

Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols

Diagramma di Nichols



Definizione (1/2)

- Il diagramma di Nichols (**DdNic**) di una fdt consiste nella rappresentazione grafica di

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \text{ per } \omega \in (0, \infty)$$

sul piano cartesiano

$$\varphi_{\text{gradi}} \otimes M_{\text{dB}}$$

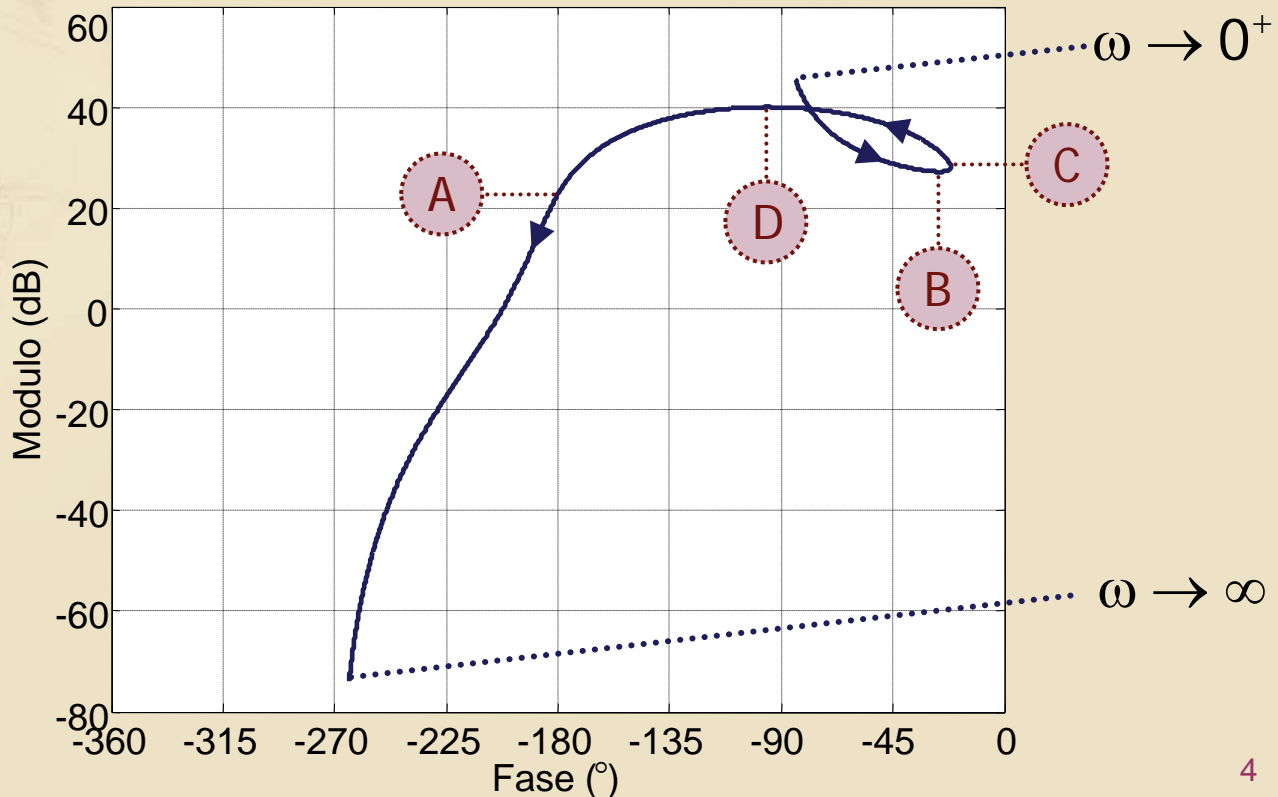


Definizione (2/2)

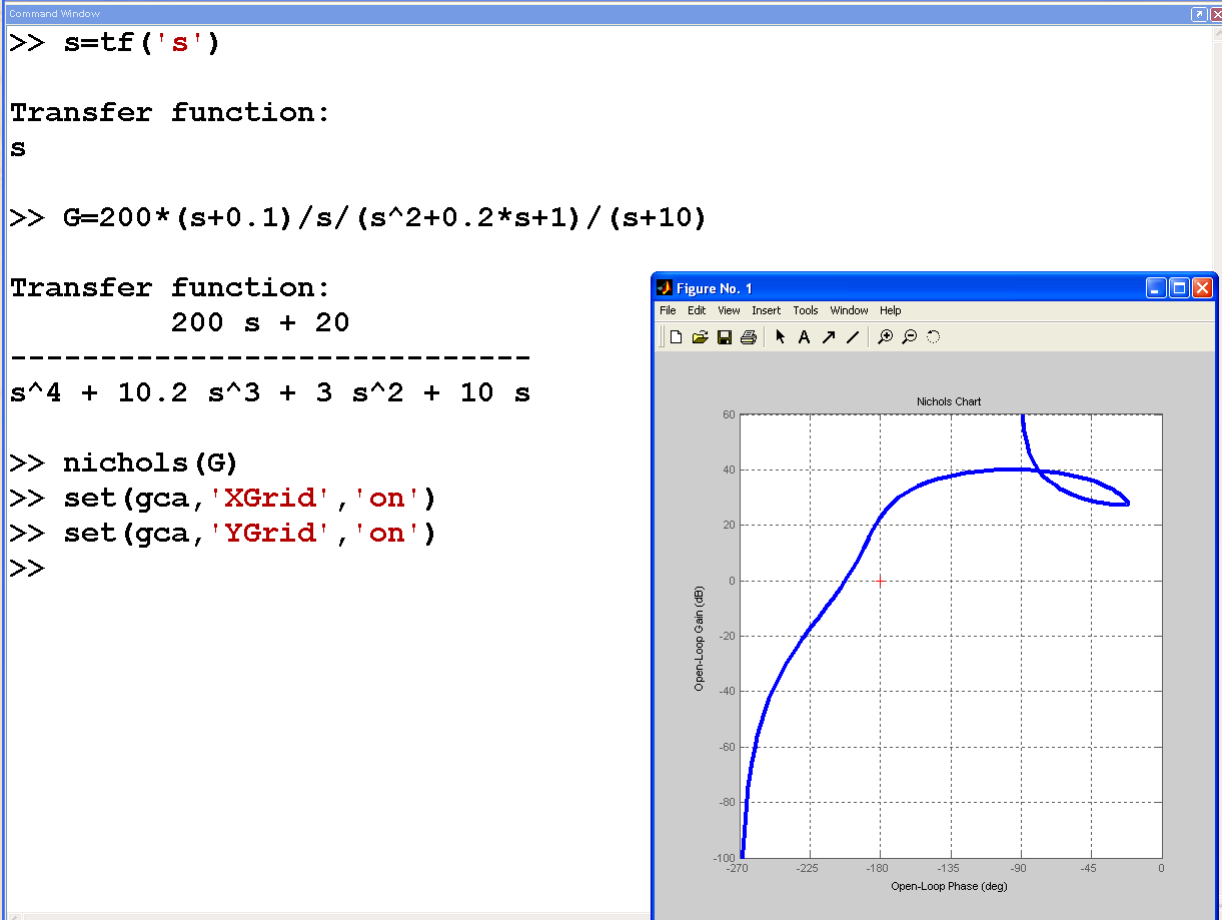
- ▶ Nel DdNic la variabile indipendente ω diventa la coordinata curvilinea (un punto sul piano $\varphi \otimes M$ per ciascun valore di ω)
- ▶ **Per ovvi motivi i valori dell'ascissa possono essere limitati** (ma non è obbligatorio) tra -180° e $+180^\circ$ oppure tra 0° e $+360^\circ$ oppure **tra -360° e 0°** ; nel prosieguo si opterà preferibilmente per l'intervallo $-360^\circ \div 0^\circ$

