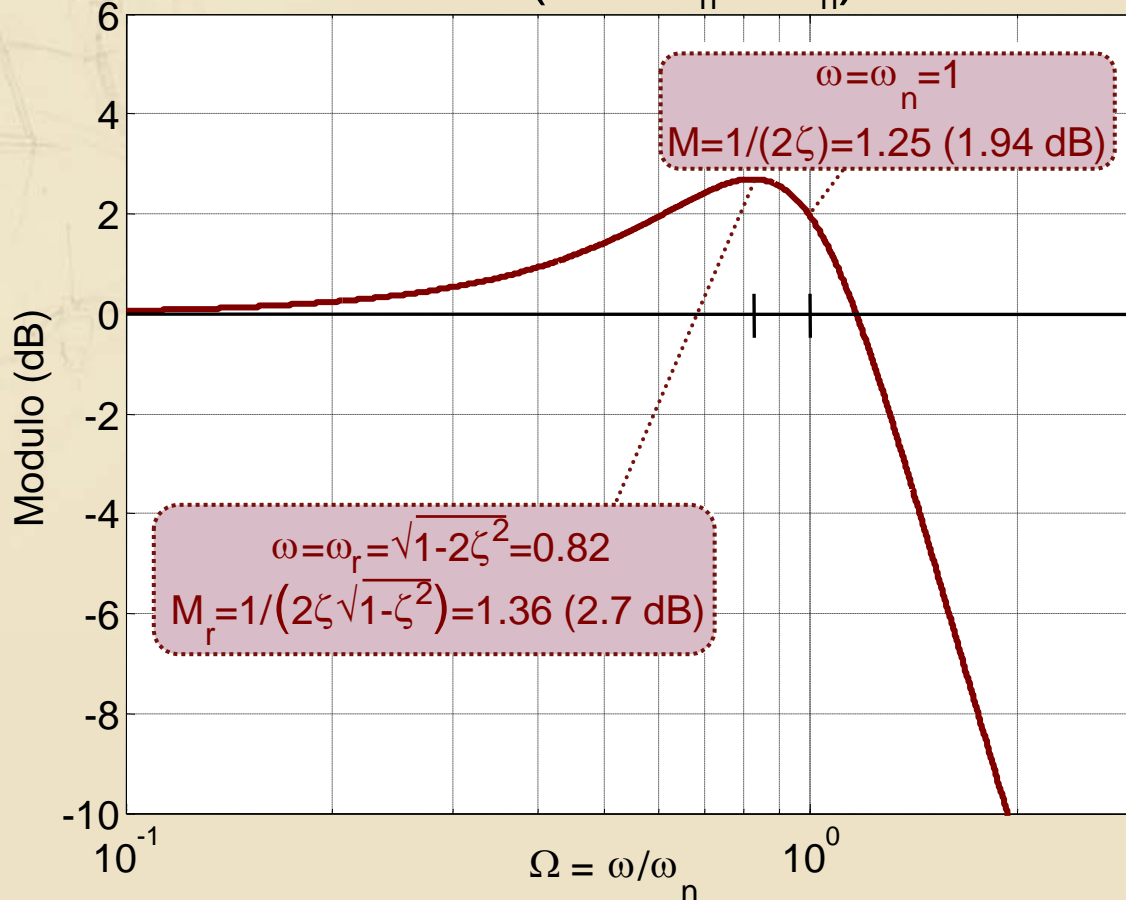
- $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Rightarrow \omega_r < \omega_n$

- $M_r \doteq M(\omega_r) = \frac{1}{2|\zeta|\sqrt{1 - \zeta^2}} \Big|_{\zeta < 1/\sqrt{2}} > 1 \text{ (} u_{\text{nat}} \text{)}$

