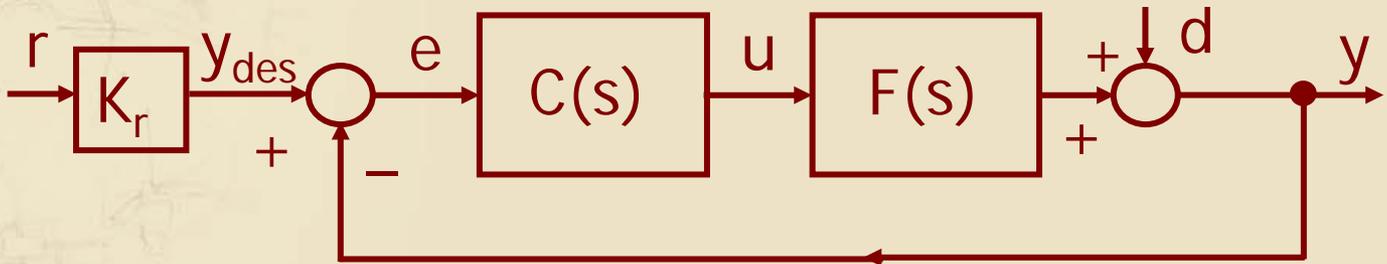


**Regime permanente e transitorio**

**Precisione in regime permanente**

# Schema di controllo

► Si consideri il consueto schema di controllo:

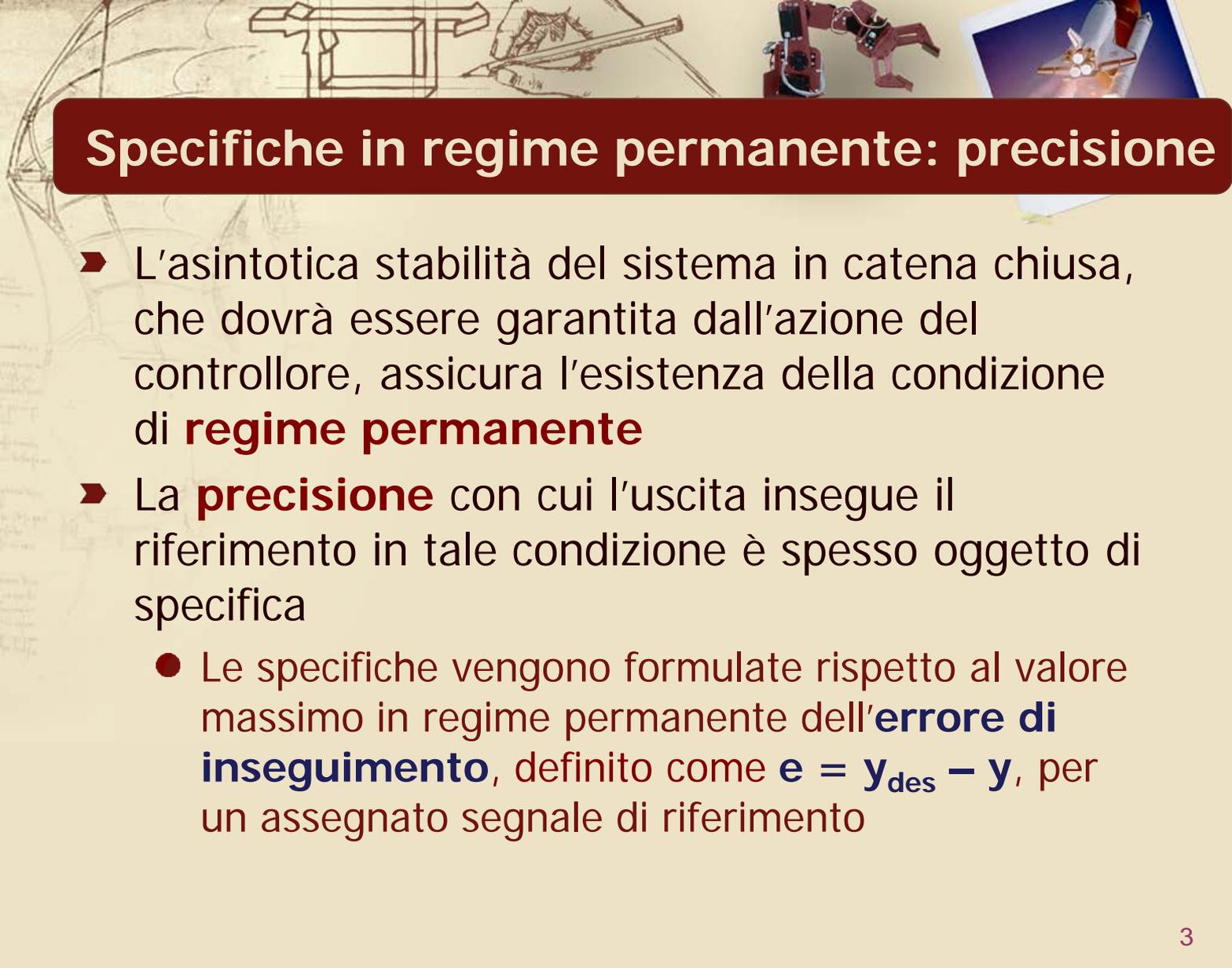


$$G_a(s) = C(s) \cdot F(s)$$

Fdt d'anello

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)}; \quad W_y(s) = \frac{y(s)}{y_{des}(s)}$$

Fdt in catena chiusa



## Specifiche in regime permanente: precisione

- L'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa, che dovrà essere garantita dall'azione del controllore, assicura l'esistenza della condizione di **regime permanente**
- La **precisione** con cui l'uscita insegue il riferimento in tale condizione è spesso oggetto di specifica
  - Le specifiche vengono formulate rispetto al valore massimo in regime permanente dell'**errore di inseguimento**, definito come  $\mathbf{e} = \mathbf{y}_{\text{des}} - \mathbf{y}$ , per un assegnato segnale di riferimento

# Segnali canonici di riferimento

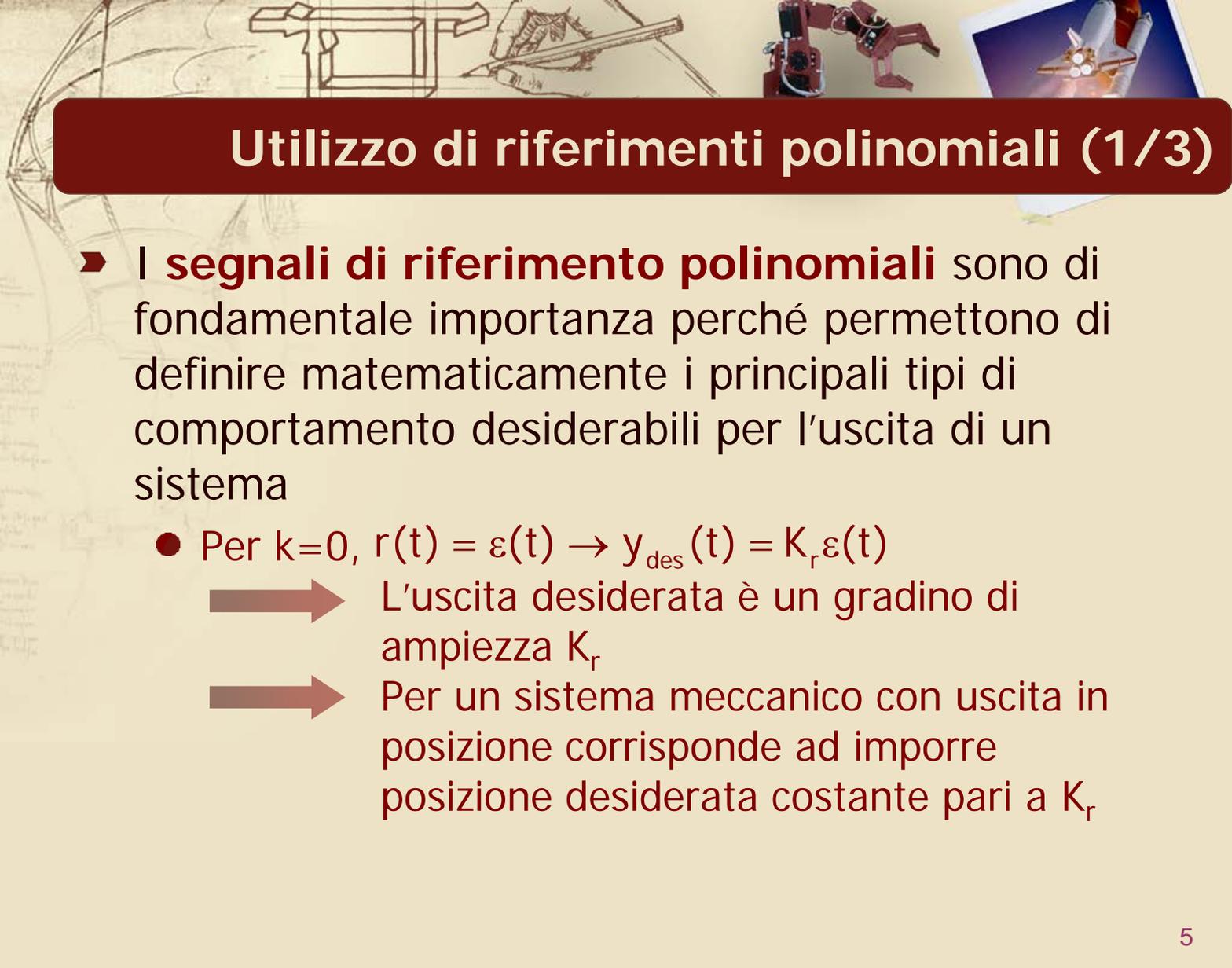
- Le famiglie di segnali canonici di riferimento di maggiore interesse pratico sono costituite dai **segnali polinomiali** e dai **segnali sinusoidali**

$$r(t) = \frac{t^k}{k!} \rightarrow r(s) = \frac{1}{s^{k+1}}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_{\text{des}} = K_r r$$

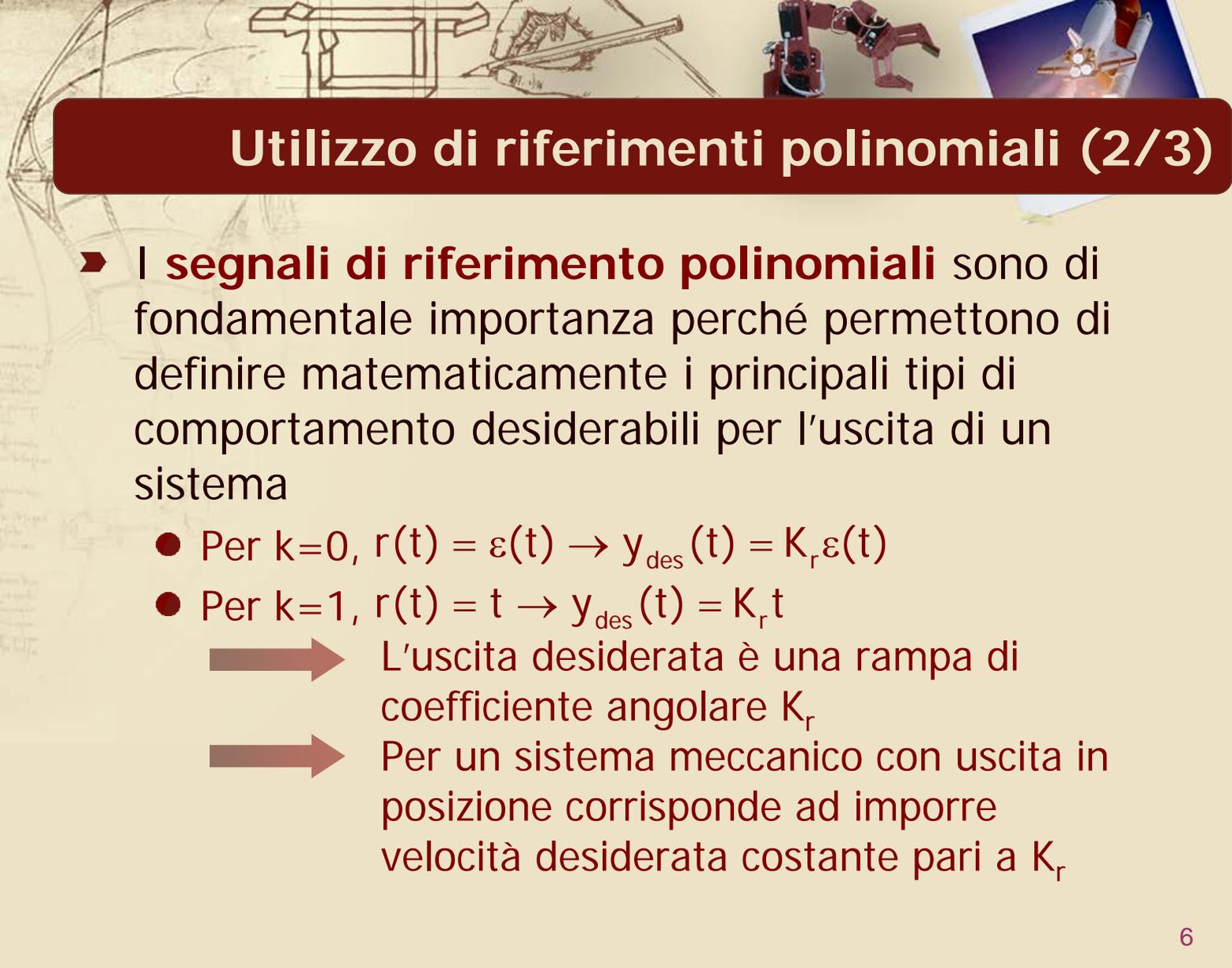
$$r(t) = \sin(\omega_0 t) \rightarrow r(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Il **fattore di scala  $K_r$**  permette di assegnare a  $y_{\text{des}}$  l'ampiezza desiderata



## Utilizzo di riferimenti polinomiali (1/3)

- I **segnali di riferimento polinomiali** sono di fondamentale importanza perché permettono di definire matematicamente i principali tipi di comportamento desiderabili per l'uscita di un sistema
  - Per  $k=0$ ,  $r(t) = \varepsilon(t) \rightarrow y_{\text{des}}(t) = K_r \varepsilon(t)$ 
    - ➔ L'uscita desiderata è un gradino di ampiezza  $K_r$
    - ➔ Per un sistema meccanico con uscita in posizione corrisponde ad imporre posizione desiderata costante pari a  $K_r$



## Utilizzo di riferimenti polinomiali (2/3)

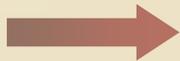
► I **segnali di riferimento polinomiali** sono di fondamentale importanza perché permettono di definire matematicamente i principali tipi di comportamento desiderabili per l'uscita di un sistema

- Per  $k=0$ ,  $r(t) = \varepsilon(t) \rightarrow y_{\text{des}}(t) = K_r \varepsilon(t)$

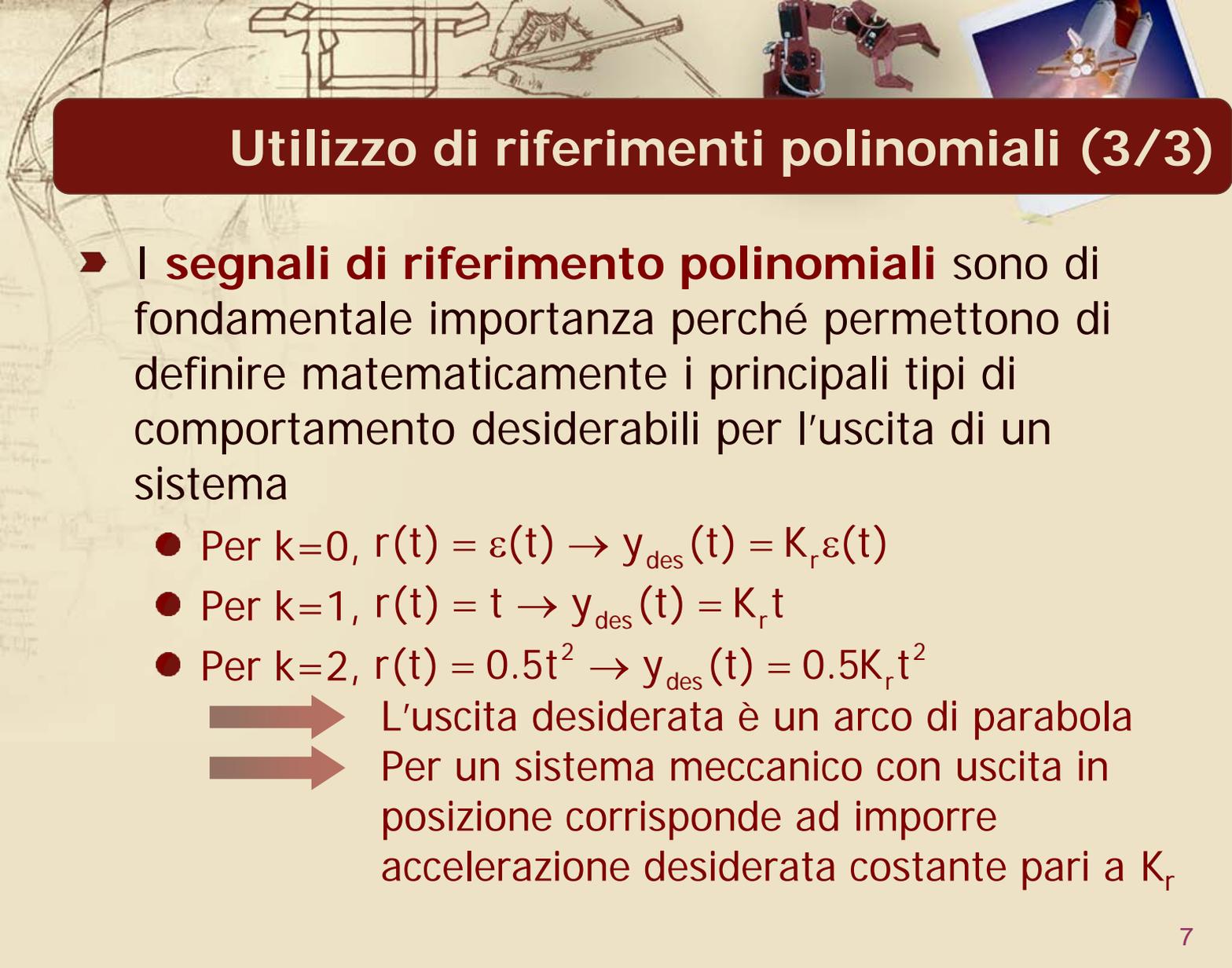
- Per  $k=1$ ,  $r(t) = t \rightarrow y_{\text{des}}(t) = K_r t$



L'uscita desiderata è una rampa di coefficiente angolare  $K_r$



Per un sistema meccanico con uscita in posizione corrisponde ad imporre velocità desiderata costante pari a  $K_r$



## Utilizzo di riferimenti polinomiali (3/3)

- I **segnali di riferimento polinomiali** sono di fondamentale importanza perché permettono di definire matematicamente i principali tipi di comportamento desiderabili per l'uscita di un sistema
- Per  $k=0$ ,  $r(t) = \varepsilon(t) \rightarrow y_{\text{des}}(t) = K_r \varepsilon(t)$
  - Per  $k=1$ ,  $r(t) = t \rightarrow y_{\text{des}}(t) = K_r t$
  - Per  $k=2$ ,  $r(t) = 0.5t^2 \rightarrow y_{\text{des}}(t) = 0.5K_r t^2$ 
    - ➔ L'uscita desiderata è un arco di parabola
    - ➔ Per un sistema meccanico con uscita in posizione corrisponde ad imporre accelerazione desiderata costante pari a  $K_r$



## Un esempio in ambito robotico (1/4)

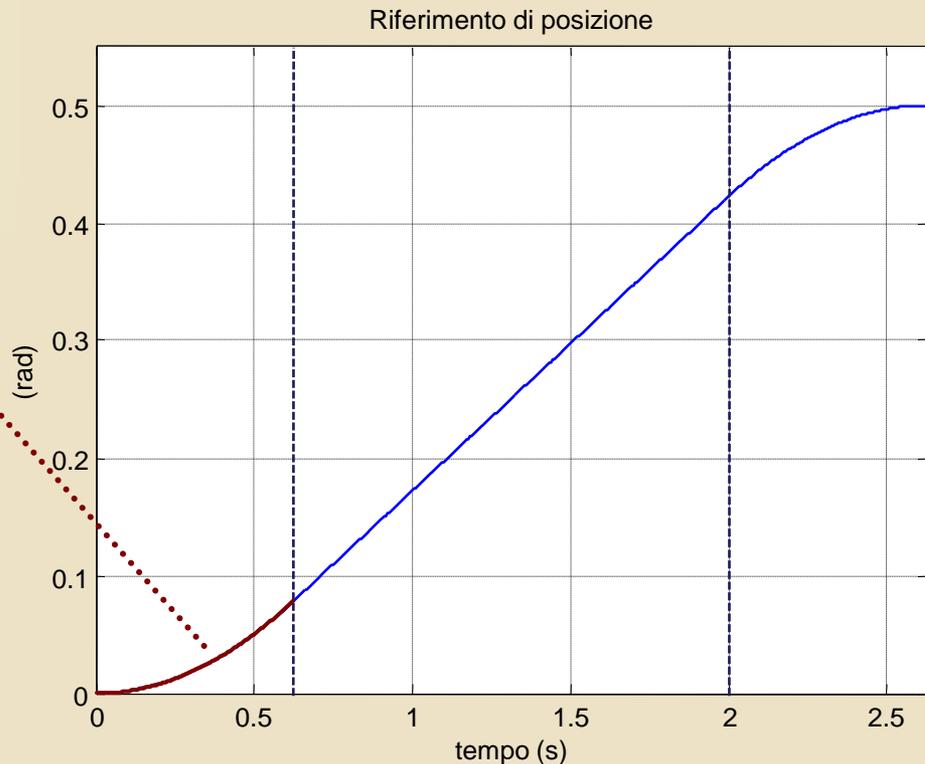
- Per spostare un braccio robotico dalla posizione iniziale ad una posizione finale desiderata viene solitamente utilizzato un **profilo di riferimento in posizione di tipo 2-1-2** (cioè formato dalla sequenza di tre polinomi di ordine 2, 1, 2, rispettivamente), generato in modo da rispettare i vincoli di velocità ed accelerazione (e decelerazione) massime consentite
- Tale profilo corrisponde ad un **profilo in velocità di tipo trapezoidale**, ovvero ad un **profilo di riferimento in accelerazione formato da una sequenza di gradini**