Esempio 1 (1/2)

$$G(s) = \frac{200(s + 0.1)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$

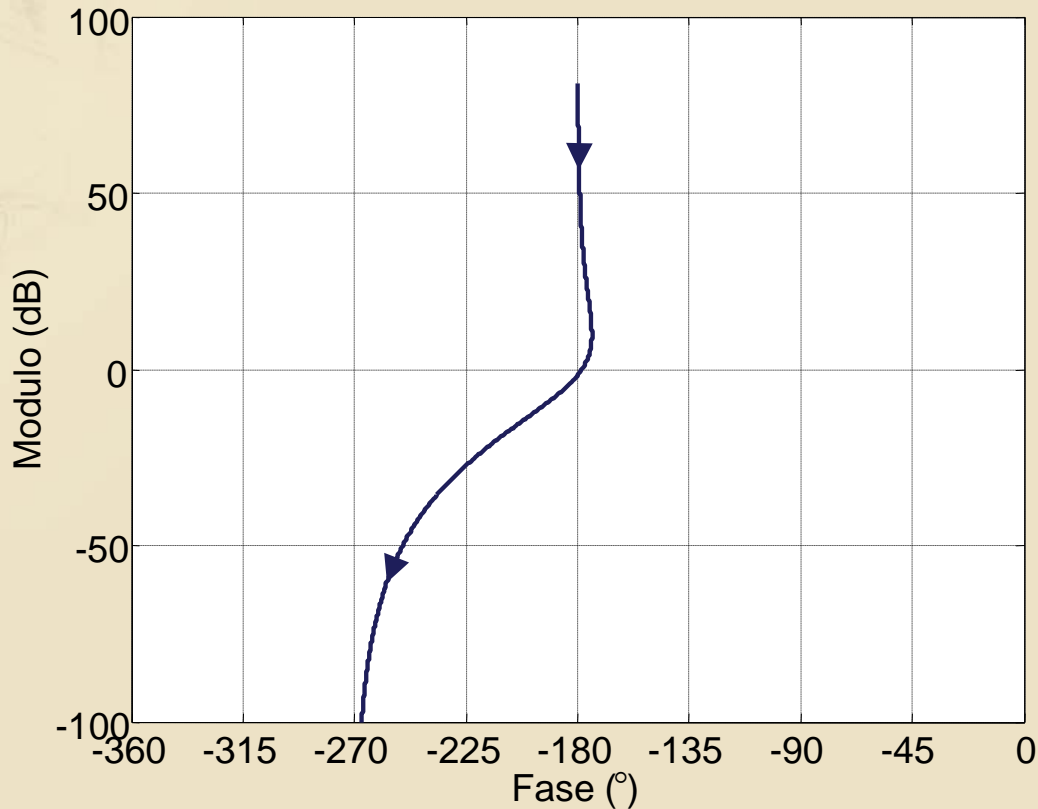


Esempio 1 in Matlab



Esempio 2 (1/2)