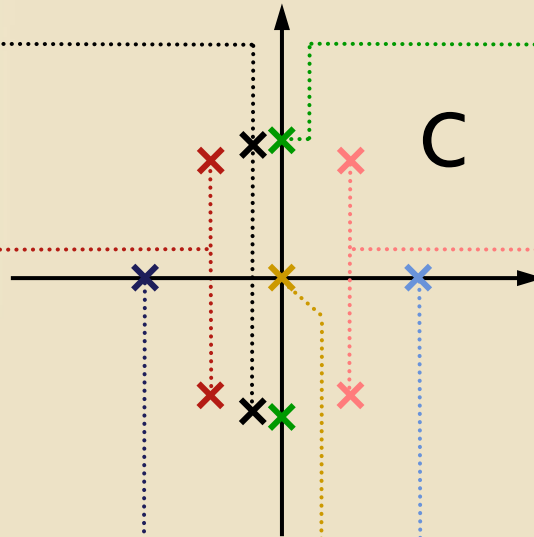
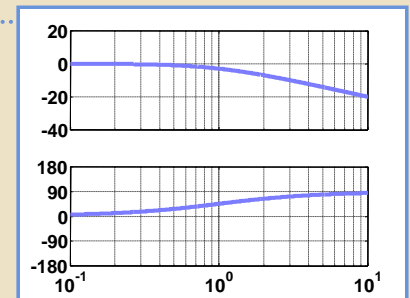
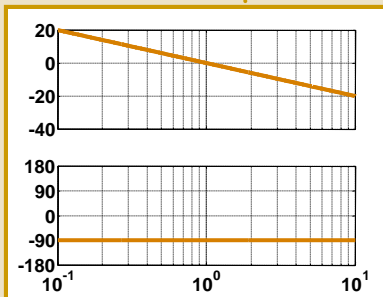
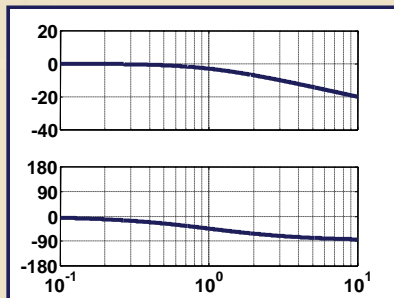
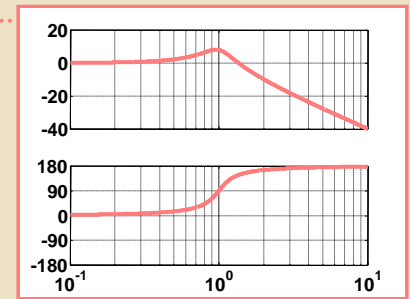
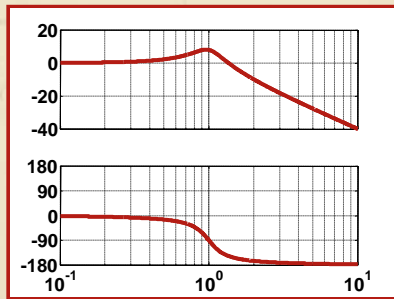
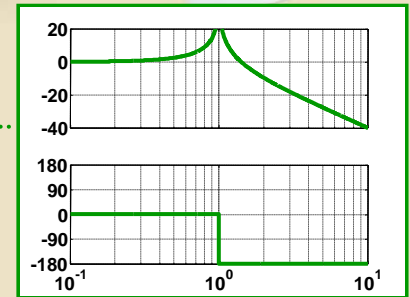
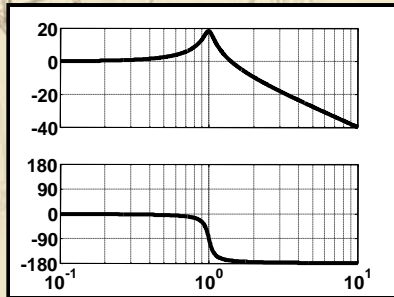
- Ovviamente  $M(\omega = \omega_n) < M(\omega = \omega_r)$

# DdB di poli complessi coniugati (9/9)

Risposta in frequenza di  $G = (1 + 2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2)^{-1}$ , con  $\zeta = 0.4$  e  $\omega_n = 1$



# DdB dei poli – specchio riassuntivo





## DdB degli zeri

- I DdB degli zeri si ottengono da quelli dei poli di pari valore cambiando segno sia ai moduli (in dB) che alle fasi (in gradi)



## Osservazioni importanti

- ▶ I DdB dei poli (zeri) di molteplicità  $i$  si ottengono da quelli del polo (zero) semplice moltiplicando i valori del modulo e della fase per  $i$
- ▶ Il DdB del modulo tende a  $\infty$  dB ( $\infty u_{\text{nat}}$ )  $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow$  c'è almeno un polo sull'asse immaginario (del piano complesso)
  - Polo reale in 0, semplice o multiplo (in tal caso il modulo  $\rightarrow \infty$  per  $\omega \rightarrow 0$ )
  - Coppia di poli immaginari coniugati in  $\pm j\omega_0$ , semplice o multipla (in tal caso il modulo  $\rightarrow \infty$  per  $\omega \rightarrow \omega_0$  e la fase presenta una discontinuità di  $\pm 180^\circ$  per  $\omega = \omega_0$ )



## Diagrammi di Bode di una generica fdt $G$

- ▶ Una generica fdt  $G(j\omega)$  può essere espressa come prodotto di fdt elementari (fattori)
- ▶ Il **modulo** di  $G$  in dB in una qualunque  $\omega$  è dato dalla **somma dei moduli in dB** delle fdt elementari nella stessa  $\omega$
- ▶ La **fase** di  $G$  in una qualunque  $\omega$  è data dalla **somma delle fasi** delle fdt  $G_i$  nella stessa  $\omega$
- ▶ I diagrammi di Bode di una generica fdt  $G$  possono quindi essere costruiti sommando i contributi delle singole fdt elementari





## DdB in Matlab

- I DdB possono essere tracciati in ambiente Matlab utilizzando il comando **bode**:  
bode(G)  
(per la sintassi completa consultare il relativo help)