## Un esempio in ambito robotico (2/4)

- Profilo di posizione per uno spostamento da 0 a 0.5 rad

Polinomio di 2° grado (arco di parabola)

In questa fase la velocità cresce linearmente fino al valore max consentito

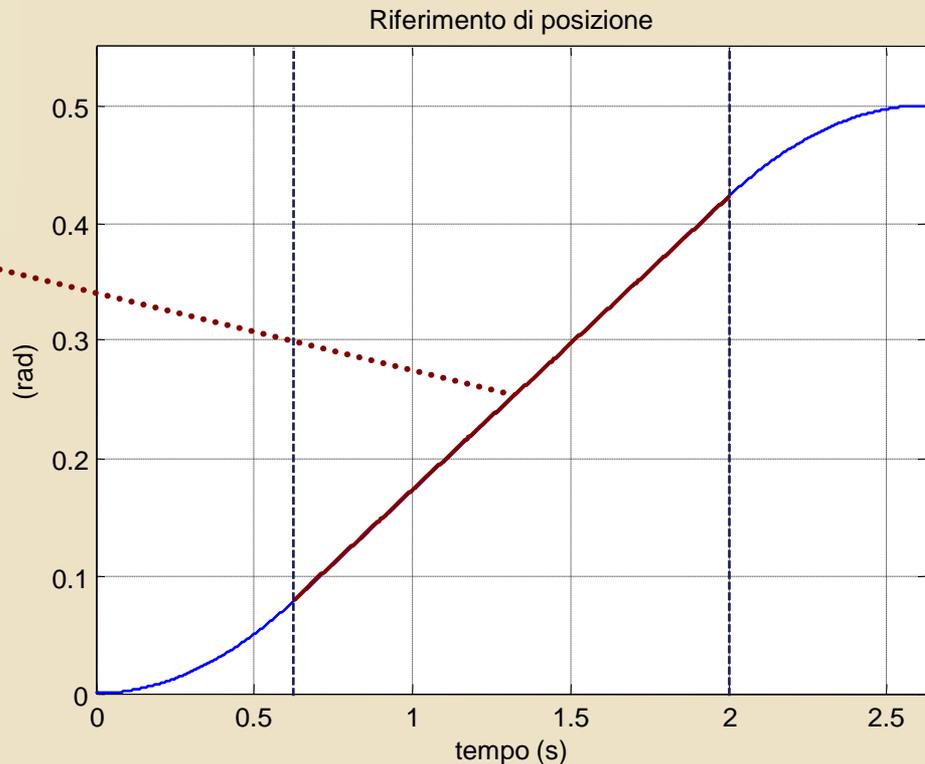


## Un esempio in ambito robotico (2/4)

- Profilo di posizione per uno spostamento da 0 a 0.5 rad

Polinomio di  
1° grado  
(rampa)

In questa fase la  
velocità rimane  
costante, pari al  
valore massimo  
consentito

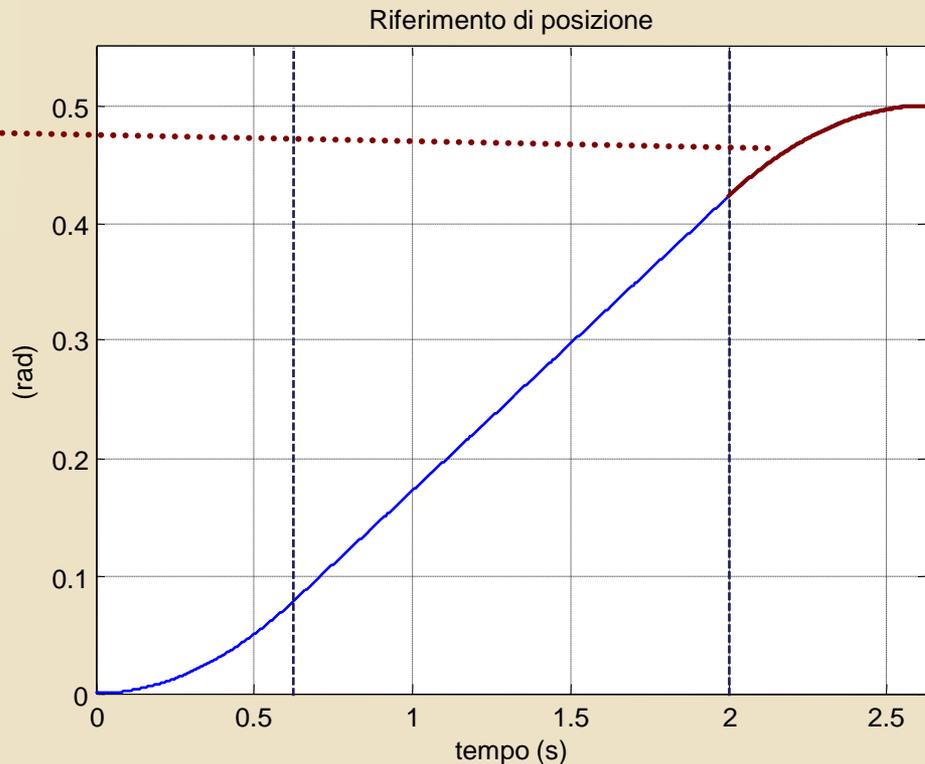


## Un esempio in ambito robotico (2/4)

- Profilo di posizione per uno spostamento da 0 a 0.5 rad

Polinomio di 2° grado (arco di parabola)

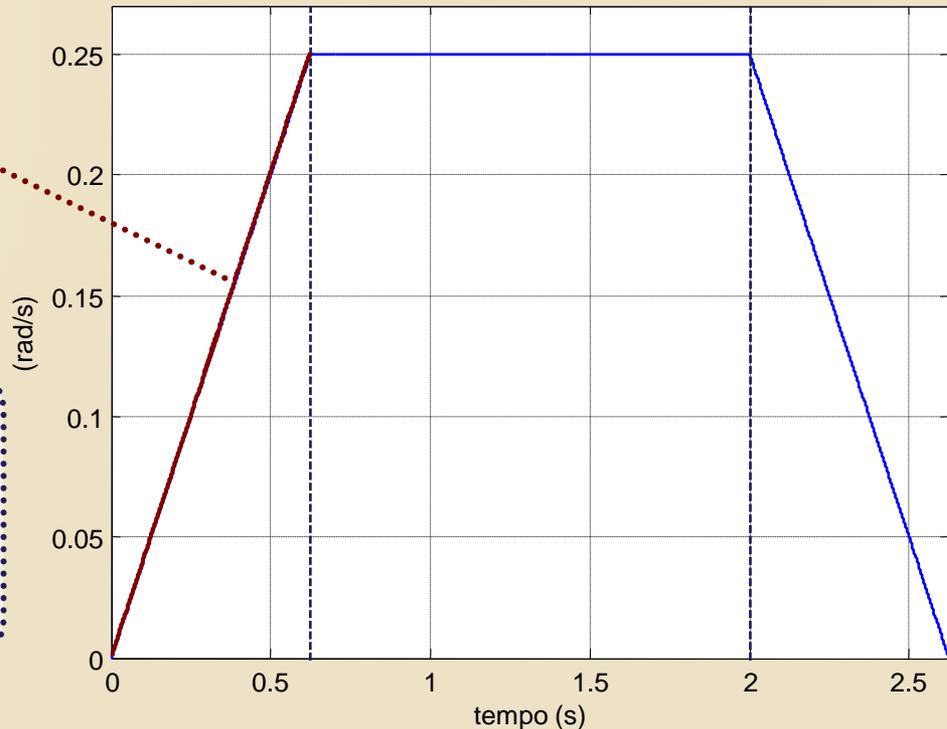
In questa fase la velocità decresce dal valore massimo fino a zero



# Un esempio in ambito robotico (3/4)

- Profilo di velocità corrispondente, con  $v_{\max} = 0.25 \text{ rad/s}$

Riferimento di velocità



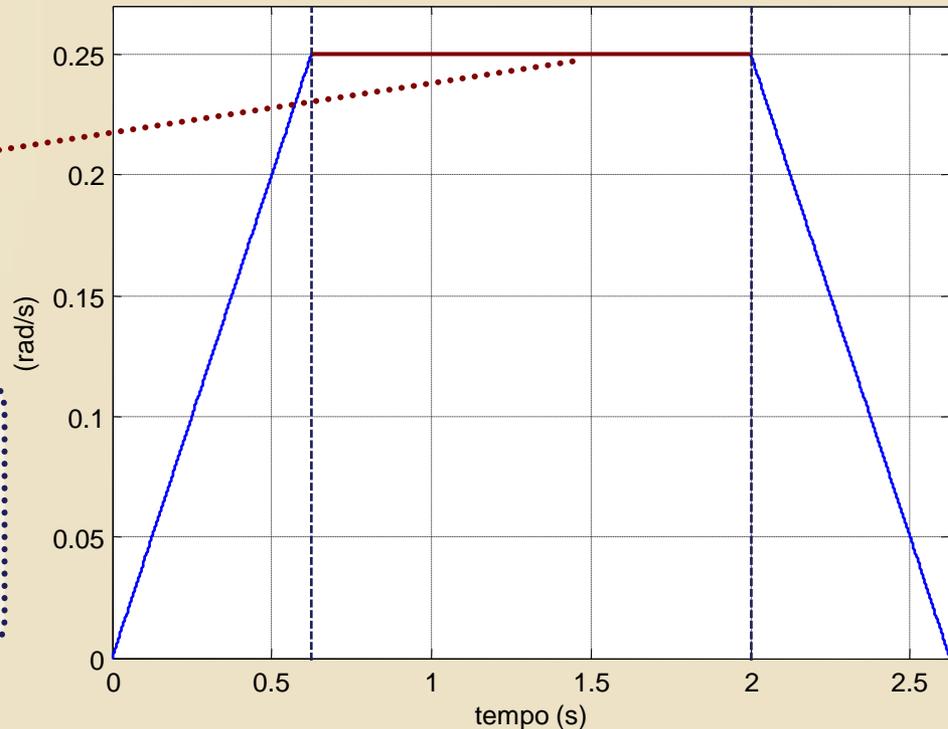
Polinomio di 1° grado (rampa)

In questa fase l'accelerazione è costante, pari al valore massimo consentito

# Un esempio in ambito robotico (3/4)

- Profilo di velocità corrispondente, con  $v_{\max} = 0.25 \text{ rad/s}$

Riferimento di velocità



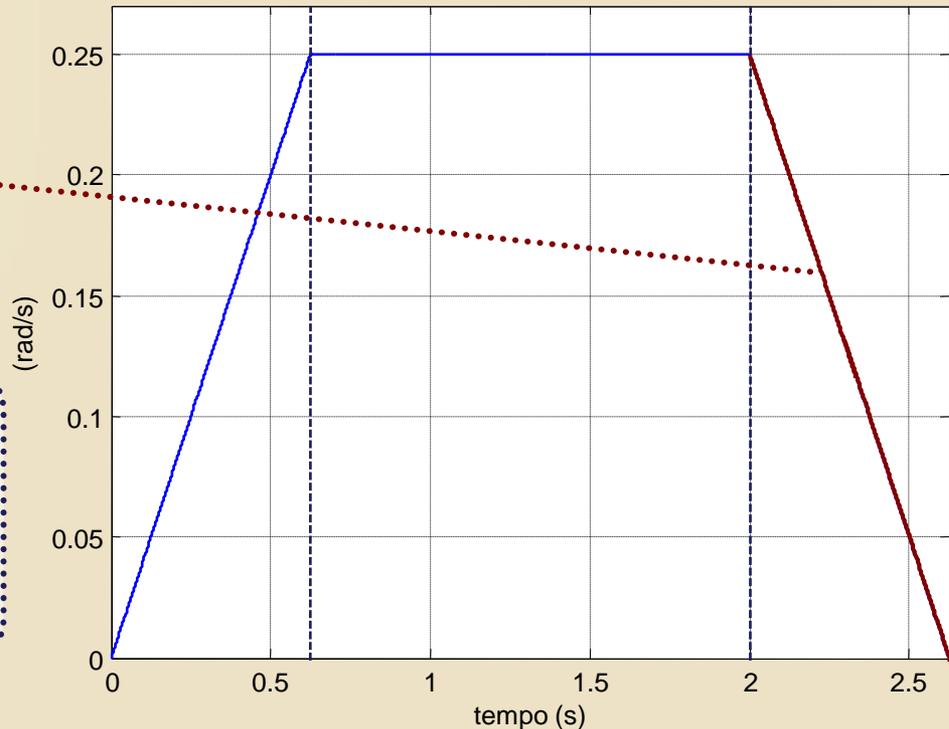
Polinomio di grado zero (gradino)

In questa fase l'accelerazione è nulla mentre la velocità rimane massima

# Un esempio in ambito robotico (3/4)

- Profilo di velocità corrispondente, con  $v_{\max} = 0.25 \text{ rad/s}$

Riferimento di velocità



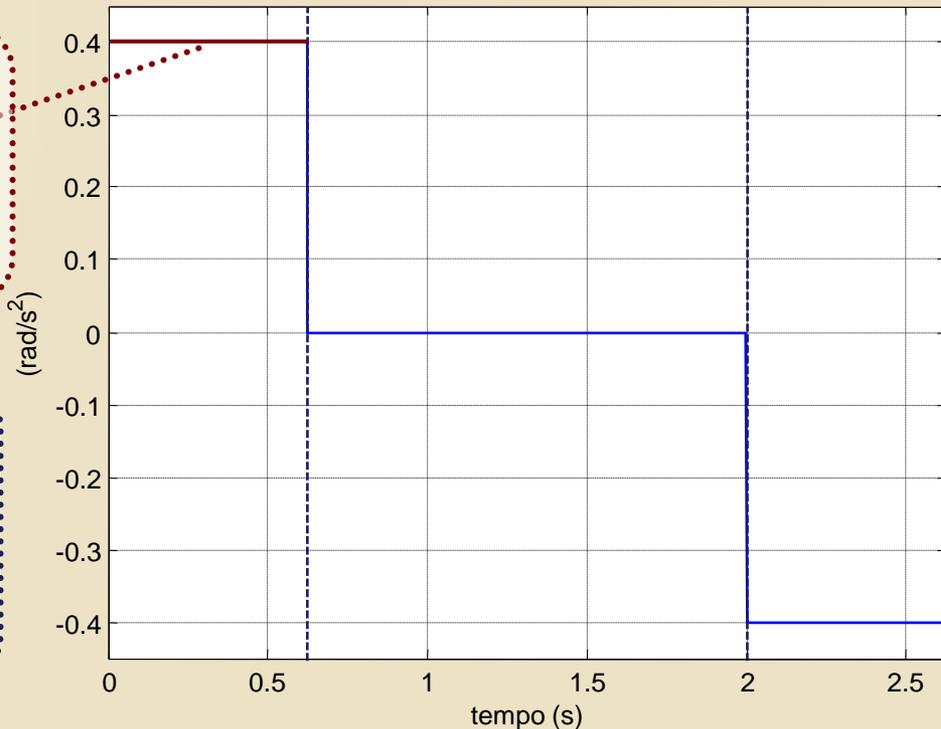
Polinomio di  
1° grado  
(rampa)

In questa fase la  
decelerazione è  
costante, pari al  
valore massimo  
consentito

# Un esempio in ambito robotico (4/4)

- Profilo di accelerazione corrispondente, con  $a_{\max} = 0.4 \text{ rad/s}^2$

Riferimento di accelerazione



Polinomio di grado zero (gradino di ampiezza  $a_{\max}$ )

Questa fase termina quando la velocità raggiunge il suo valore massimo

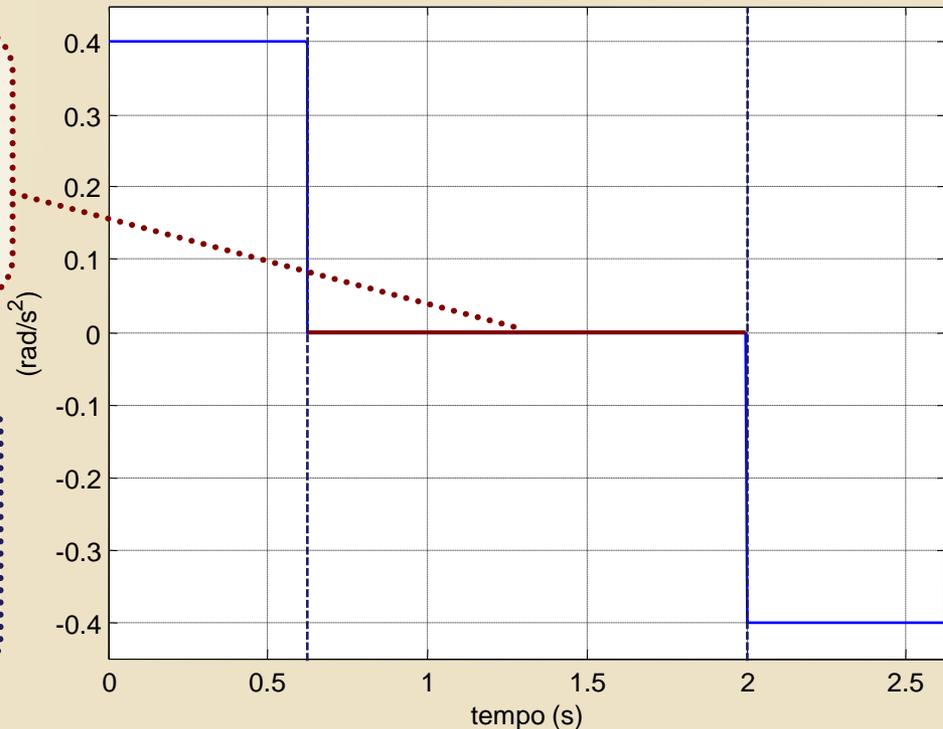
# Un esempio in ambito robotico (4/4)

- Profilo di accelerazione corrispondente, con  $a_{\max} = 0.4 \text{ rad/s}^2$

Riferimento di accelerazione

Polinomio di grado zero (gradino di ampiezza nulla)

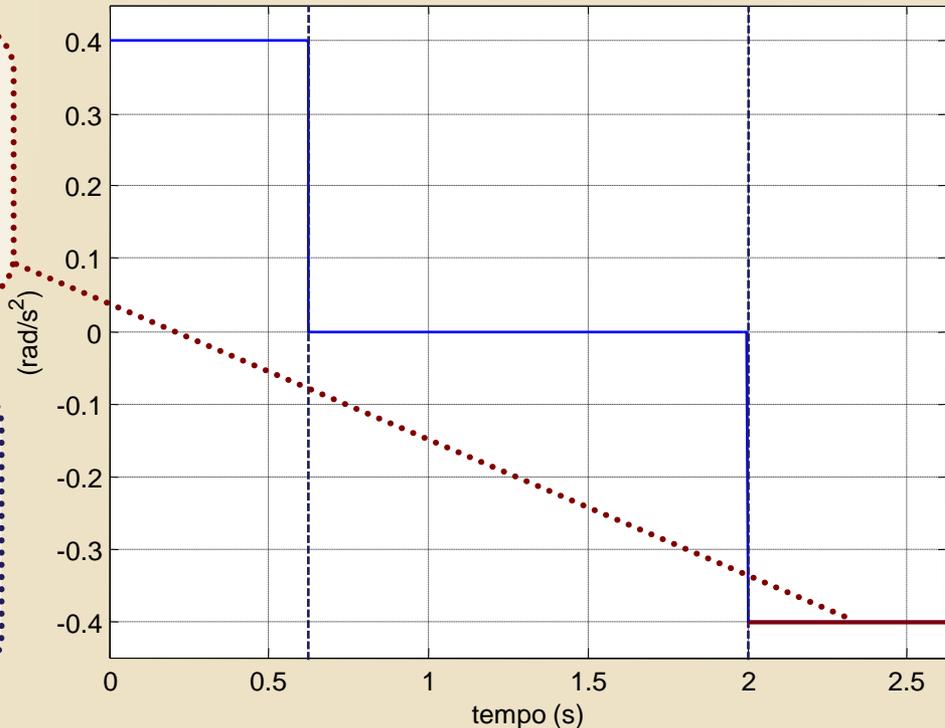
In questa fase la velocità è mantenuta pari al suo valore massimo