$$G(s) = \frac{10(s + 1)}{s^2(s + 2)(s + 4)}$$



Esempio 2 in Matlab

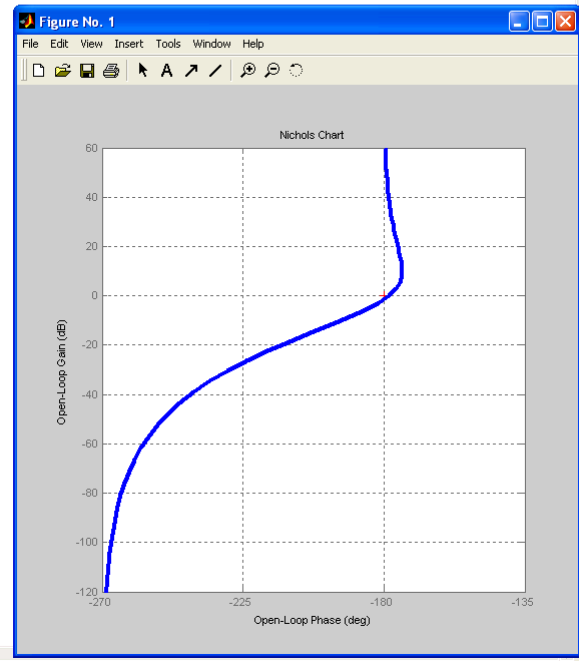
```
Command Window
>> s=tf('s')

Transfer function:
s

>> G=10*(s+1)/s^2/(s+2)/(s+4)

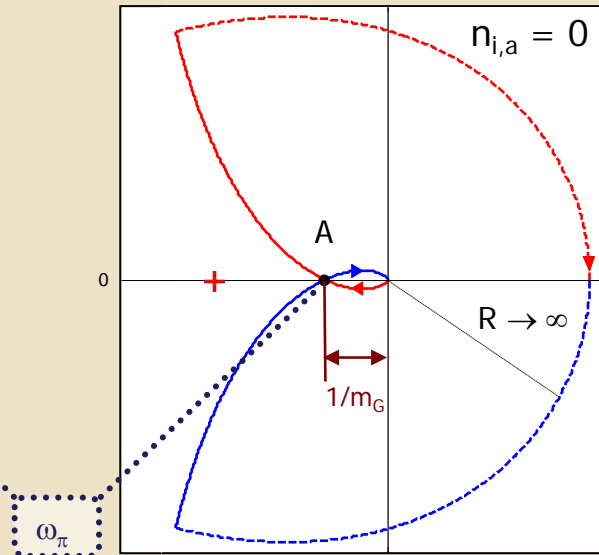
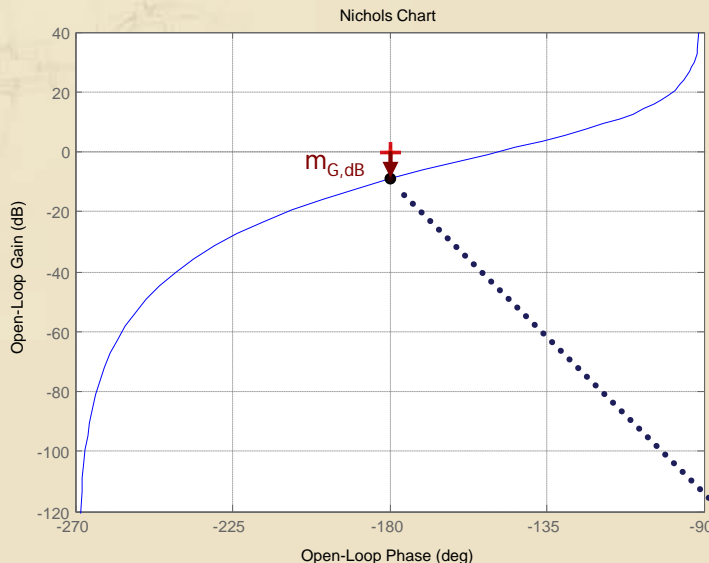
Transfer function:
    10 s + 10
-----
s^4 + 6 s^3 + 8 s^2

>> nichols(G)
>> set(gca,'XGrid','on')
>> set(gca,'YGrid','on')
>>
```



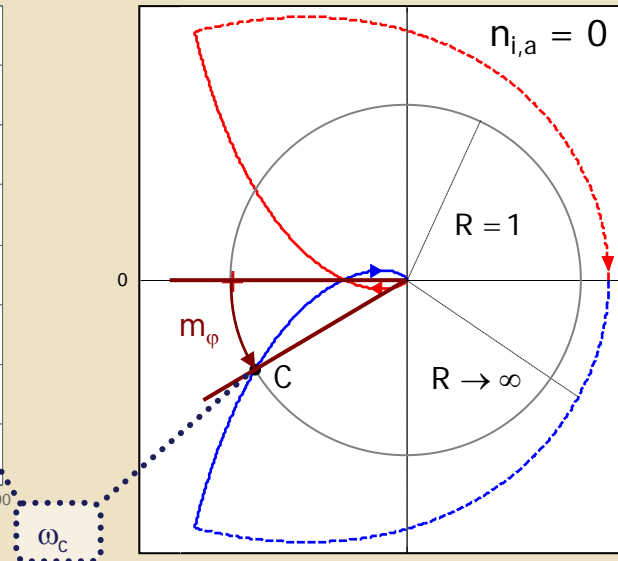
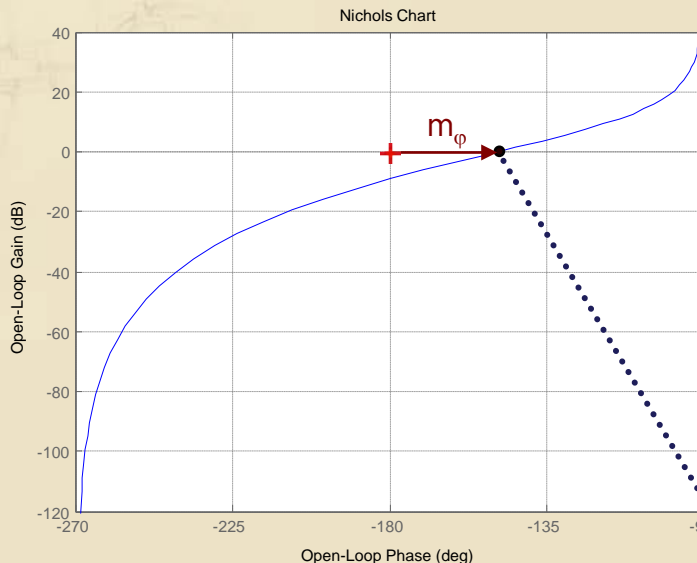
Lettura di m_G sul DdNic