# Un esempio in ambito robotico (4/4)

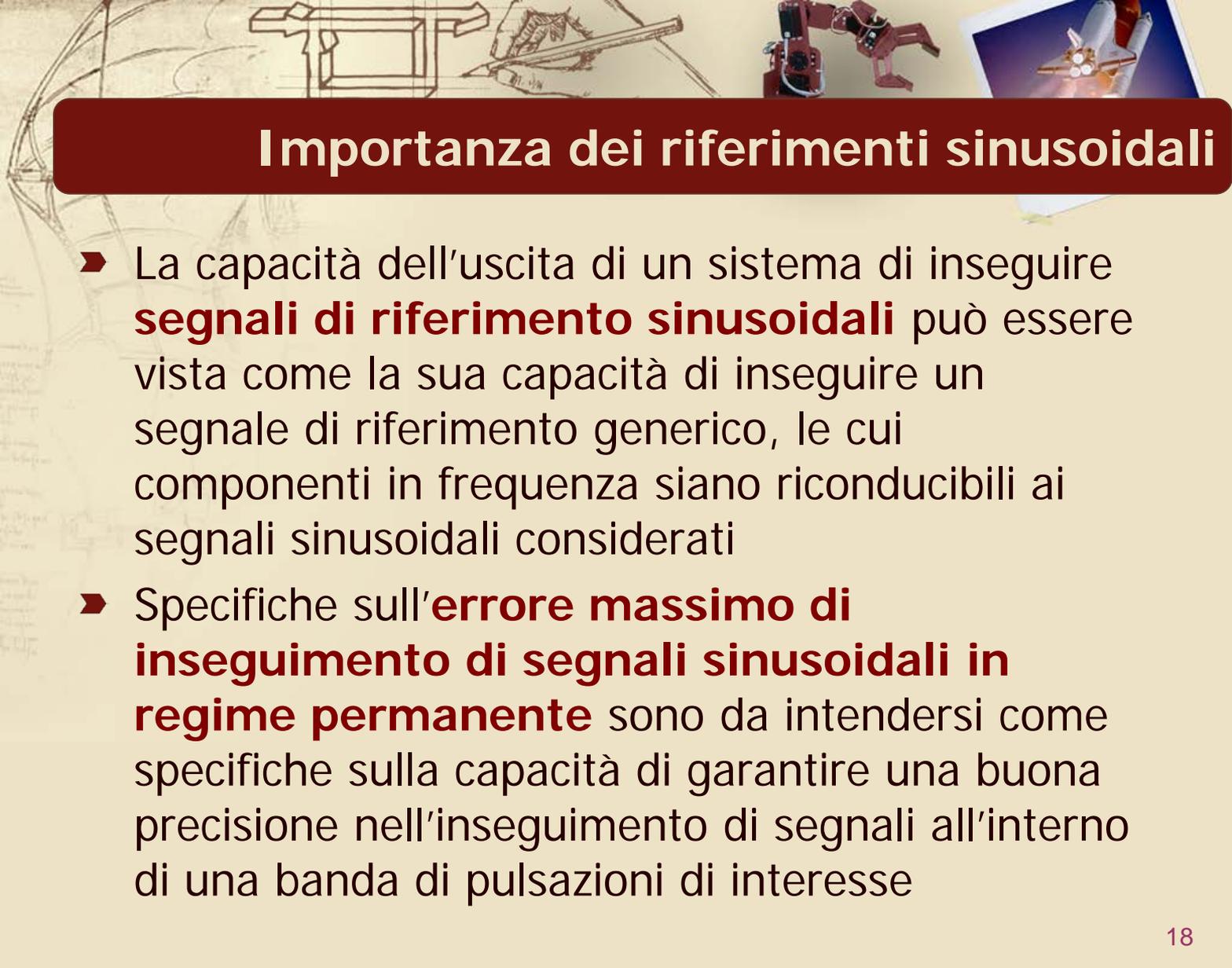
- Profilo di accelerazione corrispondente, con  $a_{\max} = 0.4 \text{ rad/s}^2$

Riferimento di accelerazione



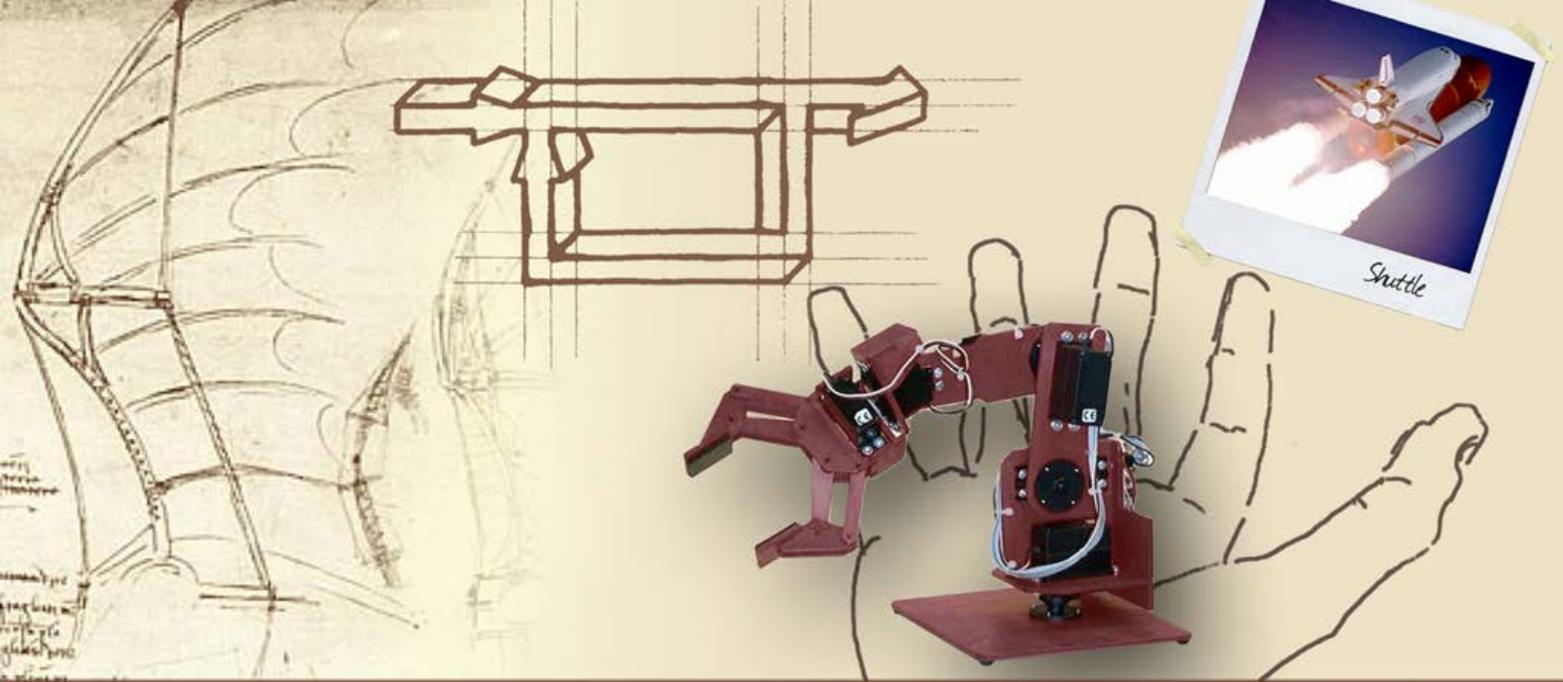
Polinomio di grado zero (gradino di ampiezza  $-a_{\max}$ )

La velocità viene riportata a zero mentre lo spostamento è completato



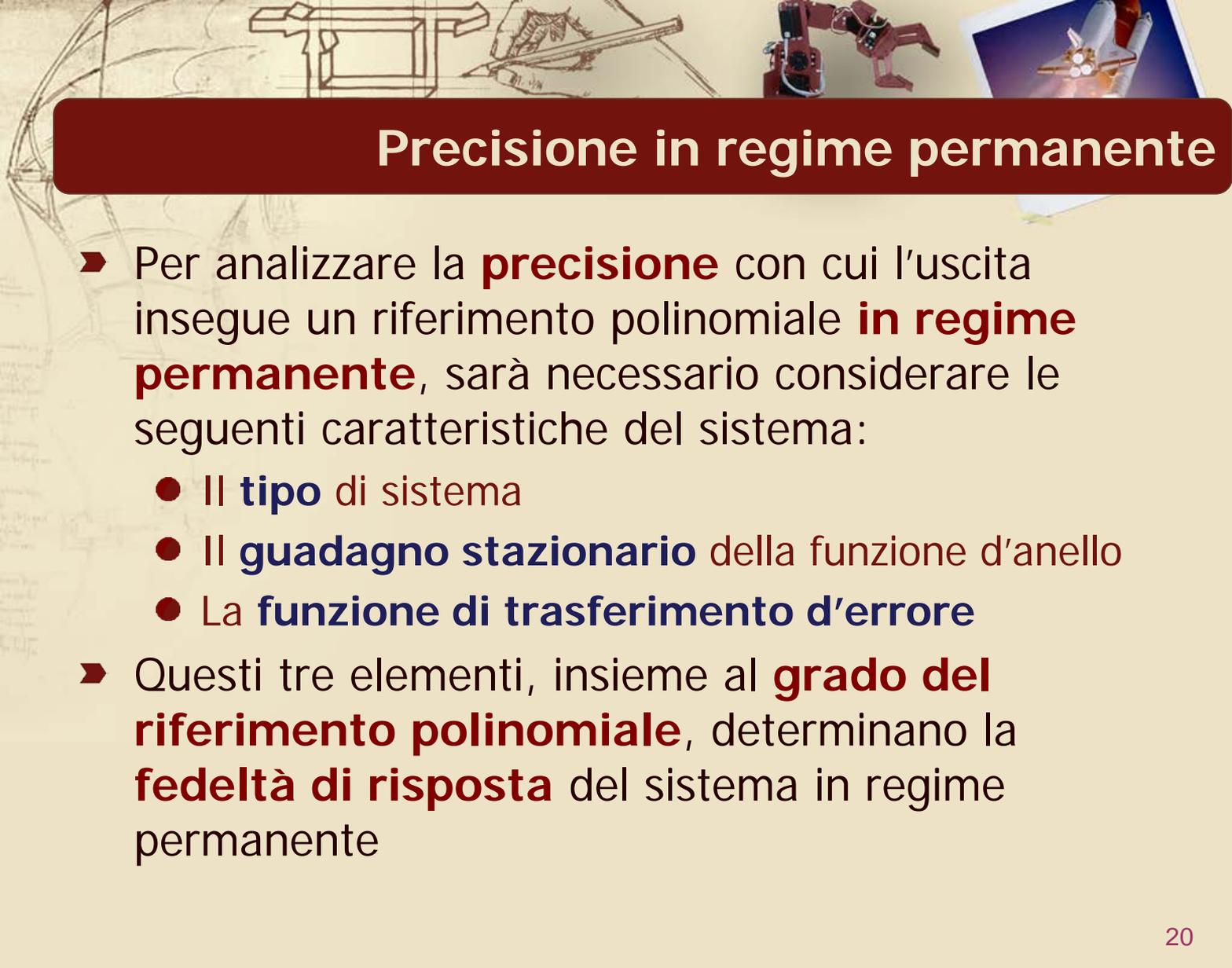
# Importanza dei riferimenti sinusoidali

- La capacità dell'uscita di un sistema di inseguire **segnali di riferimento sinusoidali** può essere vista come la sua capacità di inseguire un segnale di riferimento generico, le cui componenti in frequenza siano riconducibili ai segnali sinusoidali considerati
- Specifiche sull'**errore massimo di inseguimento di segnali sinusoidali in regime permanente** sono da intendersi come specifiche sulla capacità di garantire una buona precisione nell'inseguimento di segnali all'interno di una banda di pulsazioni di interesse



**Precisione in regime permanente**

**Inseguimento di segnali polinomiali**

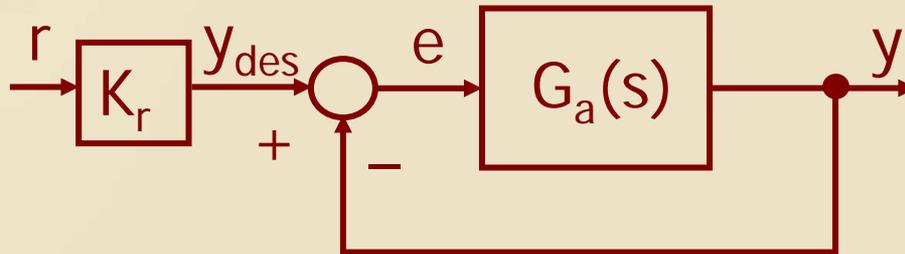


## Precisione in regime permanente

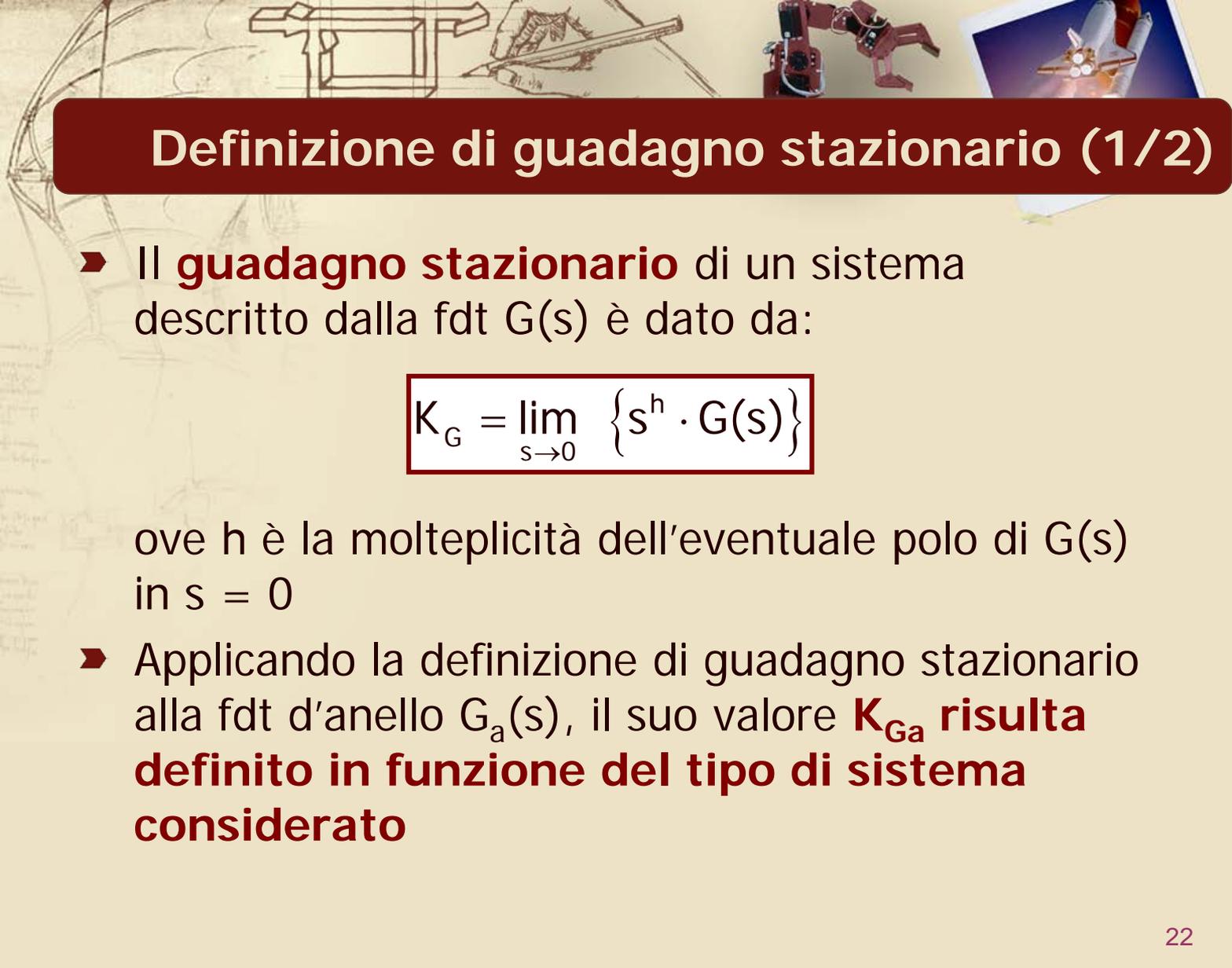
- Per analizzare la **precisione** con cui l'uscita insegue un riferimento polinomiale **in regime permanente**, sarà necessario considerare le seguenti caratteristiche del sistema:
  - Il **tipo** di sistema
  - Il **guadagno stazionario** della funzione d'anello
  - La **funzione di trasferimento d'errore**
- Questi tre elementi, insieme al **grado del riferimento polinomiale**, determinano la **fedeltà di risposta** del sistema in regime permanente

## Definizione di "tipo" di sistema

- Si consideri il consueto schema di controllo, in assenza di disturbi, con  $G_a(s) = C(s)F(s)$  in forma minima, priva di zeri in  $s = 0$  e con  $r$  appartenente alla famiglia dei segnali polinomiali canonici:



- Il **sistema** chiuso in retroazione è **di tipo h** se la funzione  $G_a(s)$  ha un polo di molteplicità  $h$  in  $s = 0$



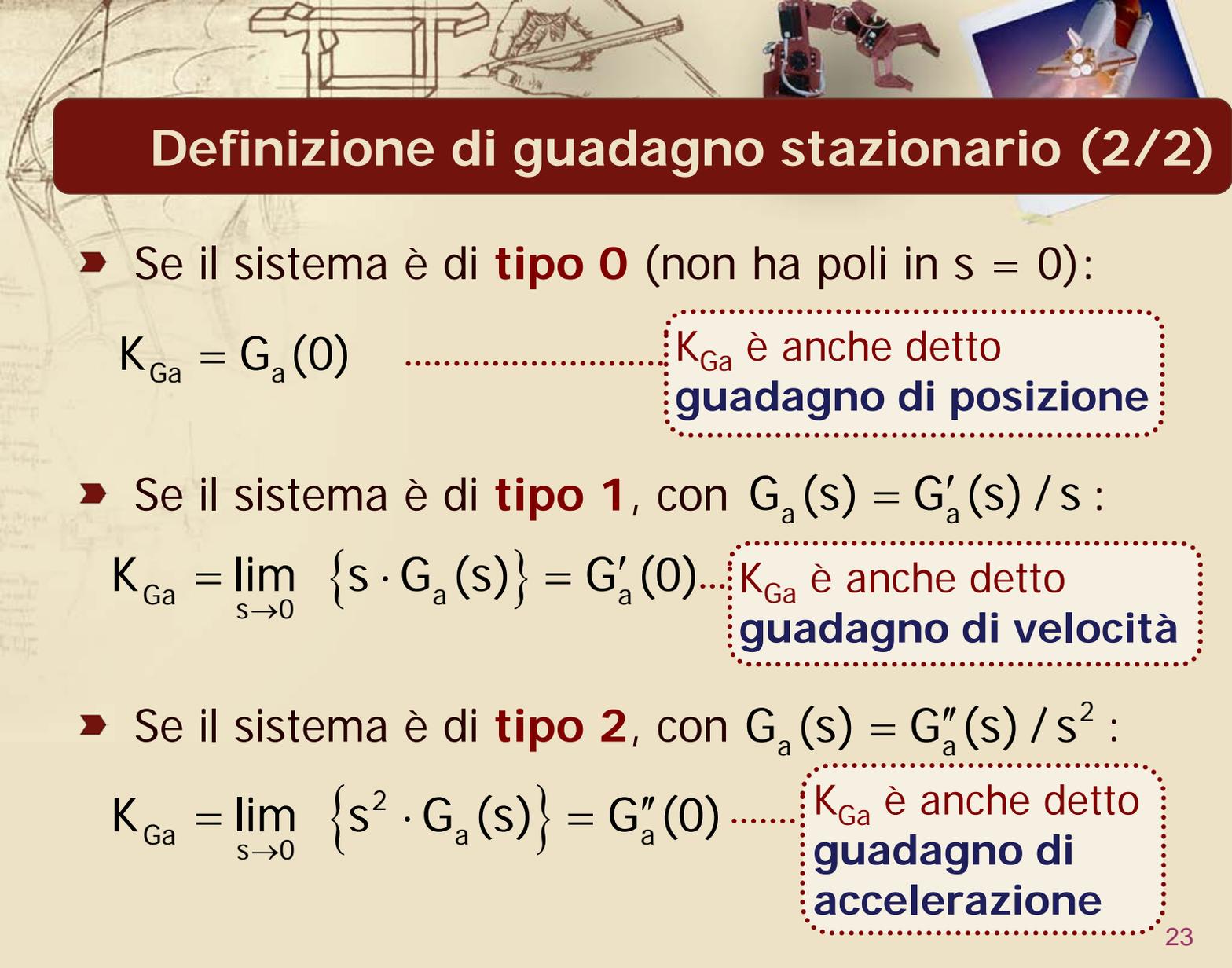
## Definizione di guadagno stazionario (1/2)

- Il **guadagno stazionario** di un sistema descritto dalla fdt  $G(s)$  è dato da:

$$K_G = \lim_{s \rightarrow 0} \{s^h \cdot G(s)\}$$

ove  $h$  è la molteplicità dell'eventuale polo di  $G(s)$  in  $s = 0$

- Applicando la definizione di guadagno stazionario alla fdt d'anello  $G_a(s)$ , il suo valore  **$K_{G_a}$  risulta definito in funzione del tipo di sistema considerato**



## Definizione di guadagno stazionario (2/2)

- Se il sistema è di **tipo 0** (non ha poli in  $s = 0$ ):

$$K_{Ga} = G_a(0)$$

$K_{Ga}$  è anche detto  
**guadagno di posizione**

- Se il sistema è di **tipo 1**, con  $G_a(s) = G'_a(s) / s$ :

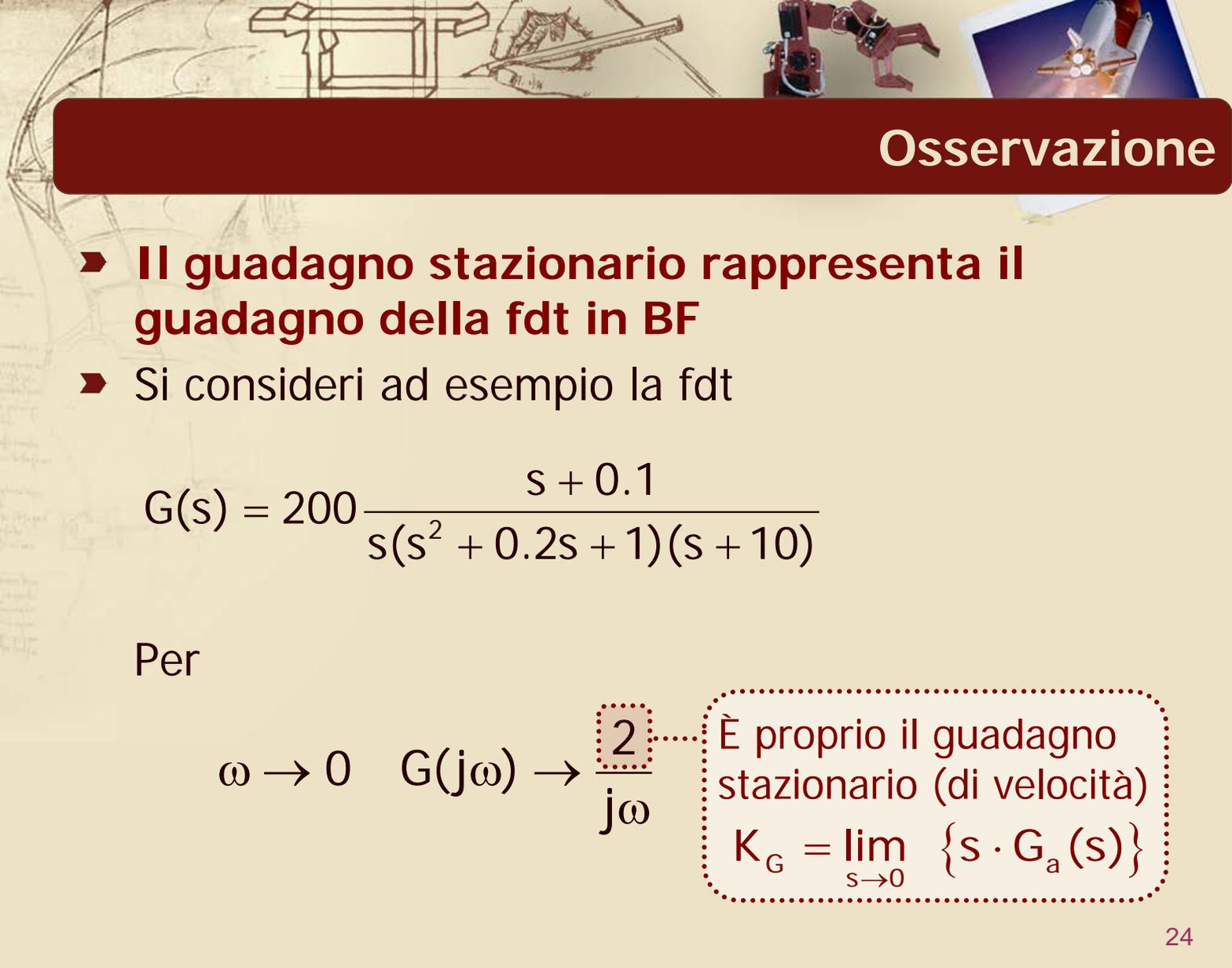
$$K_{Ga} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot G_a(s)\} = G'_a(0)$$

$K_{Ga}$  è anche detto  
**guadagno di velocità**

- Se il sistema è di **tipo 2**, con  $G_a(s) = G''_a(s) / s^2$ :

$$K_{Ga} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s^2 \cdot G_a(s)\} = G''_a(0)$$

$K_{Ga}$  è anche detto  
**guadagno di accelerazione**



## Osservazione

- **Il guadagno stazionario rappresenta il guadagno della fdt in BF**
- Si consideri ad esempio la fdt

$$G(s) = 200 \frac{s + 0.1}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$

Per

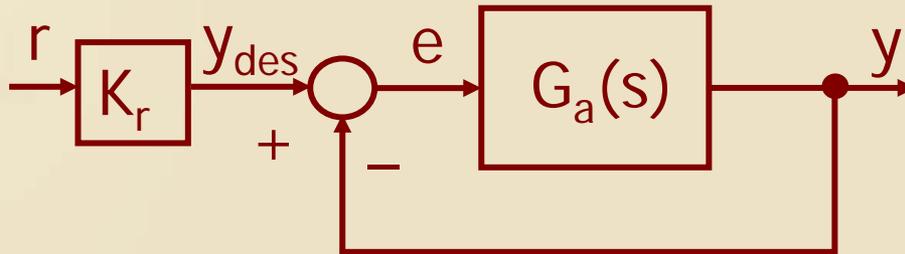
$$\omega \rightarrow 0 \quad G(j\omega) \rightarrow \frac{2}{j\omega}$$

È proprio il guadagno stazionario (di velocità)

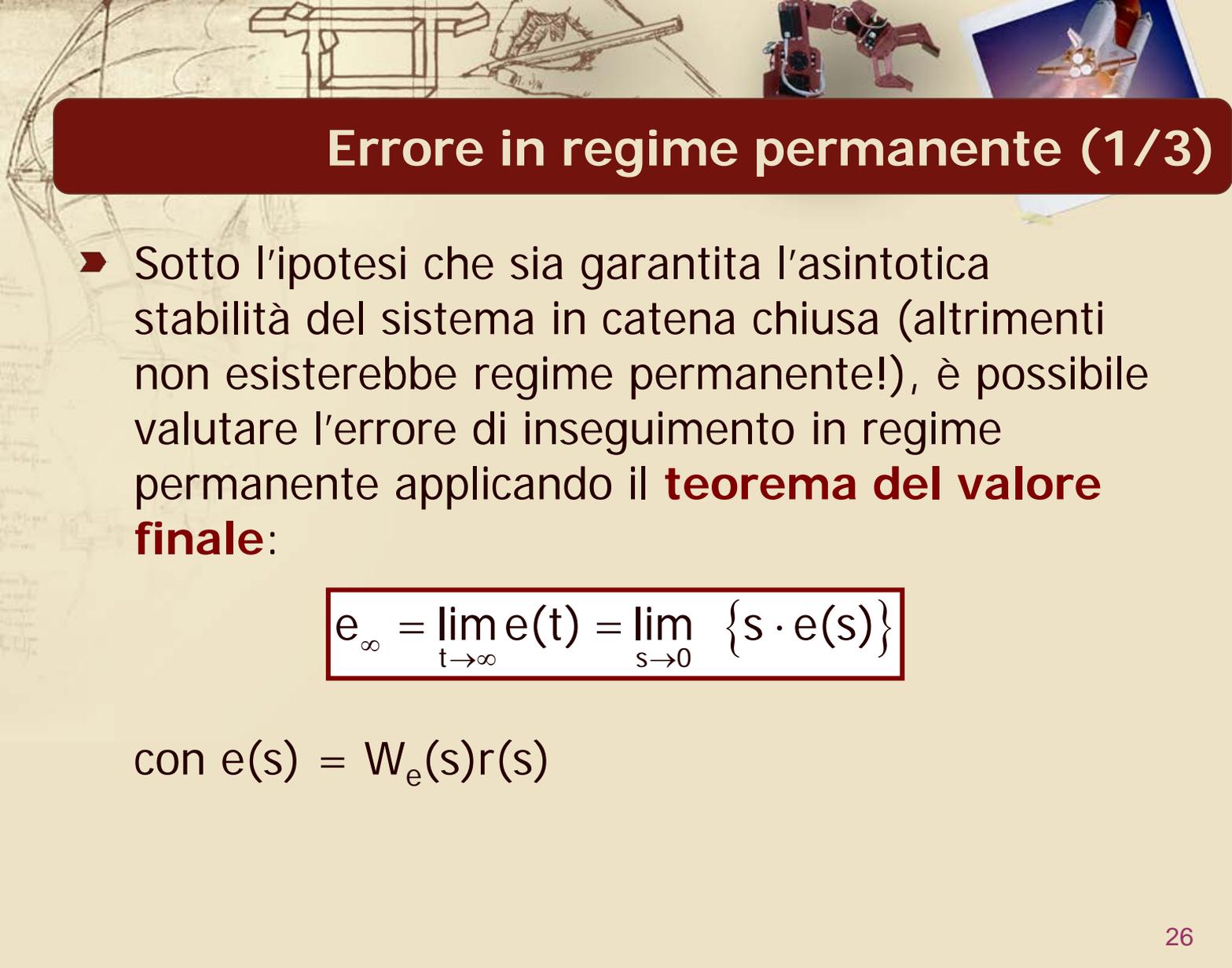
$$K_G = \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot G_a(s)\}$$

# Funzione di trasferimento d'errore

- La **funzione di trasferimento d'errore** può essere calcolata applicando le regole di algebra dei blocchi allo schema di controllo:



$$W_{e,y}(s) = \frac{e(s)}{y_{\text{des}}(s)} = \frac{1}{1 + G_a(s)}$$
$$W_e(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{K_r}{1 + G_a(s)}$$

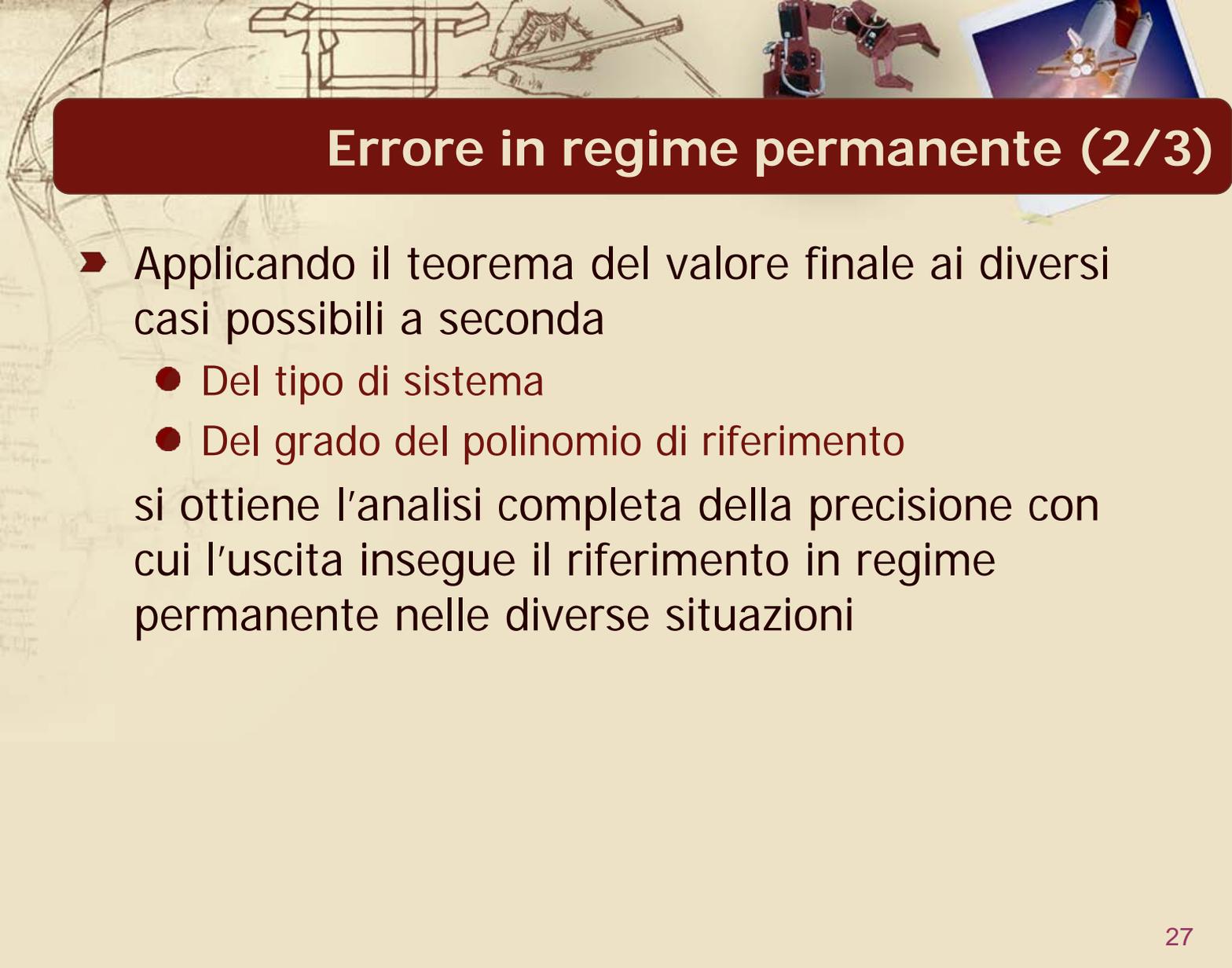


## Errore in regime permanente (1/3)

- Sotto l'ipotesi che sia garantita l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa (altrimenti non esisterebbe regime permanente!), è possibile valutare l'errore di inseguimento in regime permanente applicando il **teorema del valore finale**:

$$e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot e(s)\}$$

con  $e(s) = W_e(s)r(s)$



## Errore in regime permanente (2/3)

- Applicando il teorema del valore finale ai diversi casi possibili a seconda
    - Del tipo di sistema
    - Del grado del polinomio di riferimento
- si ottiene l'analisi completa della precisione con cui l'uscita insegue il riferimento in regime permanente nelle diverse situazioni

## Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
Sistema	Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
	Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
	Tipo 2	0	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$

# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

Riferimento  $r(t)$

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
<b>Sistema</b>	<b>Tipo 0</b>	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
	Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
	Tipo 2:	$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{K_r}{1 + G_a(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right\} = \frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$		

# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
Sistema	Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
	Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
	Tipo 2	$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{K_r}{1 + G_a(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \infty$		

# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
Sistema	Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
	Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
	Tipo 2	$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \cdot \frac{K_r}{1 + G_a(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \infty$		

# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

Riferimento  $r(t)$

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
Sistema	Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
	Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
	Tipo 2	$\frac{K_r}{2K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{K_r}{1 + G'_a(s) / s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s \cdot K_r}{s + G'_a(s)} \right\} = 0$$

# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

Riferimento  $r(t)$

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
Sistema	Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
	Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
	Tipo 2	0	0	$\infty$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{K_r}{1 + G'_a(s)/s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cancel{s} \cdot K_r}{s + G'_a(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right\} = \frac{K_r}{K_{Ga}}$$

# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

Riferimento  $r(t)$

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
<b>Sistema</b>	Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
	<b>Tipo 1</b>	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{K_r}{1 + G'_a(s)/s} \cdot \frac{1}{s^{\cancel{2}}} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cancel{s} \cdot K_r}{s + G'_a(s)} \cdot \frac{1}{s^{\cancel{1}}} \right\} = \infty$$

# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

Riferimento  $r(t)$

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
	Tipo 0	$\frac{K_r}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
Sis	Tipo 2	0	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{K_r}{1 + G_a''(s) / s^2} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s^2 \cdot K_r}{s^2 + G_a''(s)} \right\} = 0$$

# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

Riferimento  $r(t)$

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
	Tipo 0	$\frac{K_r}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
<b>Sis</b>	Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
	Tipo 2	0	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{K_r}{1 + G_a''(s) / s^2} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s^2 \cdot K_r}{s^2 + G_a''(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right\} = 0$$

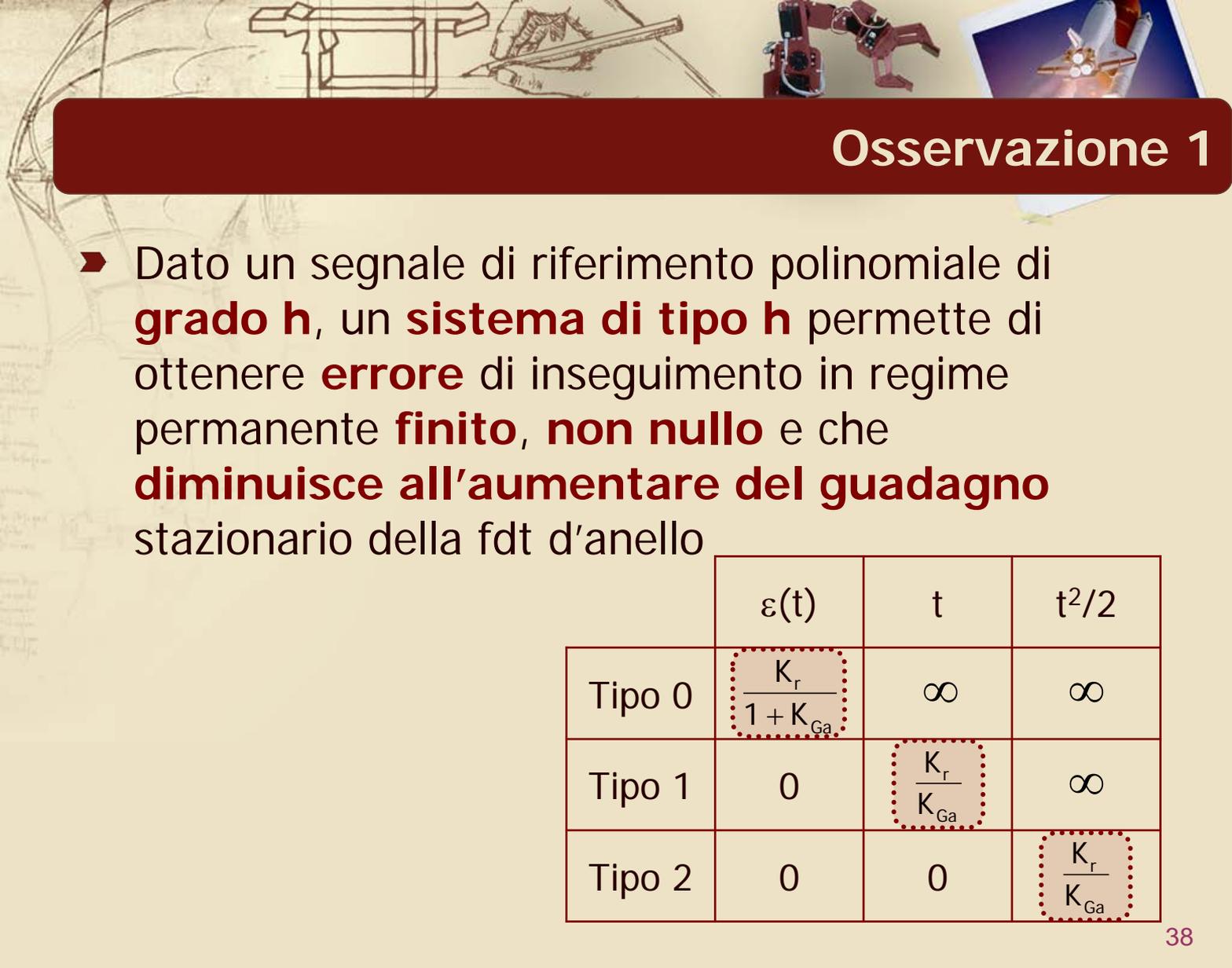
# Errore in regime permanente (3/3)

Errore in regime permanente

Riferimento  $r(t)$

		Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
	Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K}$	$\infty$	$\infty$
Sis	Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
	Tipo 2	0	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$