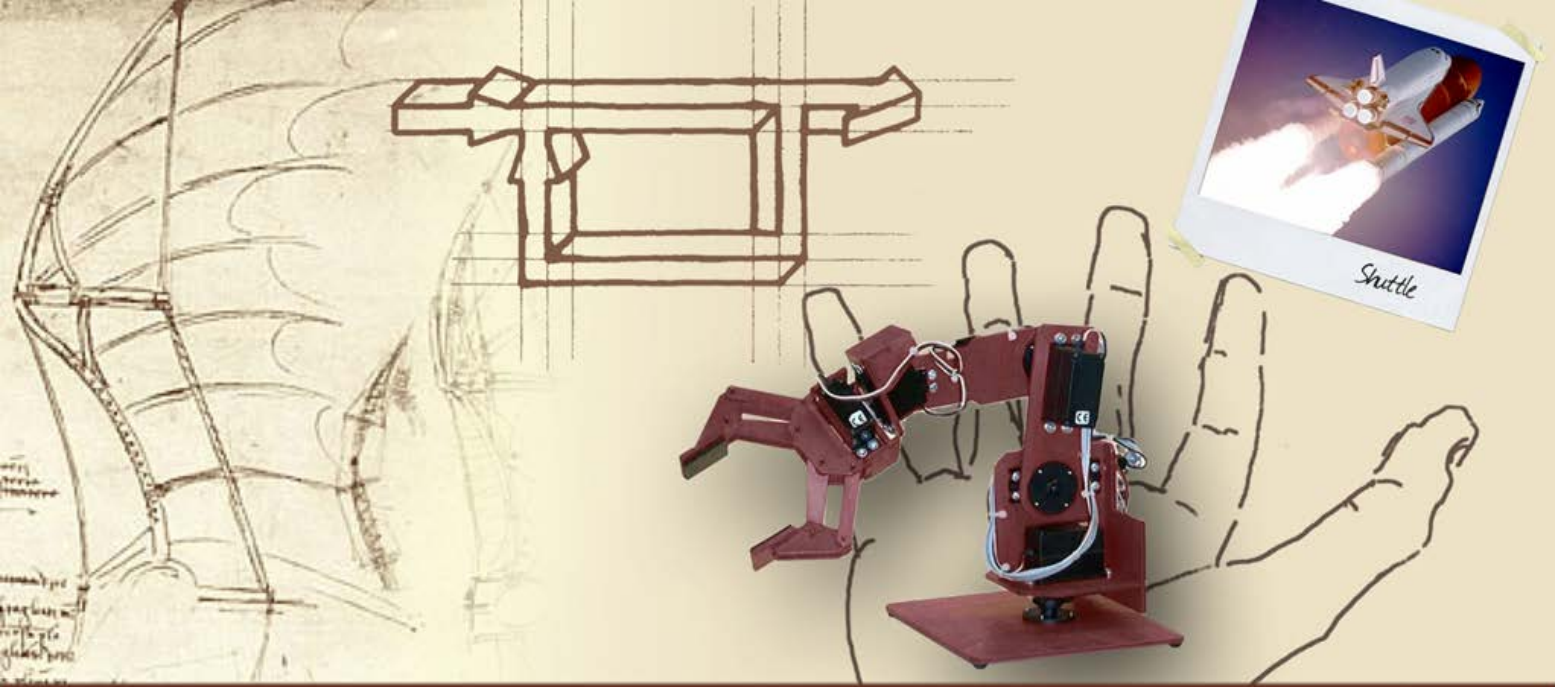
- Il margine di guadagno può essere letto anche sul diagramma di Nichols di $G_a(j\omega)$, osservando che il punto A corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse verticale a fase -180°



Lettura di m_φ sul DdNic

- Il margine di fase può essere letto anche sul diagramma di Nichols di $G_a(j\omega)$, osservando che il punto C corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse orizzontale a 0 dB





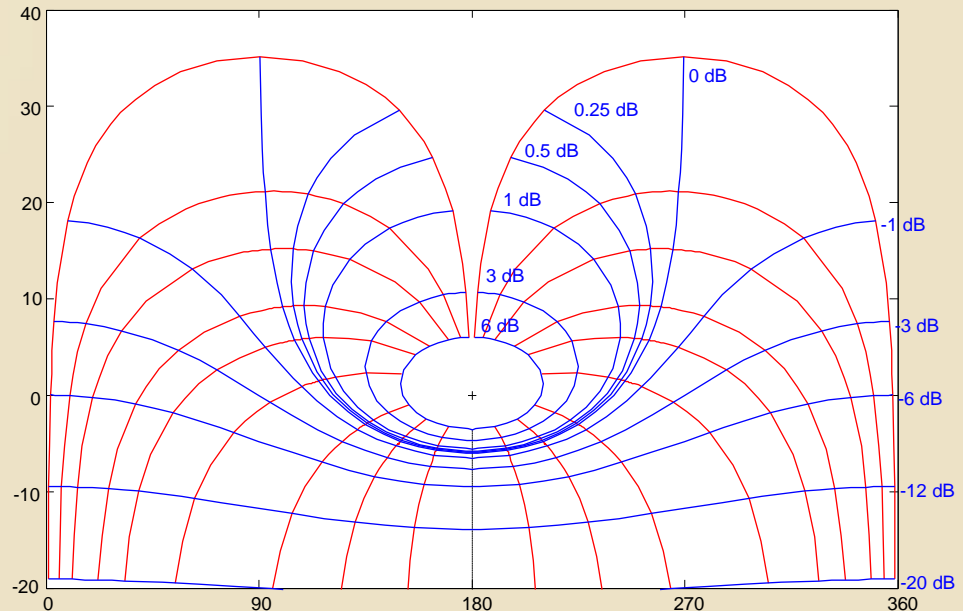
Margini di stabilità

La carta di Nichols

La carta di Nichols (1/2)

- I luoghi a M (modulo) costante e a N (fase) costante possono essere tracciati anche sul piano di Nichols: il loro insieme costituisce la **carta di Nichols**