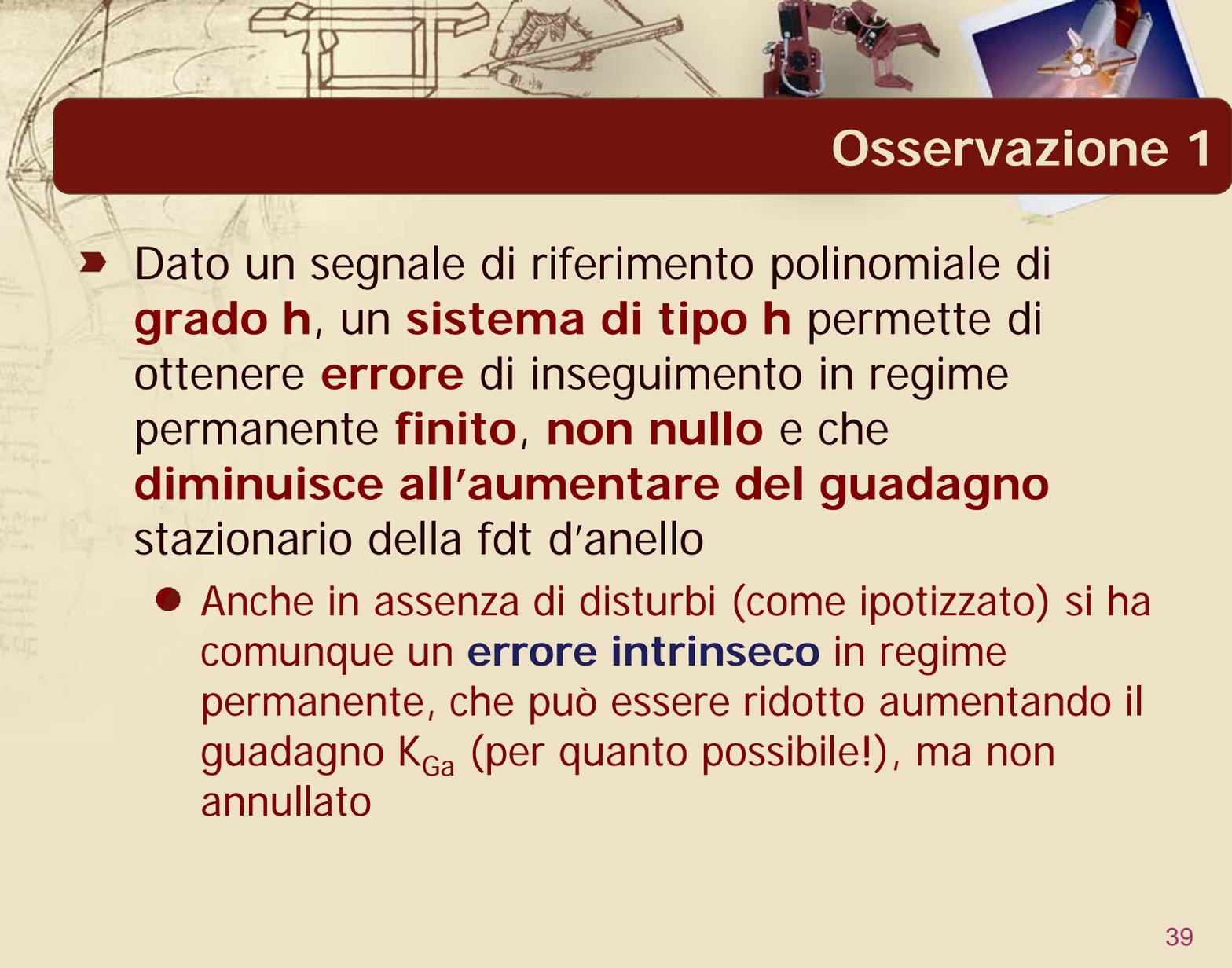
$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{K_r}{1 + G_a''(s)/s^2} \cdot \frac{1}{s^{\cancel{2}}} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cancel{s} \cdot K_r}{s^2 + G_a''(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right\} = \frac{K_r}{K_{Ga}}$$



# Osservazione 1

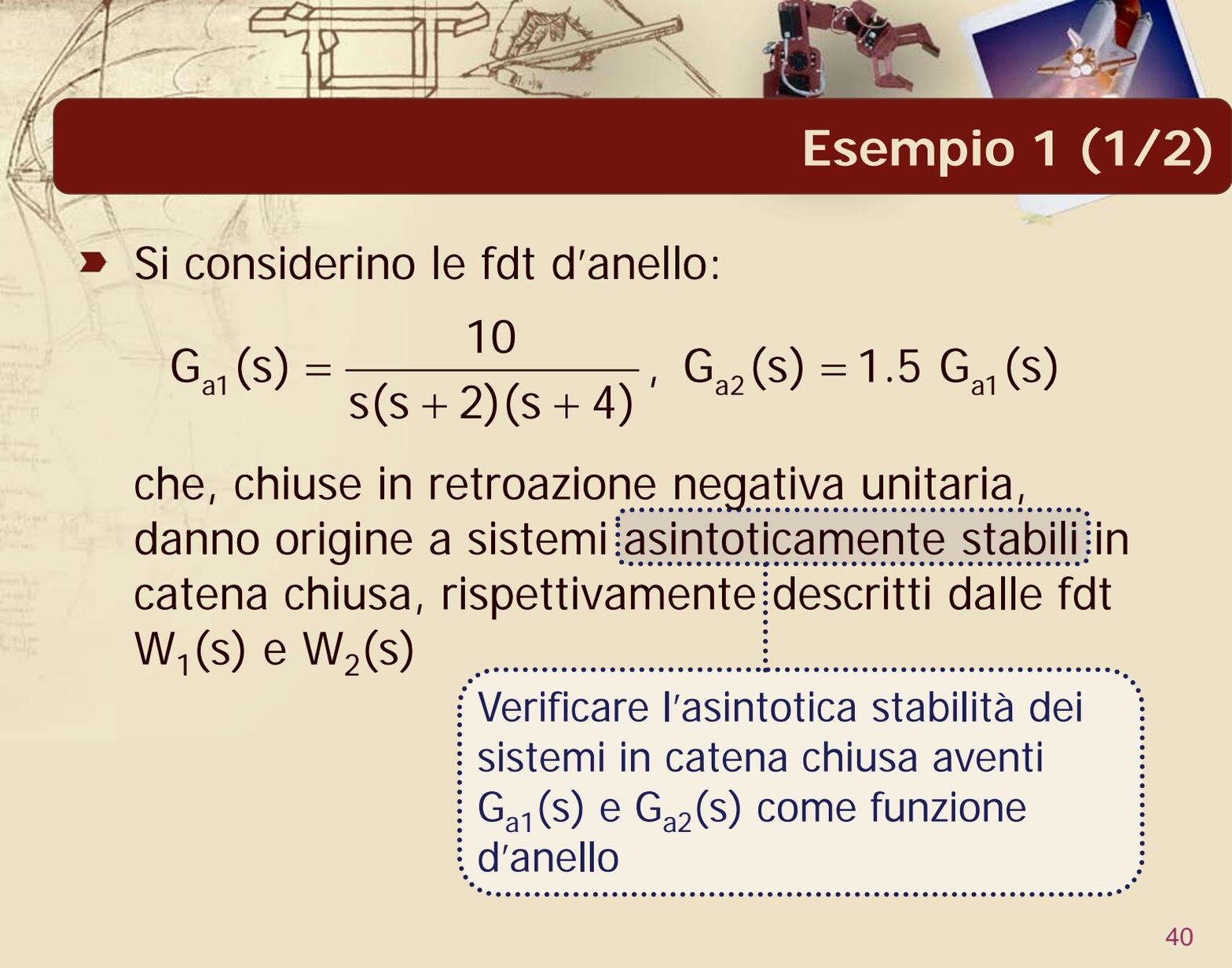
- Dato un segnale di riferimento polinomiale di **grado h**, un **sistema di tipo h** permette di ottenere **errore** di inseguimento in regime permanente **finito, non nullo** e che **diminuisce all'aumentare del guadagno** stazionario della fdt d'anello

	$\varepsilon(t)$	t	$t^2/2$
Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$



## Osservazione 1

- Dato un segnale di riferimento polinomiale di **grado  $h$** , un **sistema di tipo  $h$**  permette di ottenere **errore** di inseguimento in regime permanente **finito, non nullo** e che **diminuisce all'aumentare del guadagno** stazionario della fdt d'anello
  - Anche in assenza di disturbi (come ipotizzato) si ha comunque un **errore intrinseco** in regime permanente, che può essere ridotto aumentando il guadagno  $K_{Ga}$  (per quanto possibile!), ma non annullato



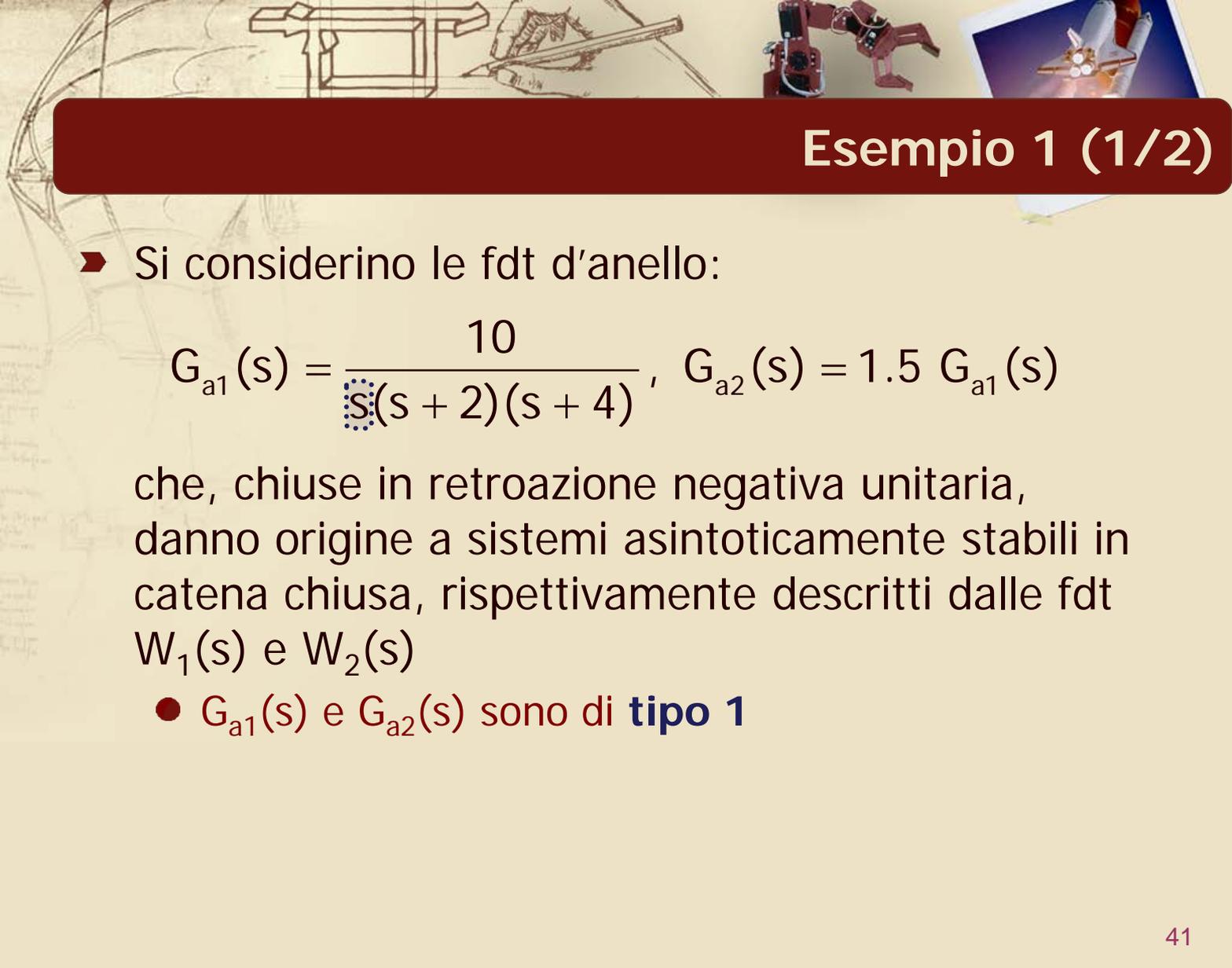
## Esempio 1 (1/2)

- Si considerino le fdt d'anello:

$$G_{a1}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}, \quad G_{a2}(s) = 1.5 G_{a1}(s)$$

che, chiuse in retroazione negativa unitaria, danno origine a sistemi asintoticamente stabili in catena chiusa, rispettivamente descritti dalle fdt  $W_1(s)$  e  $W_2(s)$

Verificare l'asintotica stabilità dei sistemi in catena chiusa aventi  $G_{a1}(s)$  e  $G_{a2}(s)$  come funzione d'anello



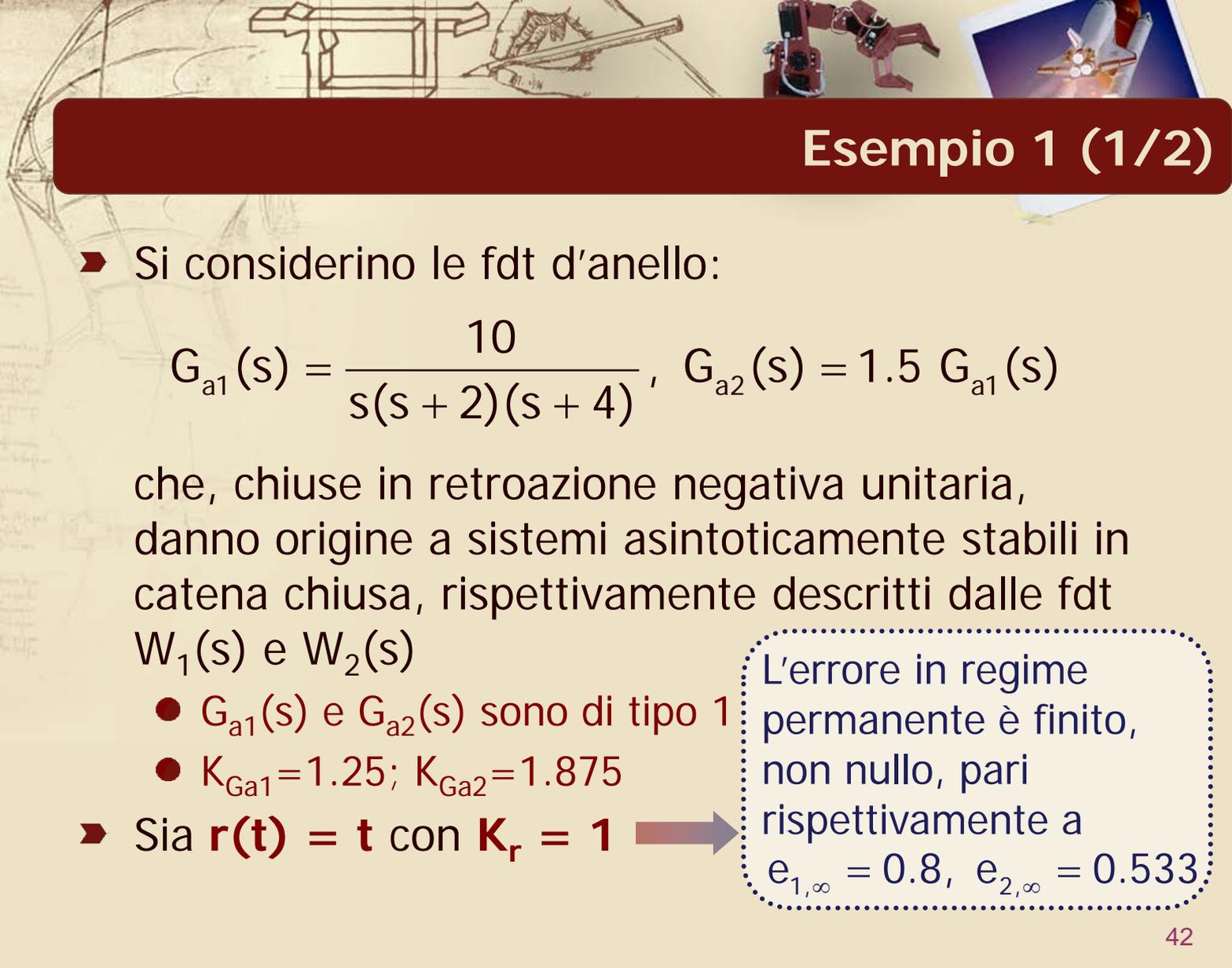
## Esempio 1 (1/2)

► Si considerino le fdt d'anello:

$$G_{a1}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}, \quad G_{a2}(s) = 1.5 G_{a1}(s)$$

che, chiuse in retroazione negativa unitaria, danno origine a sistemi asintoticamente stabili in catena chiusa, rispettivamente descritti dalle fdt  $W_1(s)$  e  $W_2(s)$

- $G_{a1}(s)$  e  $G_{a2}(s)$  sono di **tipo 1**



## Esempio 1 (1/2)

- Si considerino le fdt d'anello:

$$G_{a1}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}, \quad G_{a2}(s) = 1.5 G_{a1}(s)$$

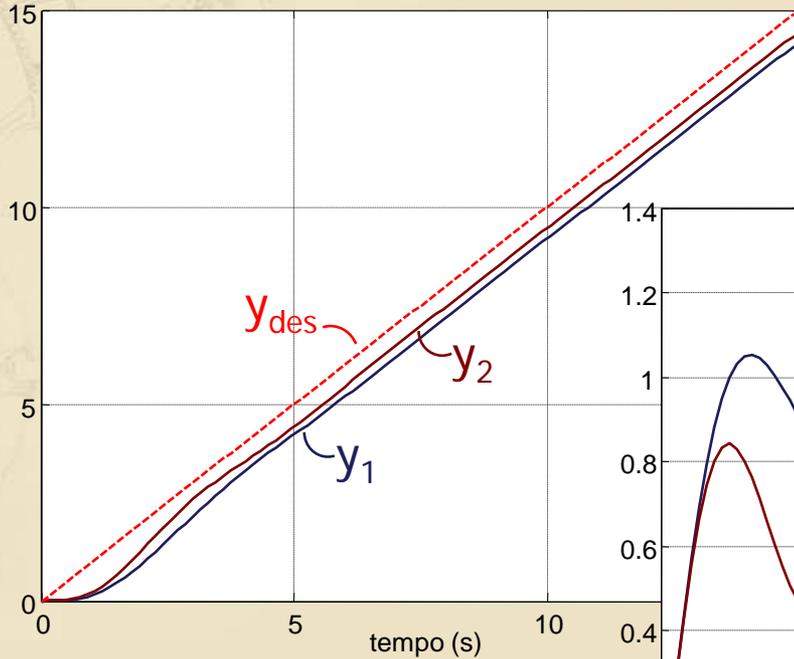
che, chiuse in retroazione negativa unitaria, danno origine a sistemi asintoticamente stabili in catena chiusa, rispettivamente descritti dalle fdt  $W_1(s)$  e  $W_2(s)$

- $G_{a1}(s)$  e  $G_{a2}(s)$  sono di tipo 1
  - $K_{Ga1} = 1.25$ ;  $K_{Ga2} = 1.875$
- Sia  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{t}$  con  $\mathbf{K}_r = \mathbf{1}$  →

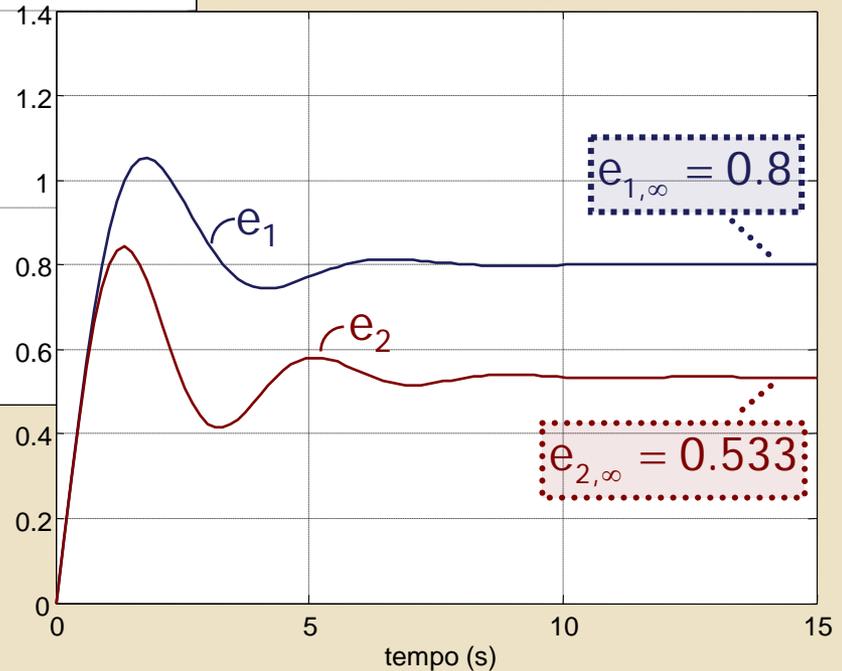
L'errore in regime permanente è finito, non nullo, pari rispettivamente a  $e_{1,\infty} = 0.8$ ,  $e_{2,\infty} = 0.533$ .