Generata in Matlab con il comando:
`ngrid('new')`

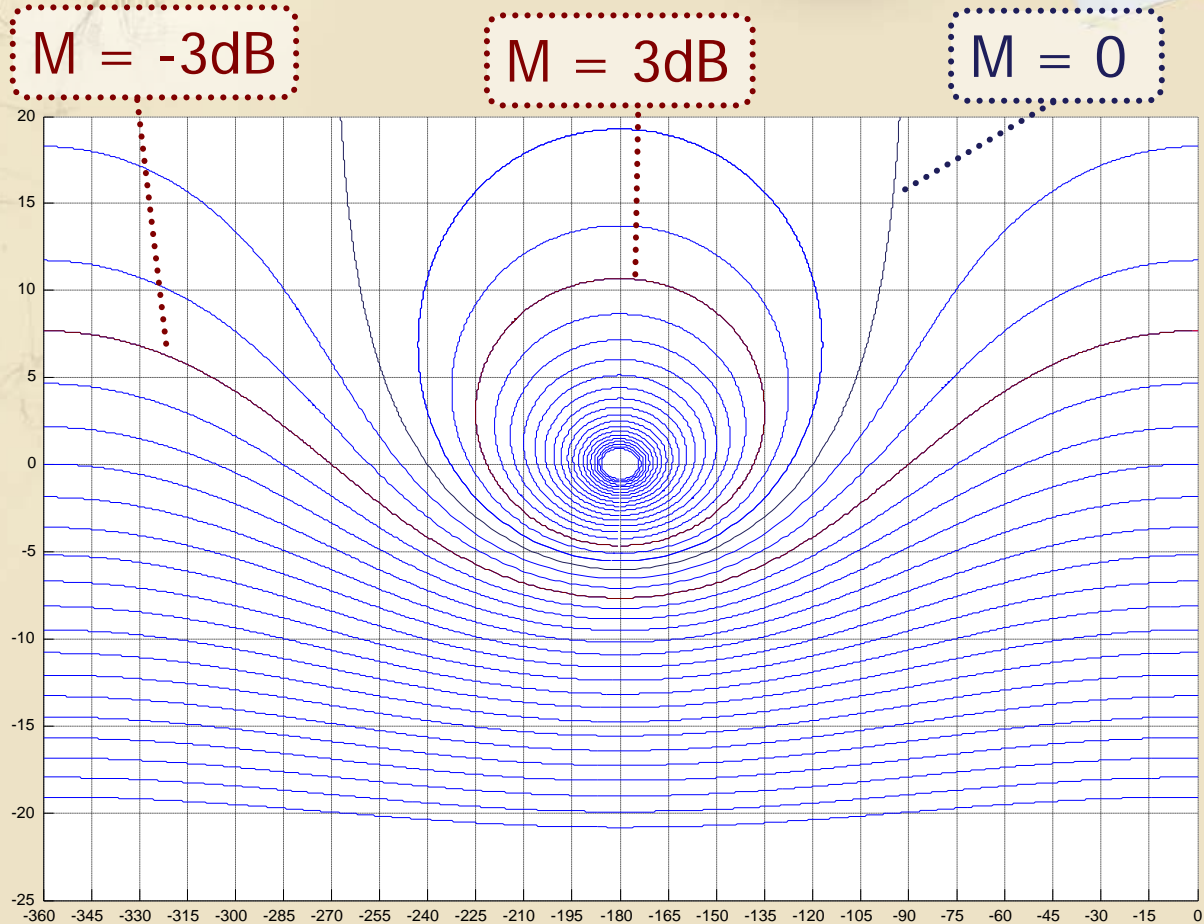




La carta di Nichols (2/2)

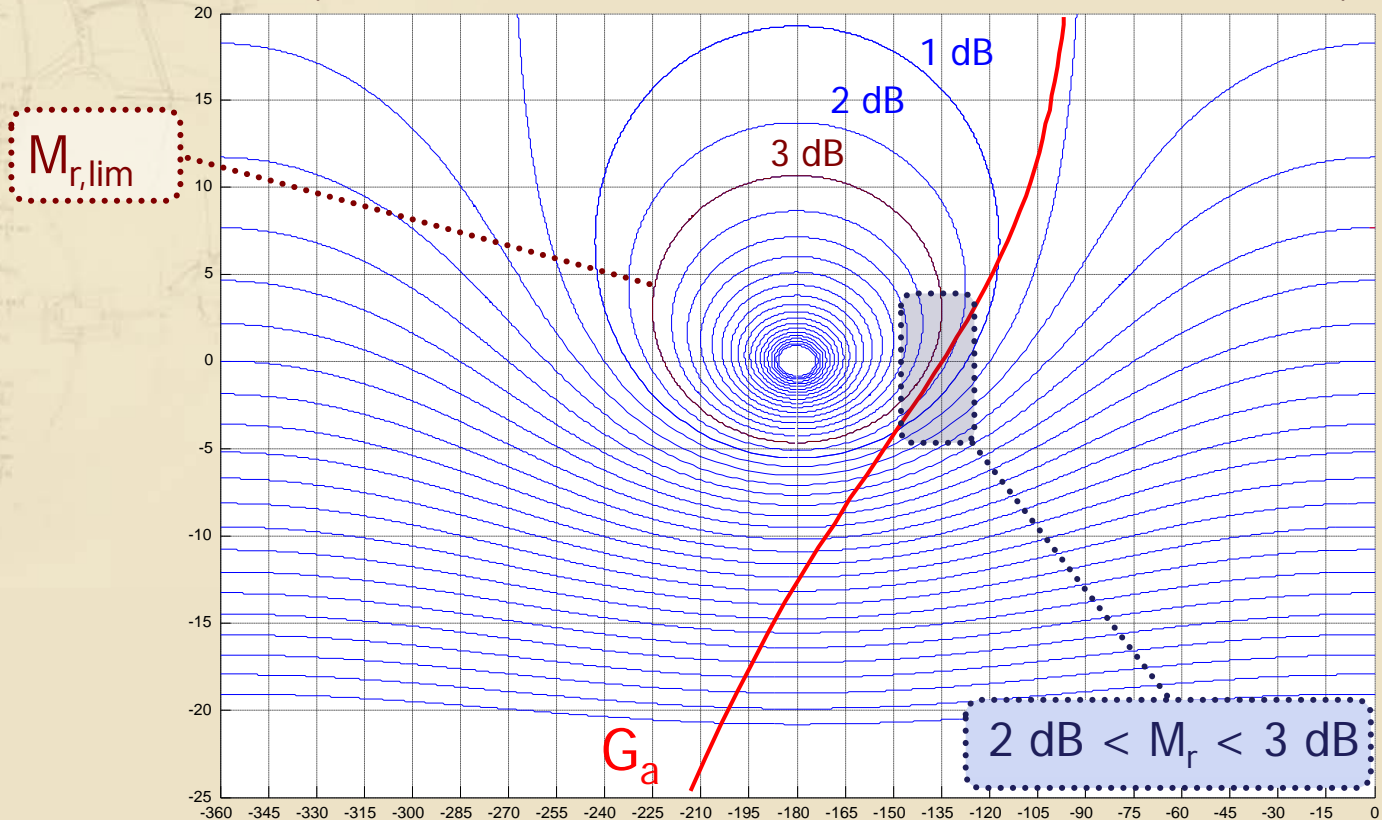
- Sovrapponendo alla carta di Nichols il diagramma di Nichols della funzione d'anello $G_a(j\omega)$, è possibile ricavare il valore di modulo e fase di $W_y(j\omega)$ per ogni ω
- Sono di particolare interesse i **luoghi a modulo costante**, poiché permettono di trovare un **legame fra M_r e m_φ e fra M_r e m_G**