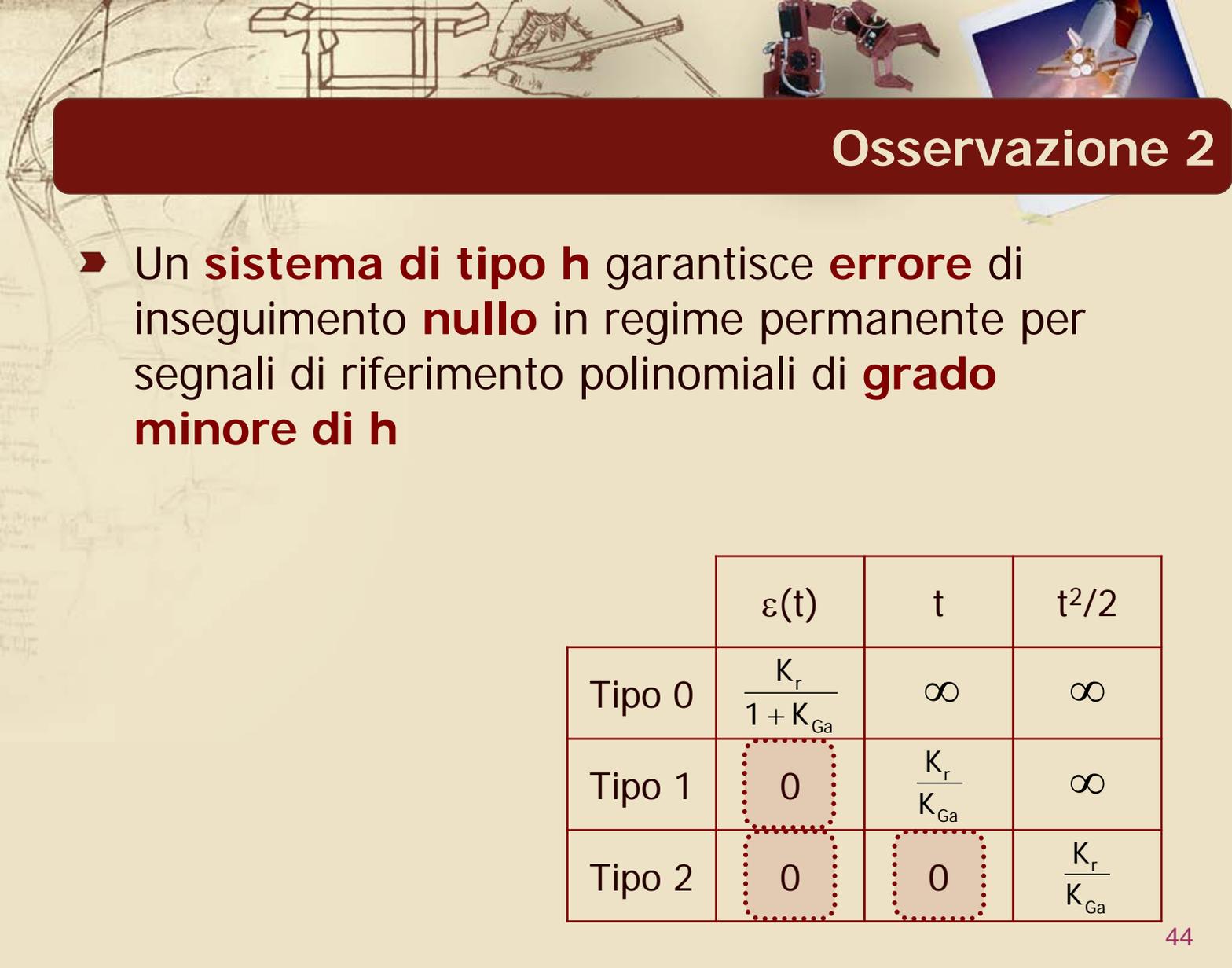
# Esempio 1 (2/2)

Risposta a  $y_{des}(t) = t$



Errore di inseguimento a  $y_{des}(t) = t$

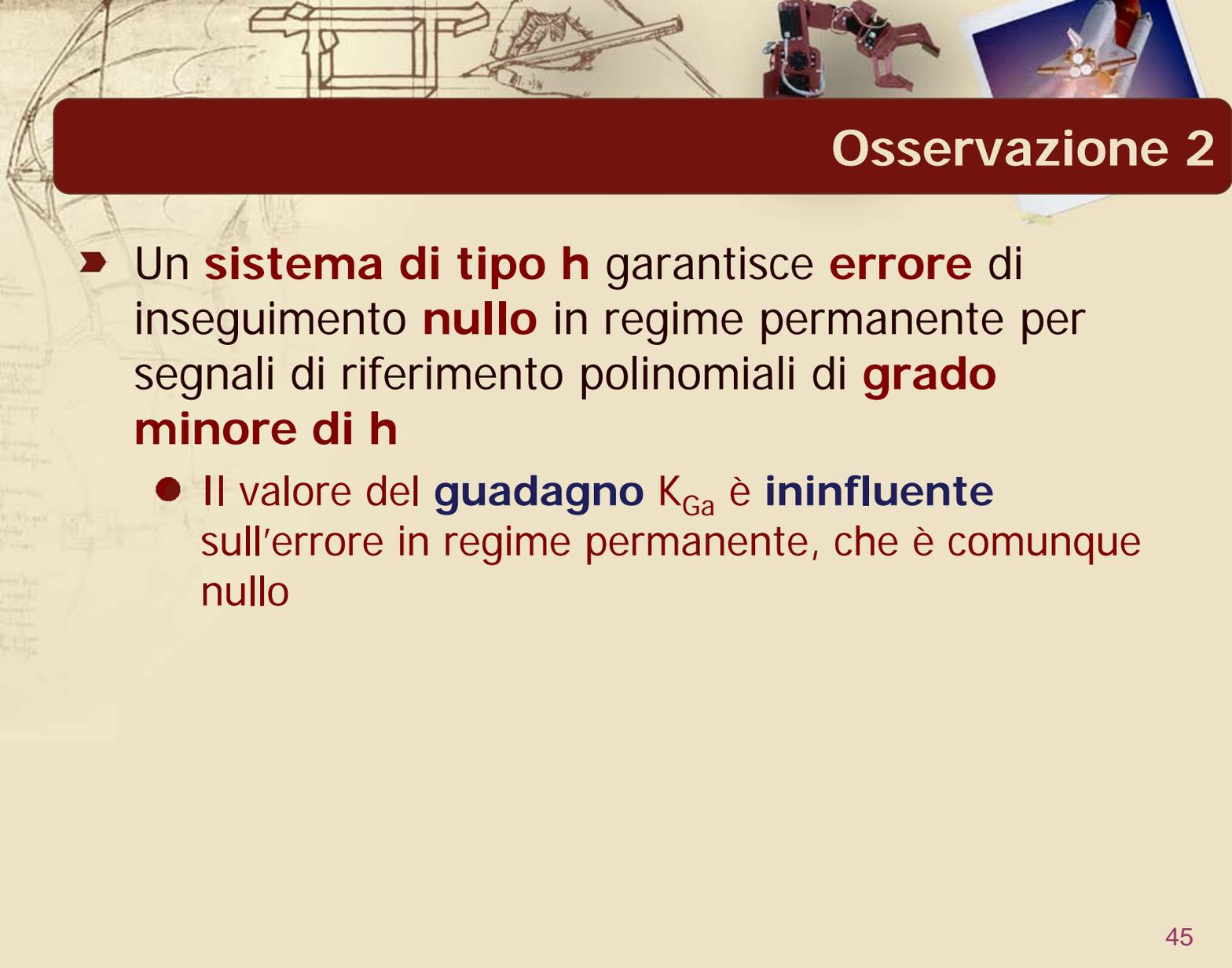




## Osservazione 2

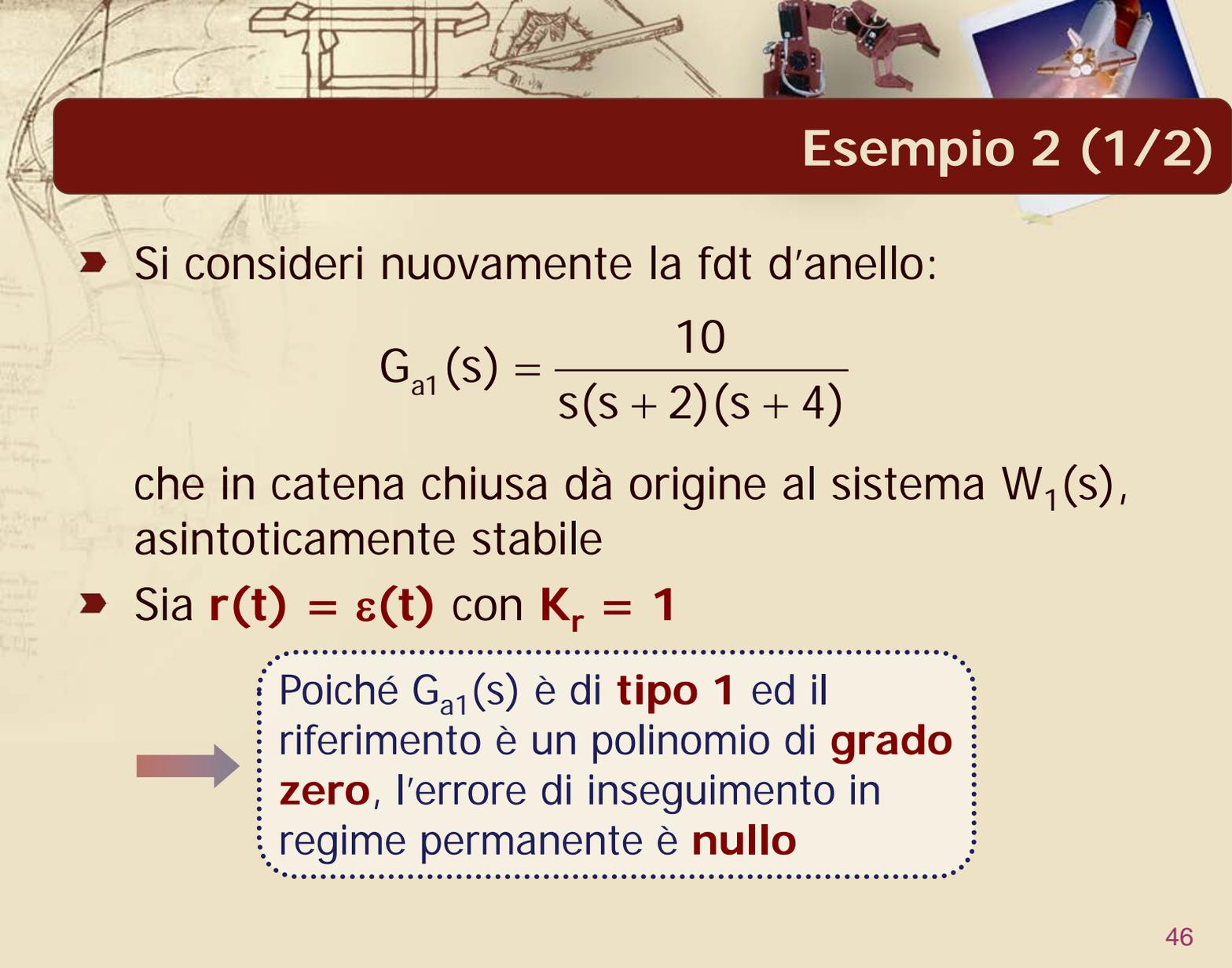
- Un **sistema di tipo h** garantisce **errore** di inseguimento **nullo** in regime permanente per segnali di riferimento polinomiali di **grado minore di h**

	$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$



## Osservazione 2

- Un **sistema di tipo h** garantisce **errore** di inseguimento **nullo** in regime permanente per segnali di riferimento polinomiali di **grado minore di h**
  - Il valore del **guadagno**  $K_{Ga}$  è **ininfluente** sull'errore in regime permanente, che è comunque nullo



## Esempio 2 (1/2)

- Si consideri nuovamente la fdt d'anello:

$$G_{a1}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$$

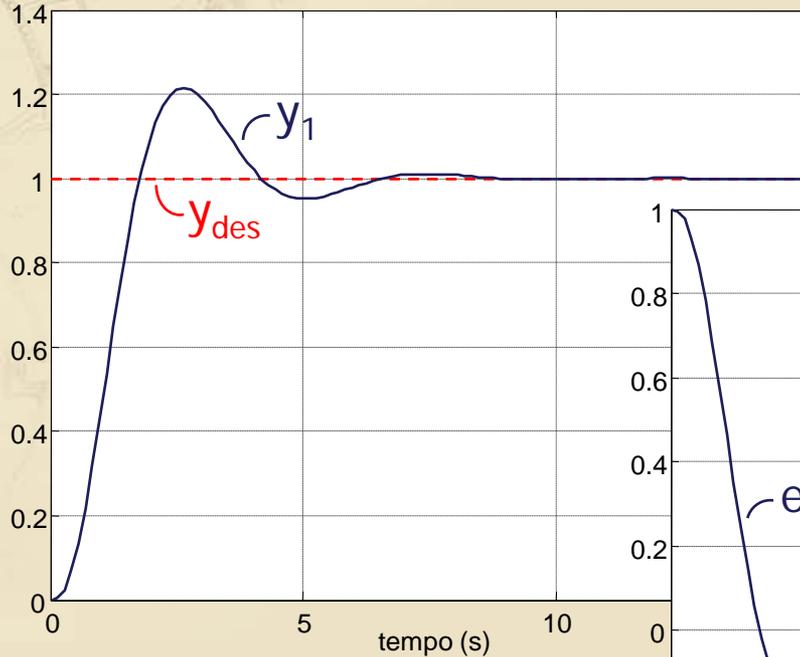
che in catena chiusa dà origine al sistema  $W_1(s)$ ,  
asintoticamente stabile

- Sia  $\mathbf{r(t) = \varepsilon(t)}$  con  $\mathbf{K_r = 1}$

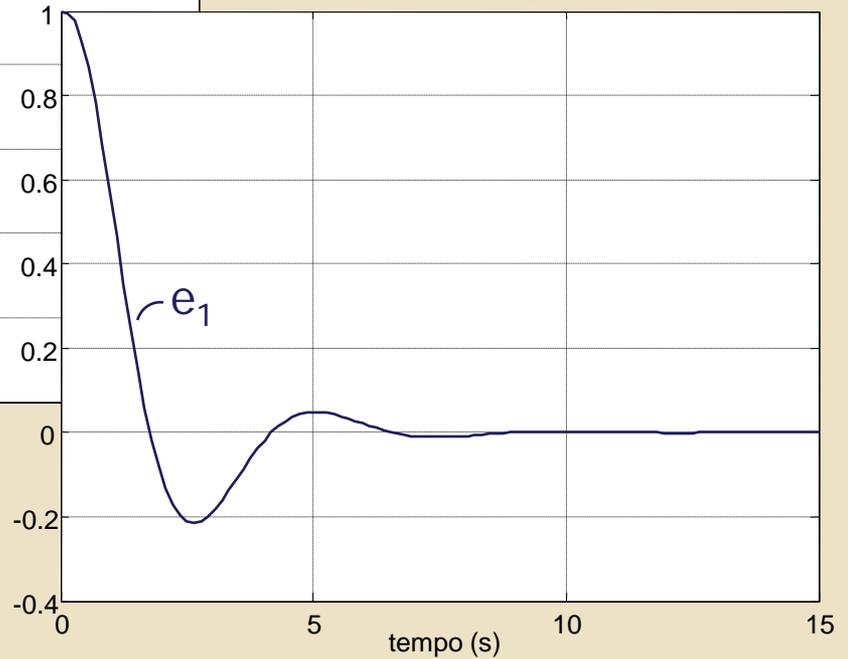
→ Poiché  $G_{a1}(s)$  è di **tipo 1** ed il riferimento è un polinomio di **grado zero**, l'errore di inseguimento in regime permanente è **nullo**

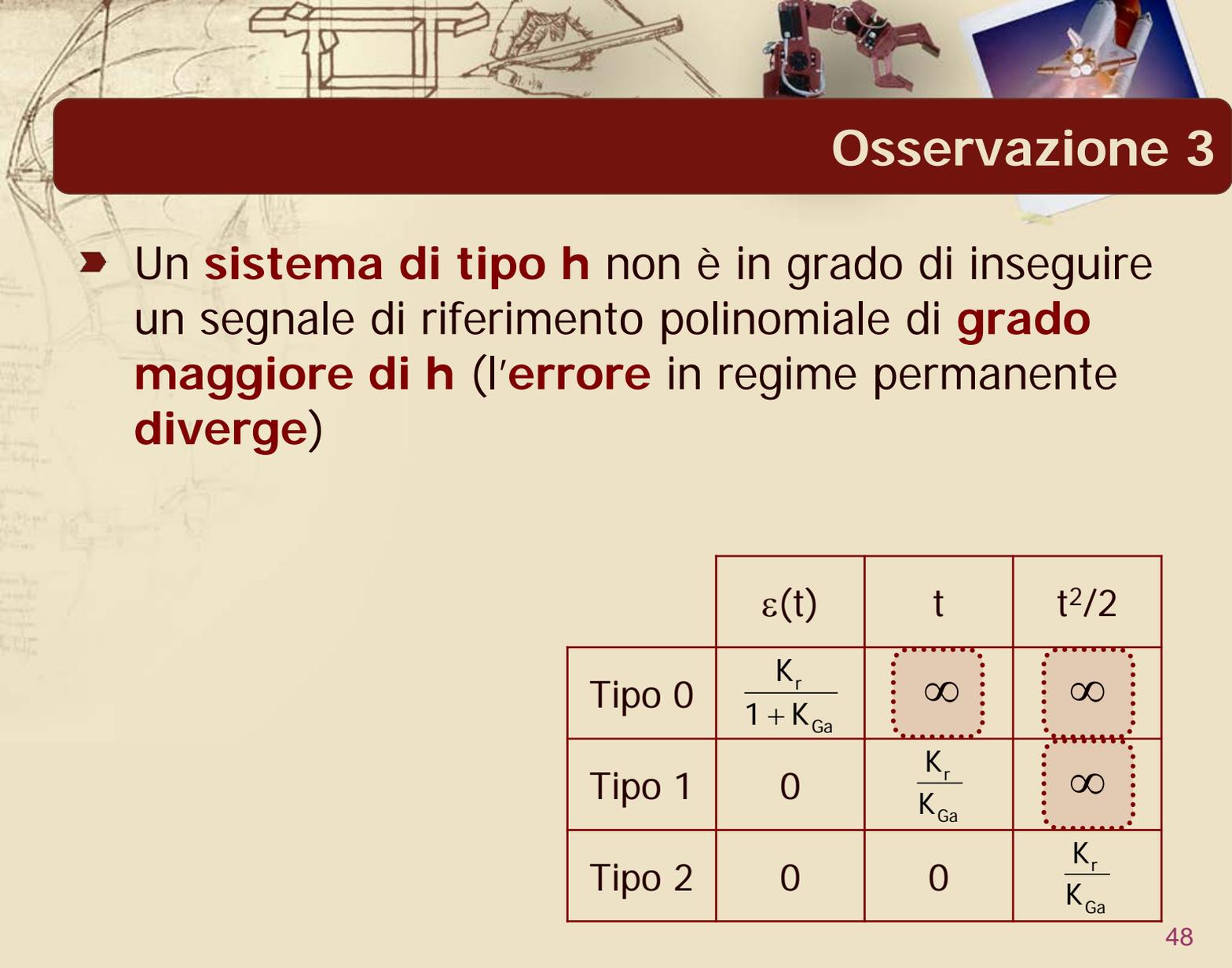
## Esempio 2 (2/2)

Risposta a  $y_{des}(t) = \varepsilon(t)$



Errore di inseguimento a  $y_{des}(t) = \varepsilon(t)$

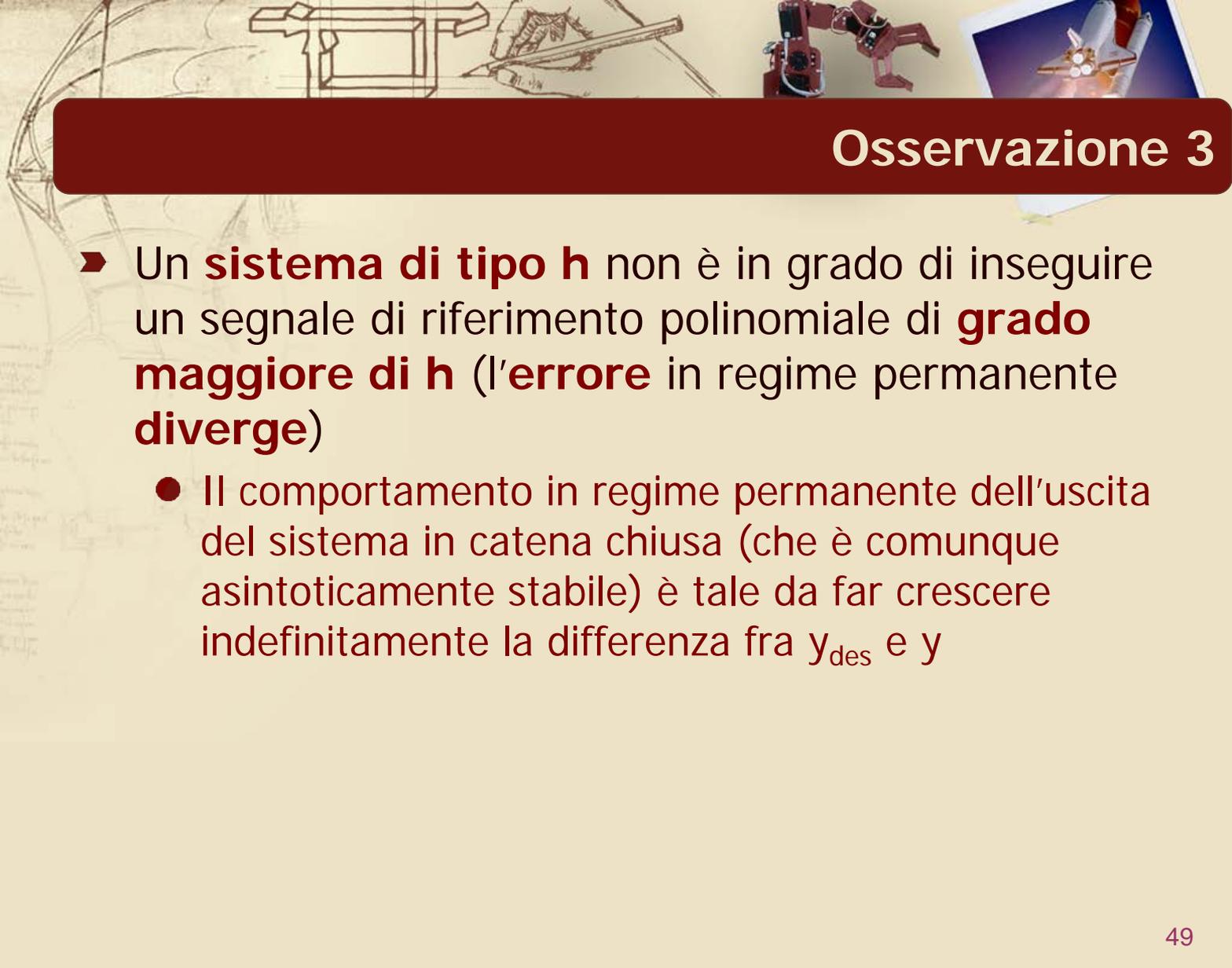




## Osservazione 3

- Un **sistema di tipo h** non è in grado di inseguire un segnale di riferimento polinomiale di **grado maggiore di h** (l'**errore** in regime permanente **diverge**)

	$\varepsilon(t)$	$t$	$t^2/2$
Tipo 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$



## Osservazione 3

- Un **sistema di tipo  $h$**  non è in grado di inseguire un segnale di riferimento polinomiale di **grado maggiore di  $h$**  (l'**errore** in regime permanente **diverge**)
  - Il comportamento in regime permanente dell'uscita del sistema in catena chiusa (che è comunque asintoticamente stabile) è tale da far crescere indefinitamente la differenza fra  $y_{des}$  e  $y$

## Esempio 3 (1/2)

- Si consideri ancora la fdt d'anello:

$$G_{a1}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$$

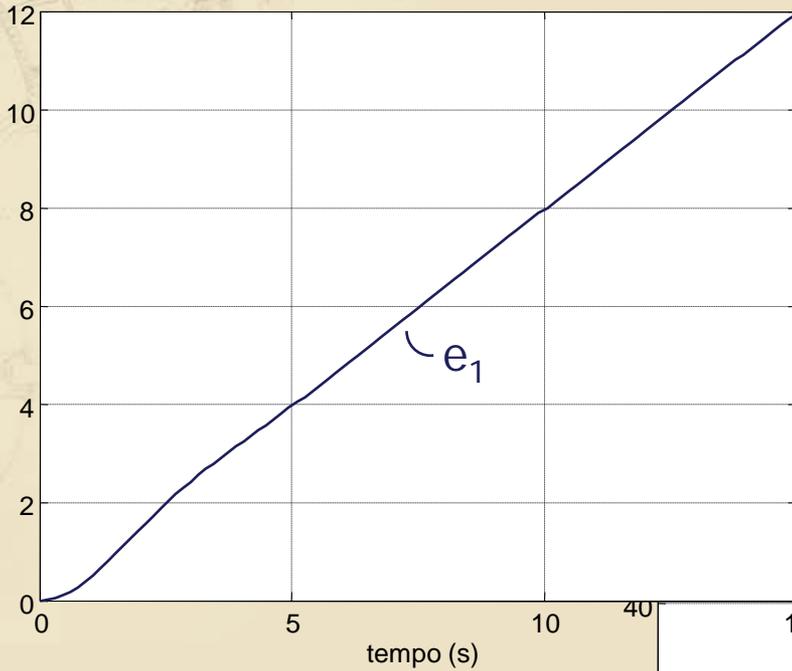
che in catena chiusa dà origine al sistema  $W_1(s)$ ,  
asintoticamente stabile

- Sia  $\mathbf{r(t) = 0.5t^2}$  con  $\mathbf{K_r = 1}$

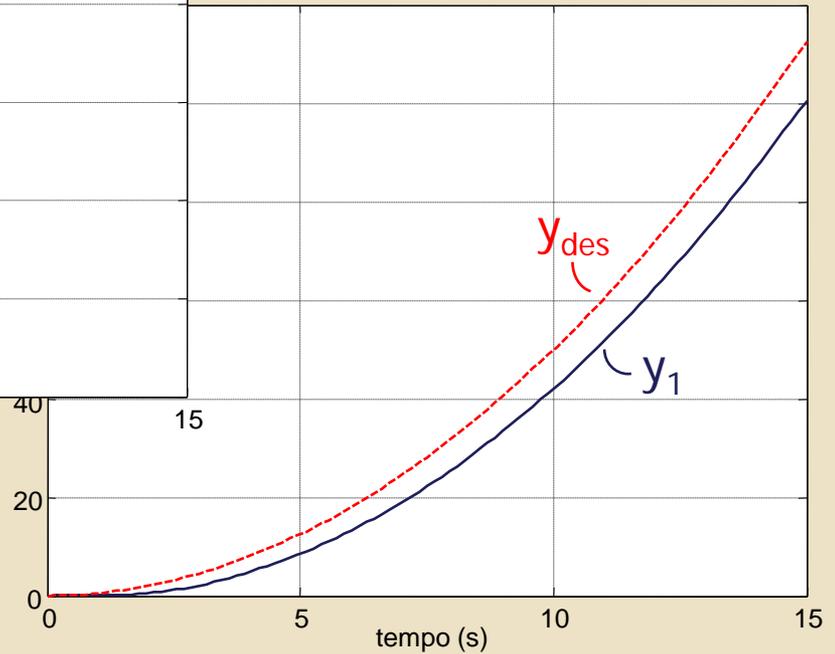
► Poiché  $G_{a1}(s)$  è di **tipo 1** ed il riferimento è un polinomio di **grado due**, l'errore di inseguimento in regime permanente **diverge** all'aumentare del tempo  $t$

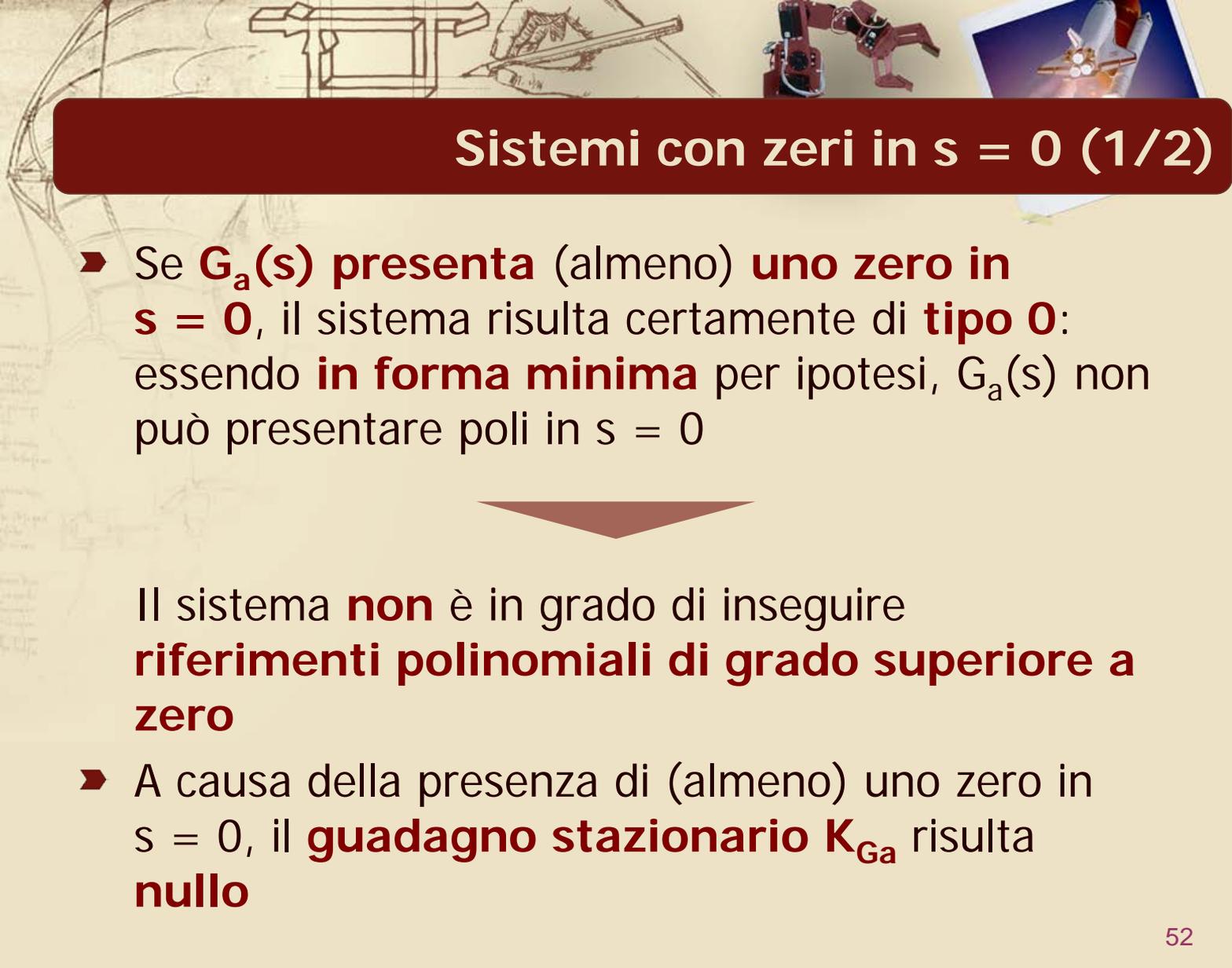
# Esempio 3 (2/2)

Errore di inseguimento a  $y_{\text{des}}(t) = 0.5t^2$



Risposta a  $y_{\text{des}}(t) = 0.5t^2$





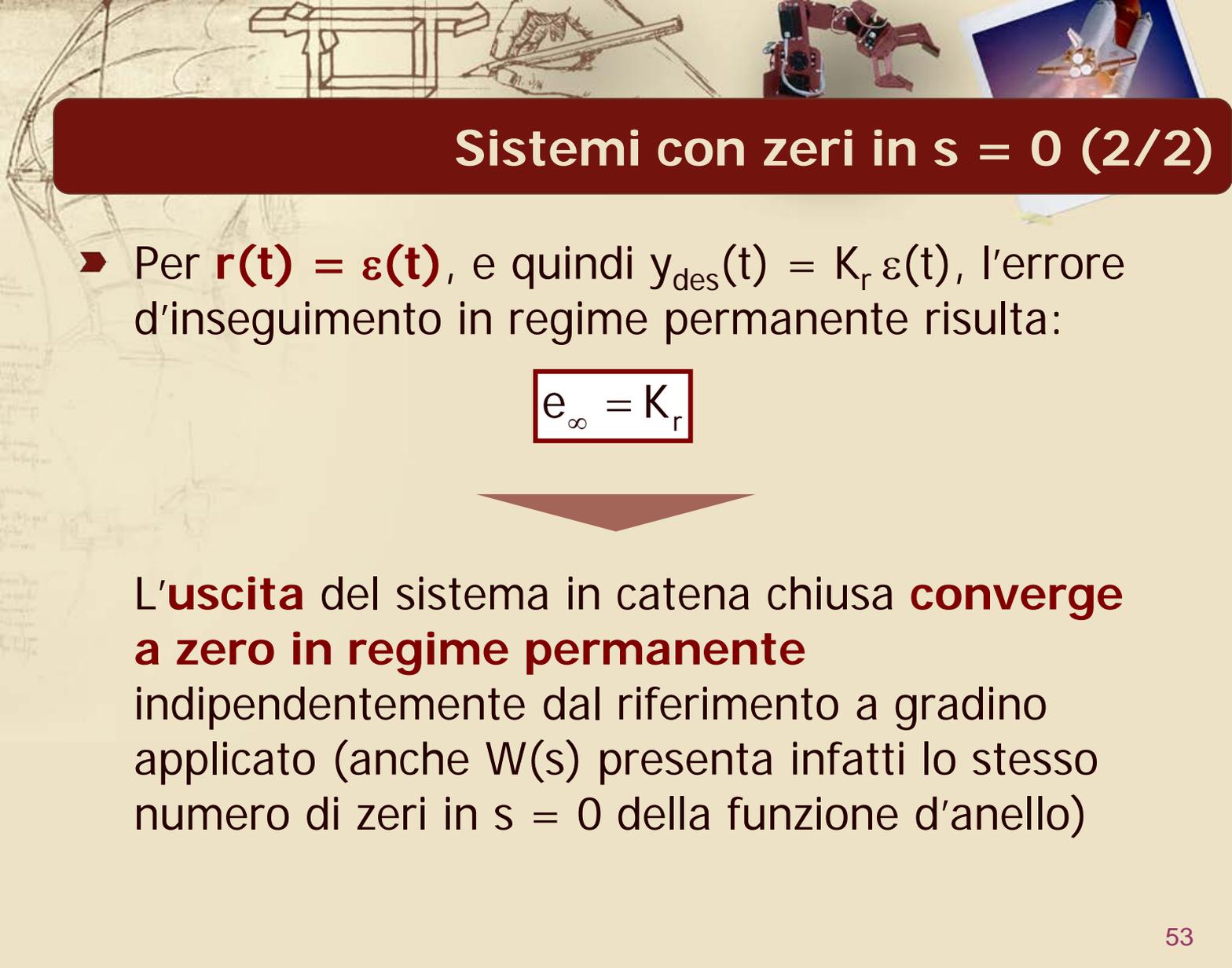
## Sistemi con zeri in $s = 0$ (1/2)

- Se  $G_a(s)$  presenta (almeno) **uno zero in  $s = 0$** , il sistema risulta certamente di **tipo 0**: essendo **in forma minima** per ipotesi,  $G_a(s)$  non può presentare poli in  $s = 0$



Il sistema **non** è in grado di inseguire **riferimenti polinomiali di grado superiore a zero**

- A causa della presenza di (almeno) uno zero in  $s = 0$ , il **guadagno stazionario  $K_{Ga}$**  risulta **nulla**

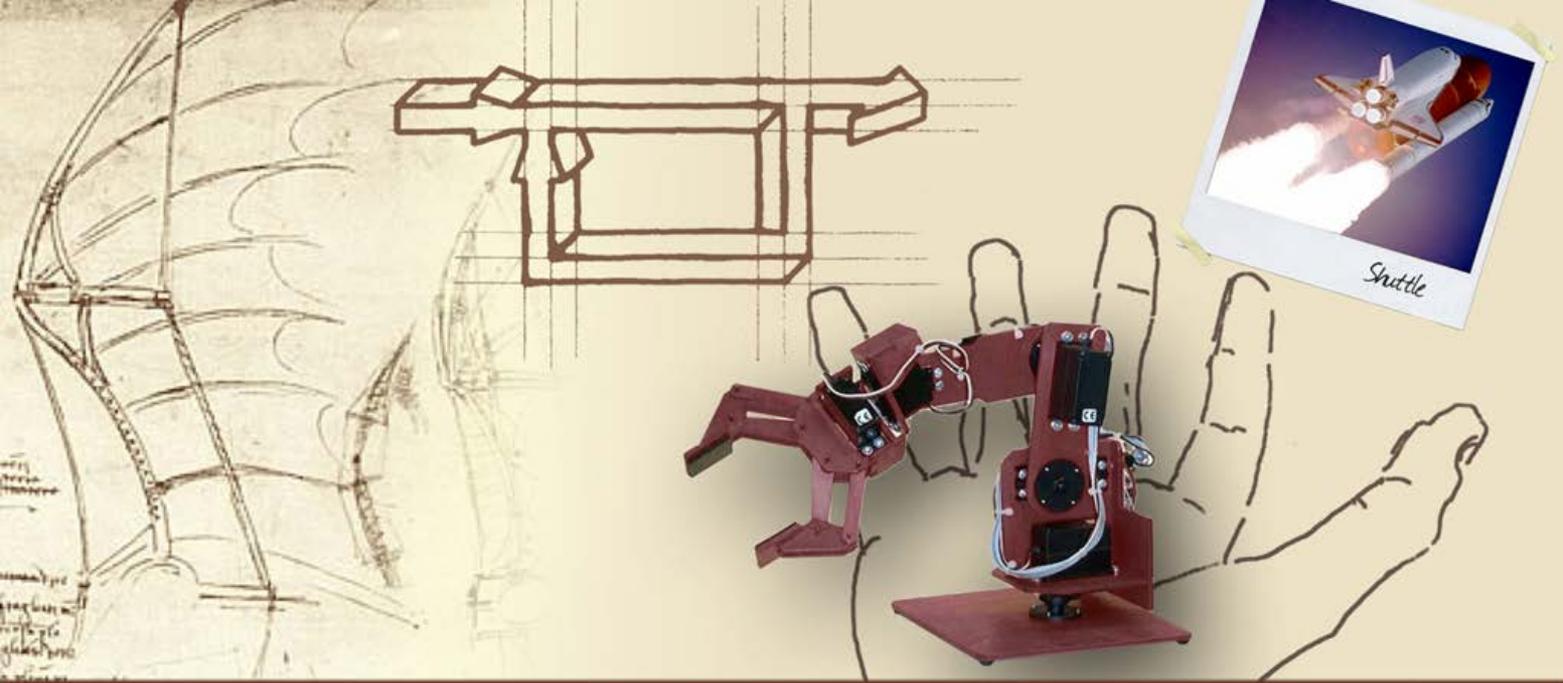


## Sistemi con zeri in $s = 0$ (2/2)

- Per  $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ , e quindi  $y_{\text{des}}(t) = K_r \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ , l'errore d'inseguimento in regime permanente risulta:

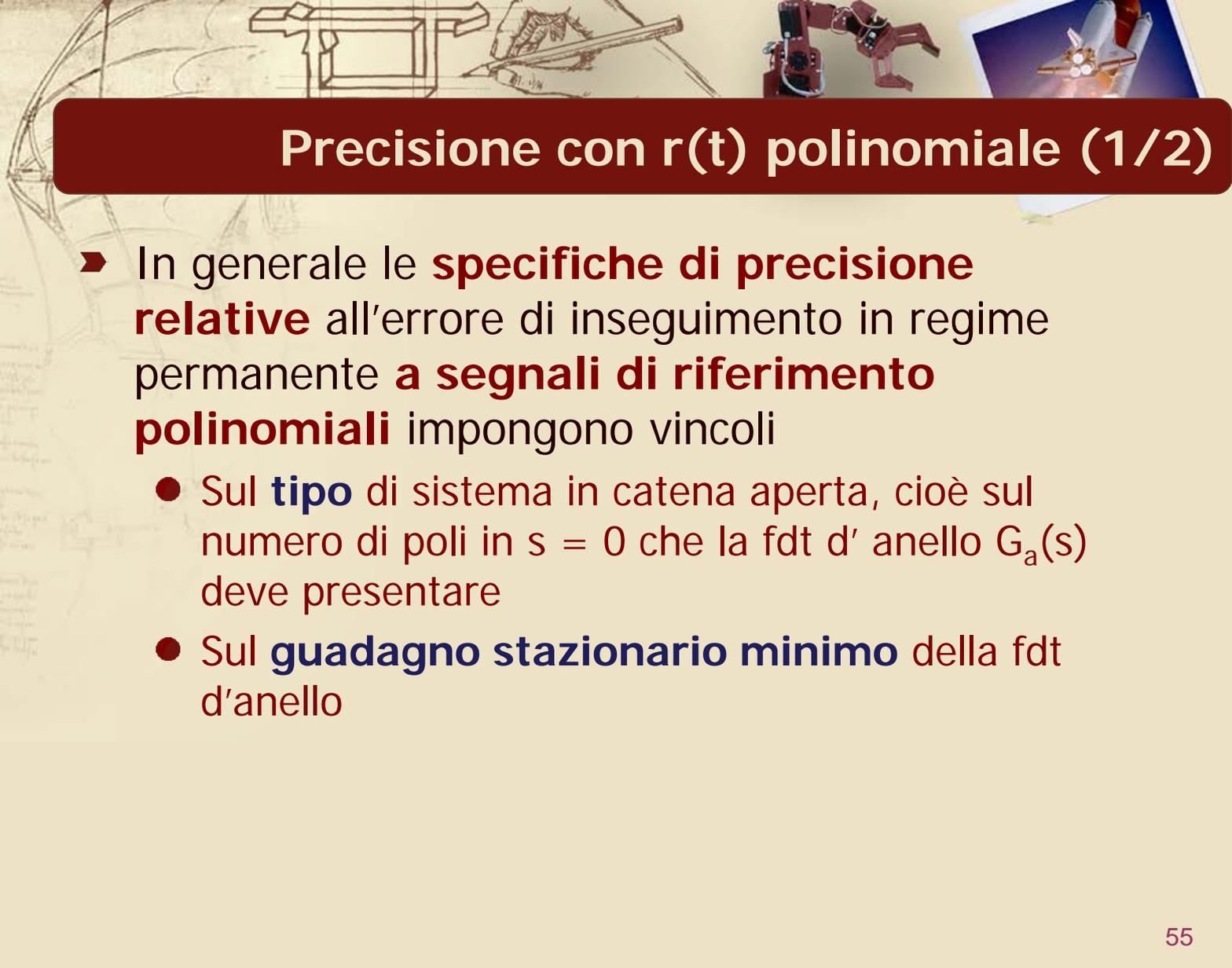
$$e_{\infty} = K_r$$

L'**uscita** del sistema in catena chiusa **converge a zero in regime permanente** indipendentemente dal riferimento a gradino applicato (anche  $W(s)$  presenta infatti lo stesso numero di zeri in  $s = 0$  della funzione d'anello)