I luoghi a M costante sul piano di Nichols



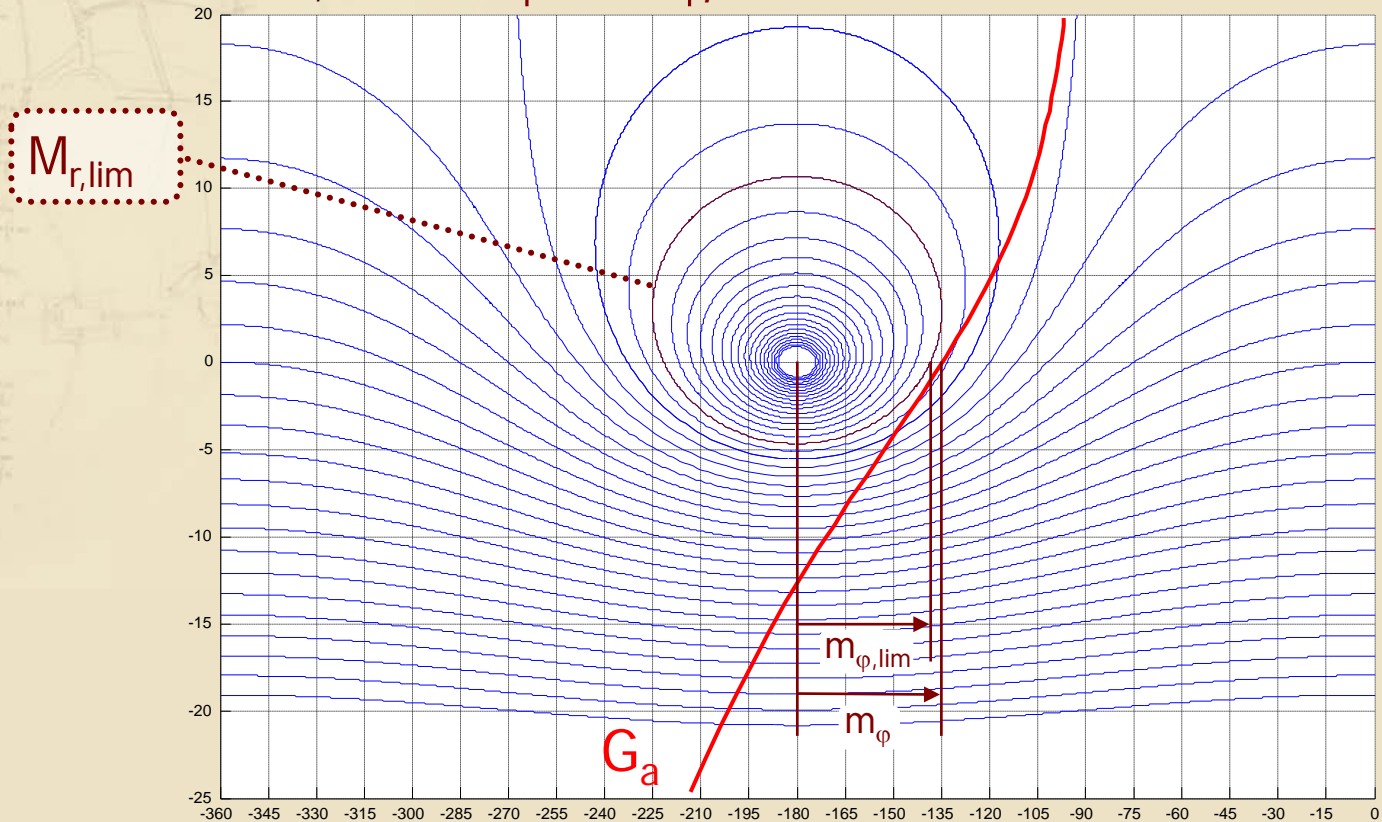
Legame fra M_r e m_φ (1/3)

► $M < M_{r,lim} \Rightarrow$ DdNic di G_a **esterno** alla curva $M_{r,lim}$



Legame fra M_r e m_φ (2/3)

► $M < M_{r,lim} \Rightarrow m_\varphi > m_{\varphi,lim}$





Legame fra M_r e m_φ (3/3)

- ▶ La condizione che il diagramma di Nichols di $G_a(j\omega)$ risulti esterno alla curva $M = M_{r,\text{lim}}$ è **necessaria e sufficiente** a garantire $M_r < M_{r,\text{lim}}$
- ▶ La condizione $m_\varphi > m_{\varphi,\text{lim}}$ (ove $m_{\varphi,\text{lim}}$ è il margine di fase letto in corrispondenza della curva $M = M_{r,\text{lim}}$) è **necessaria ma non sufficiente** per garantire $M_r < M_{r,\text{lim}}$
- ▶ Se il DdNic di $G_a(j\omega)$ interseca la curva $M = M_{r,\text{lim}}$ a pulsazioni inferiori alla ω_c (alla quale viene letto m_φ), la $W_y(j\omega)$ presenta $M_r > M_{r,\text{lim}}$ anche quando $m_\varphi > m_{\varphi,\text{lim}}$