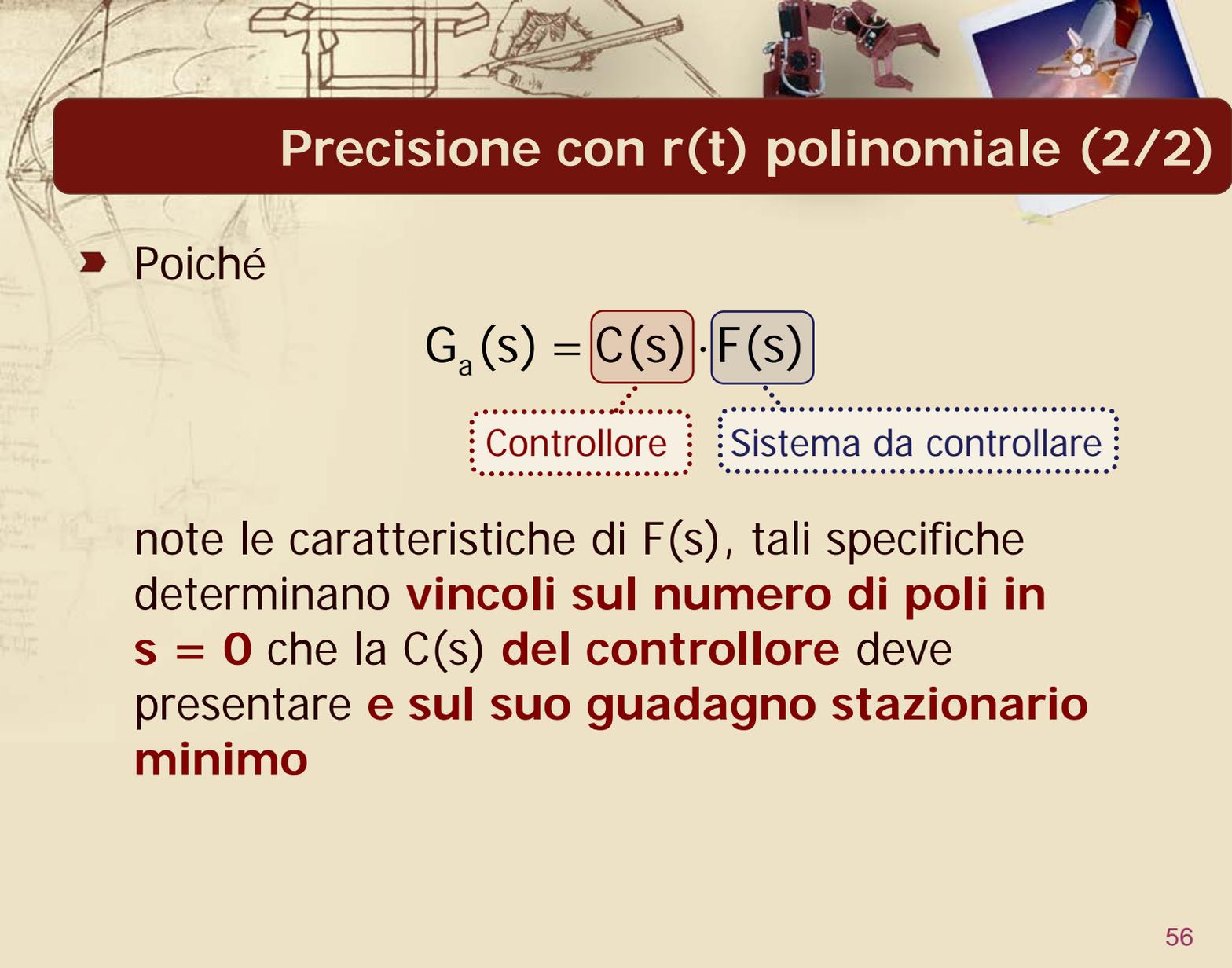
**Precisione in regime permanente**

**Implicazioni sul progetto del controllore**



## Precisione con $r(t)$ polinomiale (1/2)

- In generale le **specifiche di precisione relative** all'errore di inseguimento in regime permanente **a segnali di riferimento polinomiali** impongono vincoli
  - Sul **tipo** di sistema in catena aperta, cioè sul numero di poli in  $s = 0$  che la fdt d'anello  $G_a(s)$  deve presentare
  - Sul **guadagno stazionario minimo** della fdt d'anello



## Precisione con $r(t)$ polinomiale (2/2)

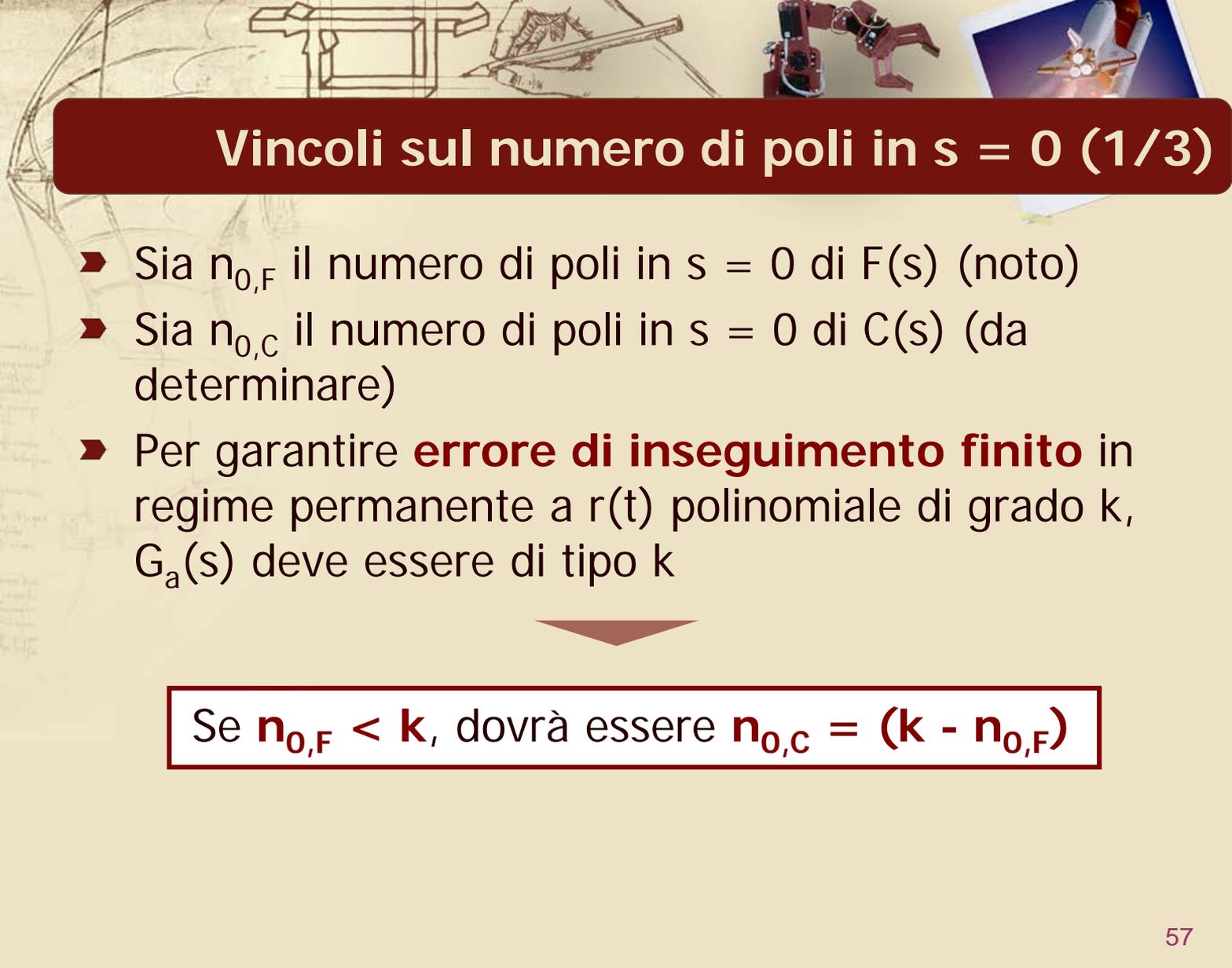
► Poiché

$$G_a(s) = C(s) \cdot F(s)$$

Controllore

Sistema da controllare

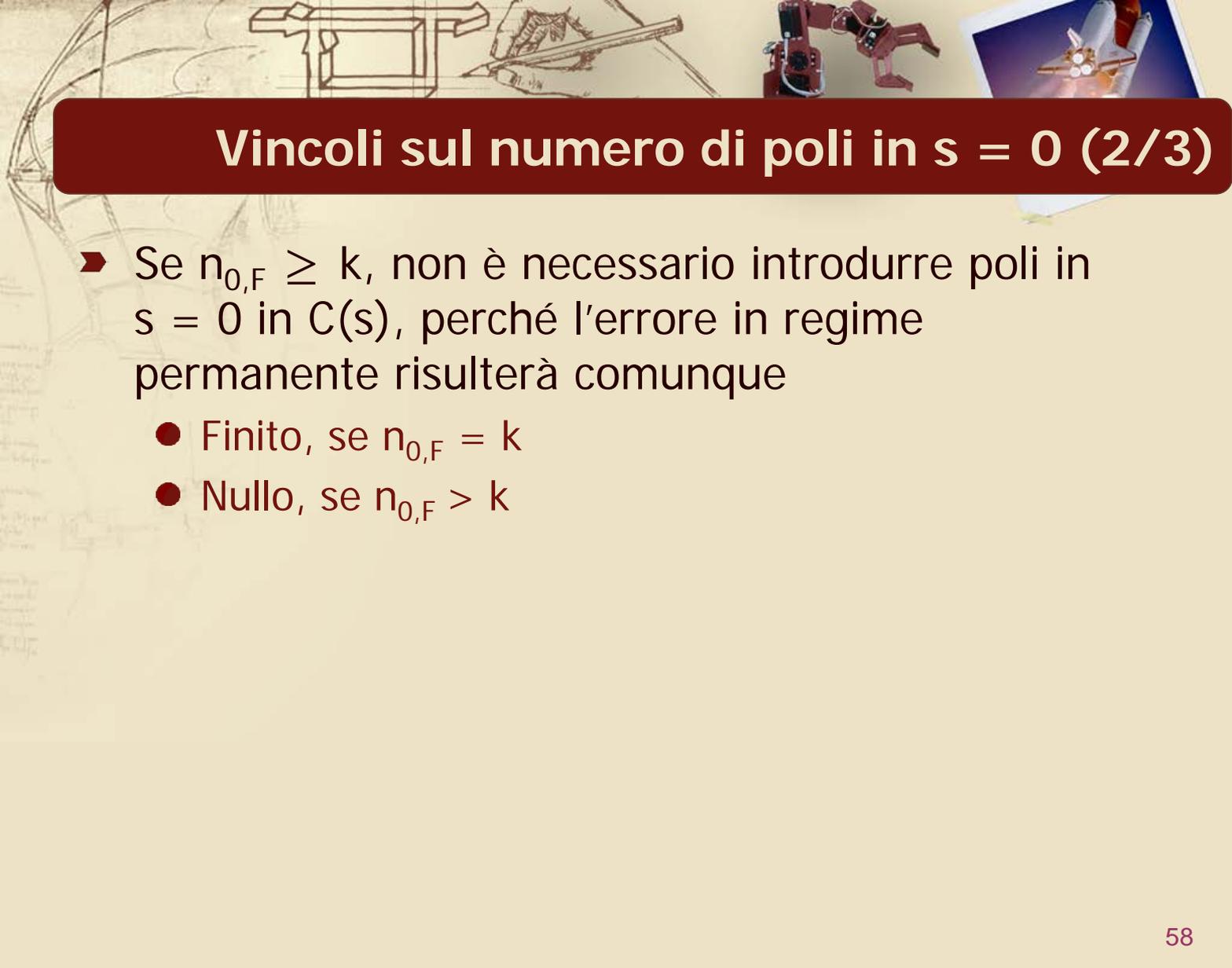
note le caratteristiche di  $F(s)$ , tali specifiche determinano **vincoli sul numero di poli in  $s = 0$**  che la  $C(s)$  **del controllore** deve presentare **e sul suo guadagno stazionario minimo**



## Vincoli sul numero di poli in $s = 0$ (1/3)

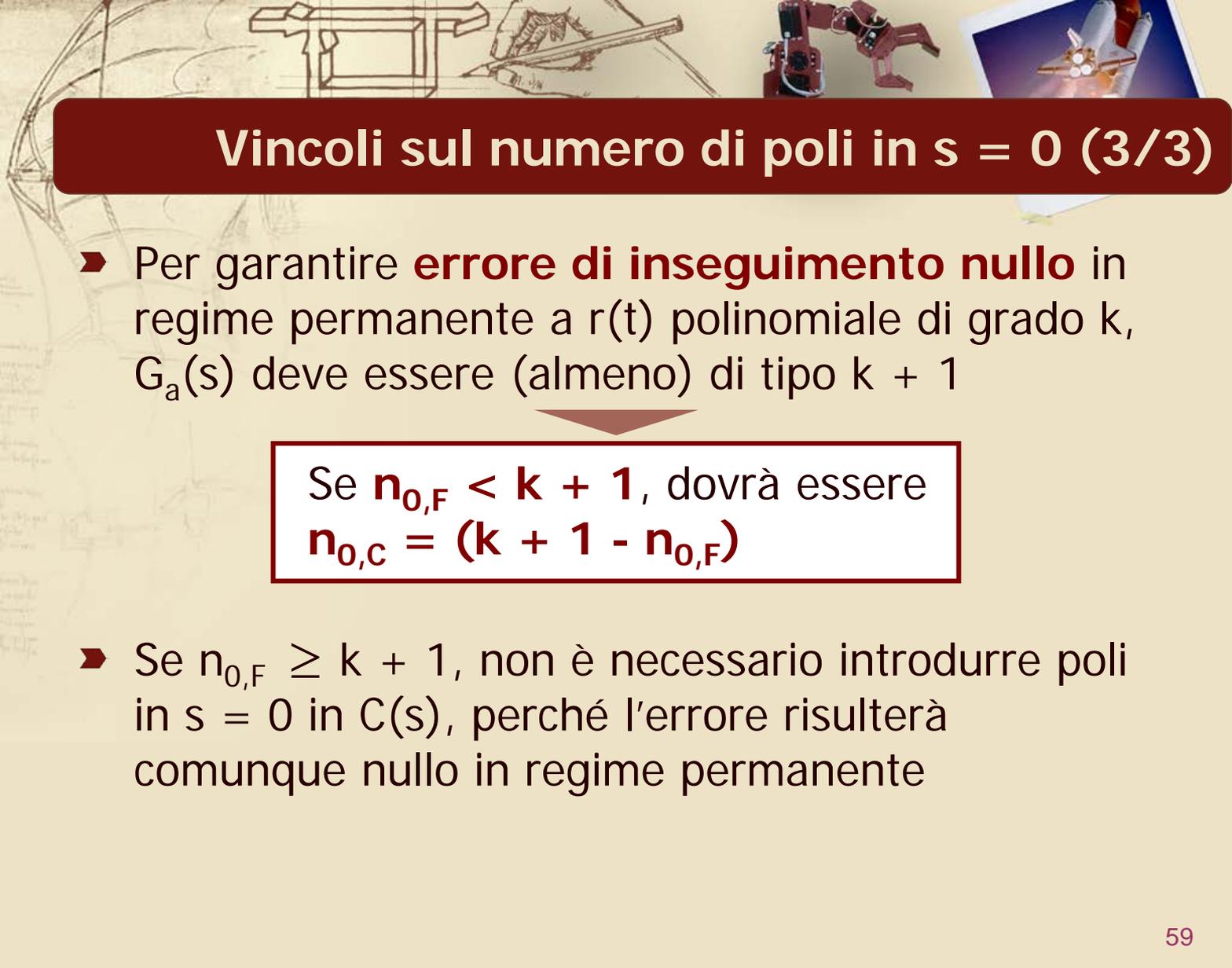
- ▶ Sia  $n_{0,F}$  il numero di poli in  $s = 0$  di  $F(s)$  (noto)
- ▶ Sia  $n_{0,C}$  il numero di poli in  $s = 0$  di  $C(s)$  (da determinare)
- ▶ Per garantire **errore di inseguimento finito** in regime permanente a  $r(t)$  polinomiale di grado  $k$ ,  $G_a(s)$  deve essere di tipo  $k$

Se  $n_{0,F} < k$ , dovrà essere  $n_{0,C} = (k - n_{0,F})$



## Vincoli sul numero di poli in $s = 0$ (2/3)

- Se  $n_{0,F} \geq k$ , non è necessario introdurre poli in  $s = 0$  in  $C(s)$ , perché l'errore in regime permanente risulterà comunque
  - Finito, se  $n_{0,F} = k$
  - Nullo, se  $n_{0,F} > k$

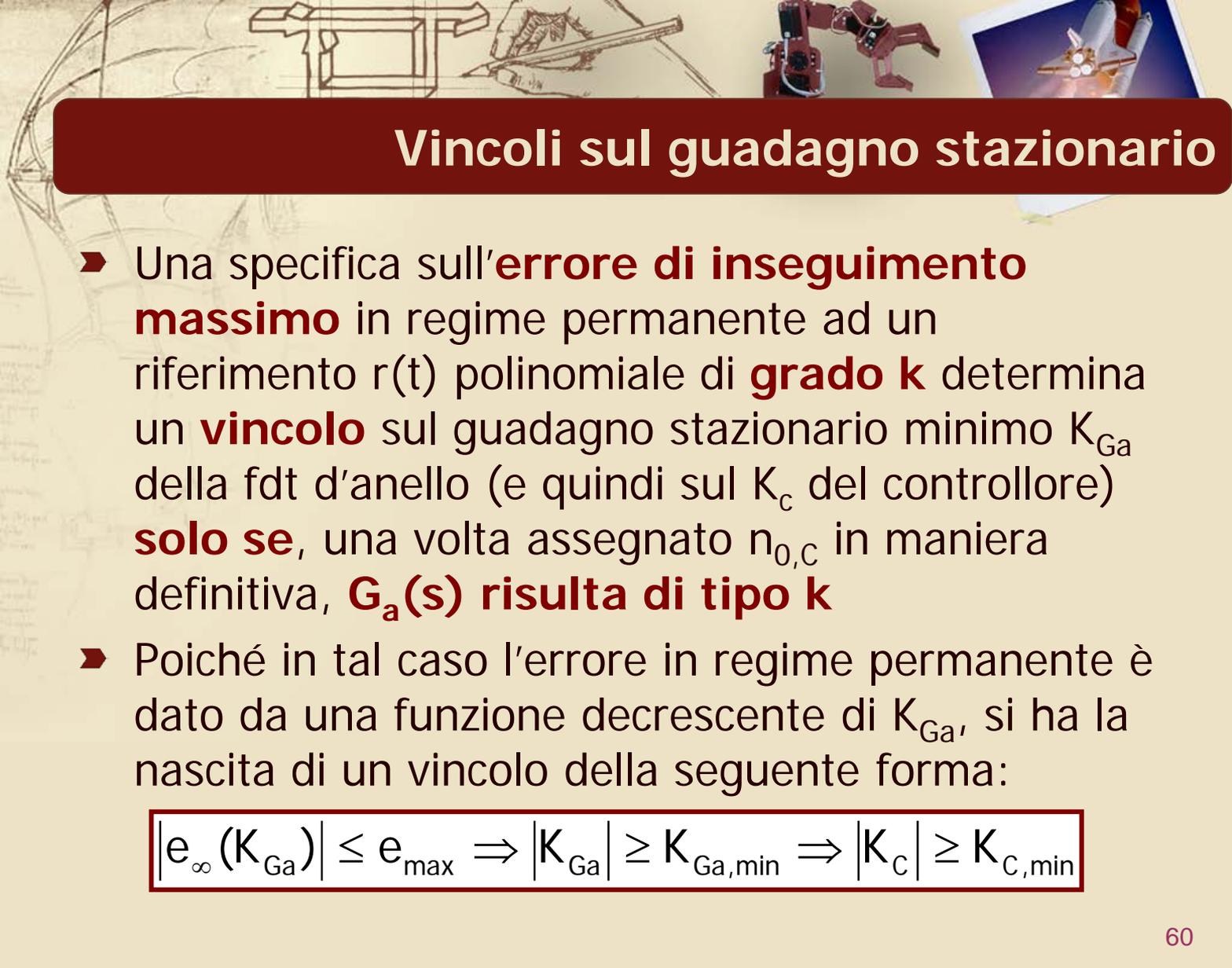


## Vincoli sul numero di poli in $s = 0$ (3/3)

- Per garantire **errore di inseguimento nullo** in regime permanente a  $r(t)$  polinomiale di grado  $k$ ,  $G_a(s)$  deve essere (almeno) di tipo  $k + 1$

Se  $n_{0,F} < k + 1$ , dovrà essere  
 $n_{0,C} = (k + 1 - n_{0,F})$

- Se  $n_{0,F} \geq k + 1$ , non è necessario introdurre poli in  $s = 0$  in  $C(s)$ , perché l'errore risulterà comunque nullo in regime permanente



## Vincoli sul guadagno stazionario

- Una specifica sull'**errore di inseguimento massimo** in regime permanente ad un riferimento  $r(t)$  polinomiale di **grado  $k$**  determina un **vincolo** sul guadagno stazionario minimo  $K_{Ga}$  della fdt d'anello (e quindi sul  $K_c$  del controllore) **solo se**, una volta assegnato  $n_{0,c}$  in maniera definitiva,  **$G_a(s)$  risulta di tipo  $k$**
- Poiché in tal caso l'errore in regime permanente è dato da una funzione decrescente di  $K_{Ga}$ , si ha la nascita di un vincolo della seguente forma:

$$|e_{\infty}(K_{Ga})| \leq e_{\max} \Rightarrow |K_{Ga}| \geq K_{Ga,\min} \Rightarrow |K_c| \geq K_{c,\min}$$