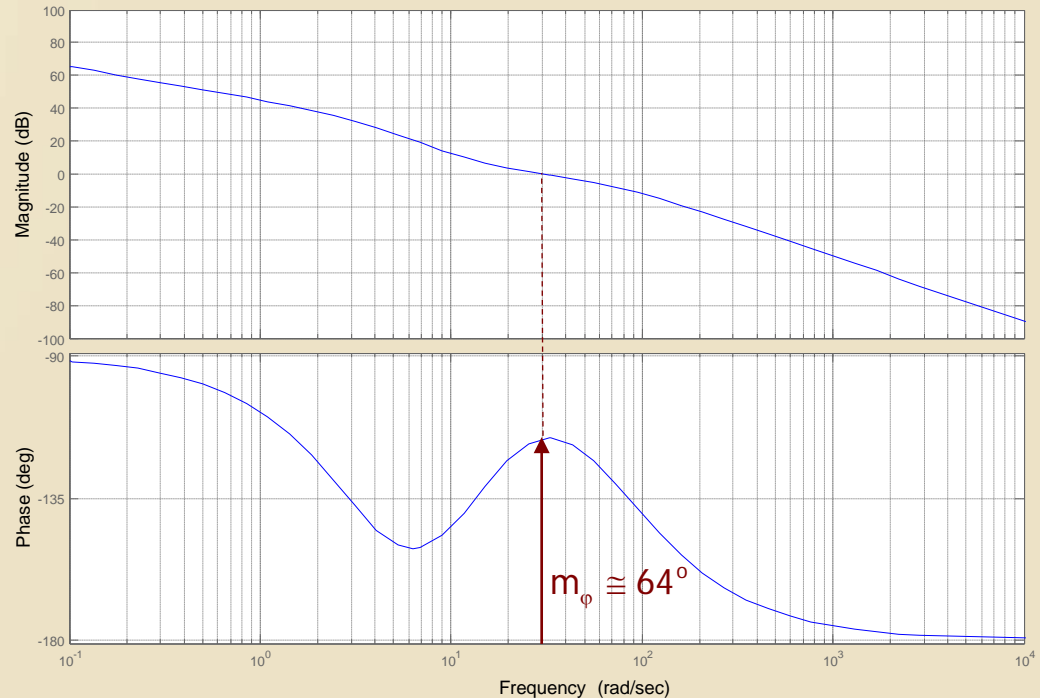
Un esempio (1/3)

$$F(s) = \frac{2(s+5)(s+12)}{s(s+4)(s^2+7.2s+16)}; \quad C(s) = 100 \frac{(1+0.07s)^2}{(1+0.0175s)^2}$$

Si vorrebbe
ottenere in
catena chiusa:
 $M_r < 2$ dB

DdB della fdt
d'anello:

$$G_a(s) = C(s)F(s)$$



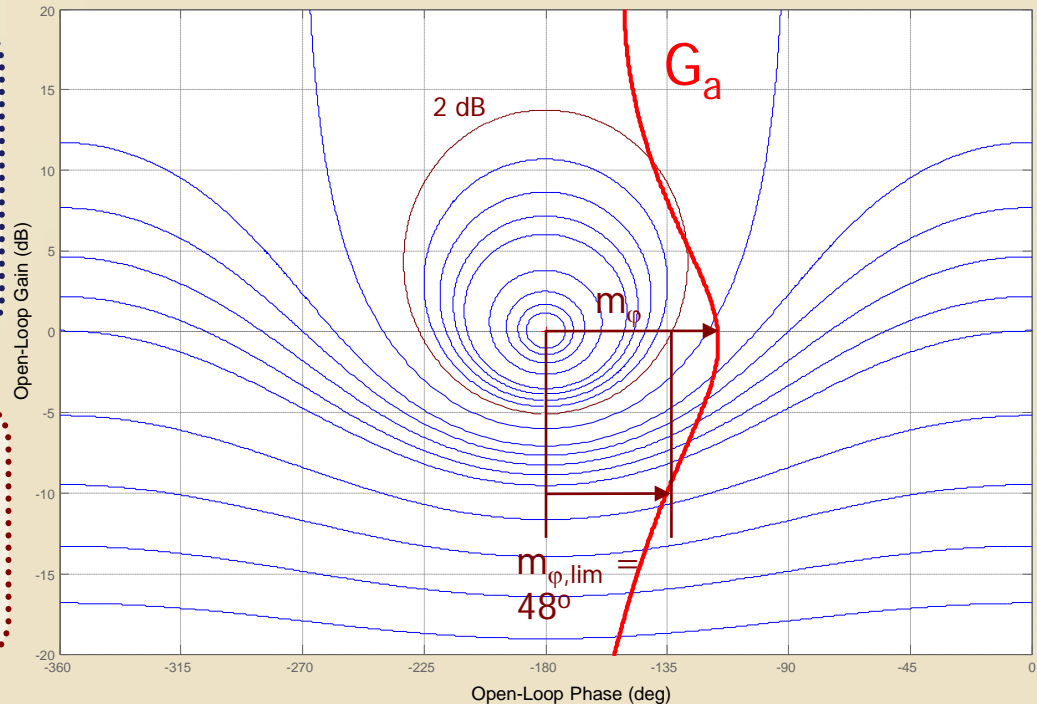
Un esempio (2/3)

$$F(s) = \frac{2(s+5)(s+12)}{s(s+4)(s^2+7.2s+16)}; \quad C(s) = 100 \frac{(1+0.07s)^2}{(1+0.0175s)^2}$$

m_ϕ soddisfa la condizione necessaria per avere $M_r < 2$ dB:

$$m_\phi > 48^\circ$$

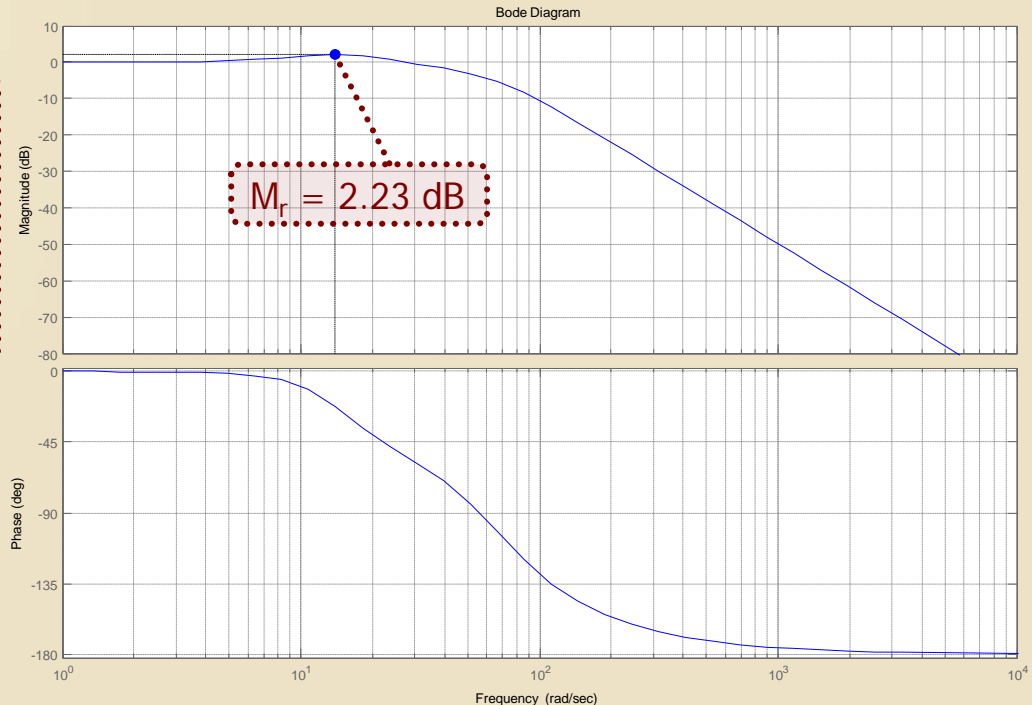
Nonostante ciò, il DdNic di $G_a(j\omega)$ interseca la curva $M = 2$ dB



Un esempio (3/3)

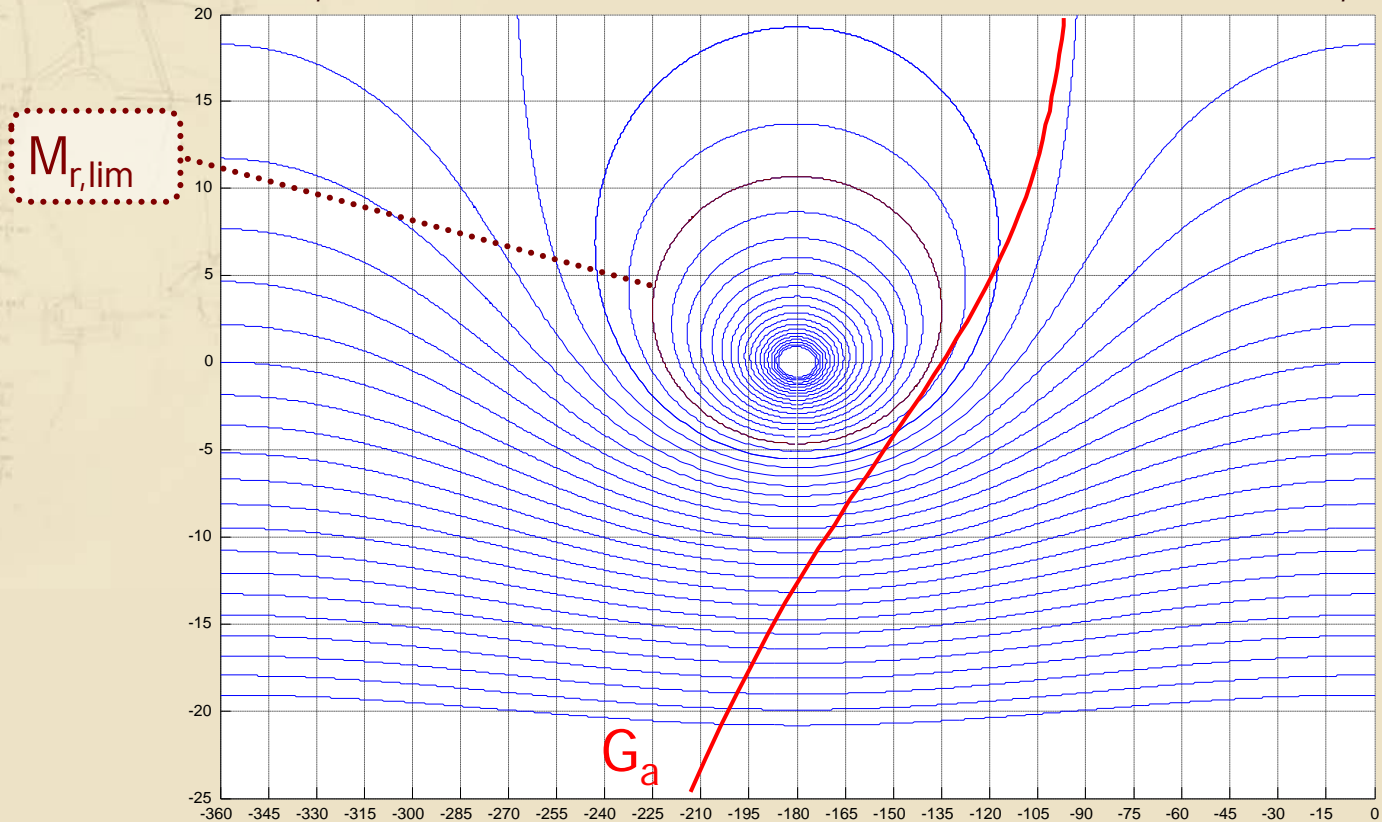
$$F(s) = \frac{2(s+5)(s+12)}{s(s+4)(s^2+7.2s+16)}; \quad C(s) = 100 \frac{(1+0.07s)^2}{(1+0.0175s)^2}$$

Il picco di risonanza
della fdt in
catena chiusa è
superiore a
2 dB



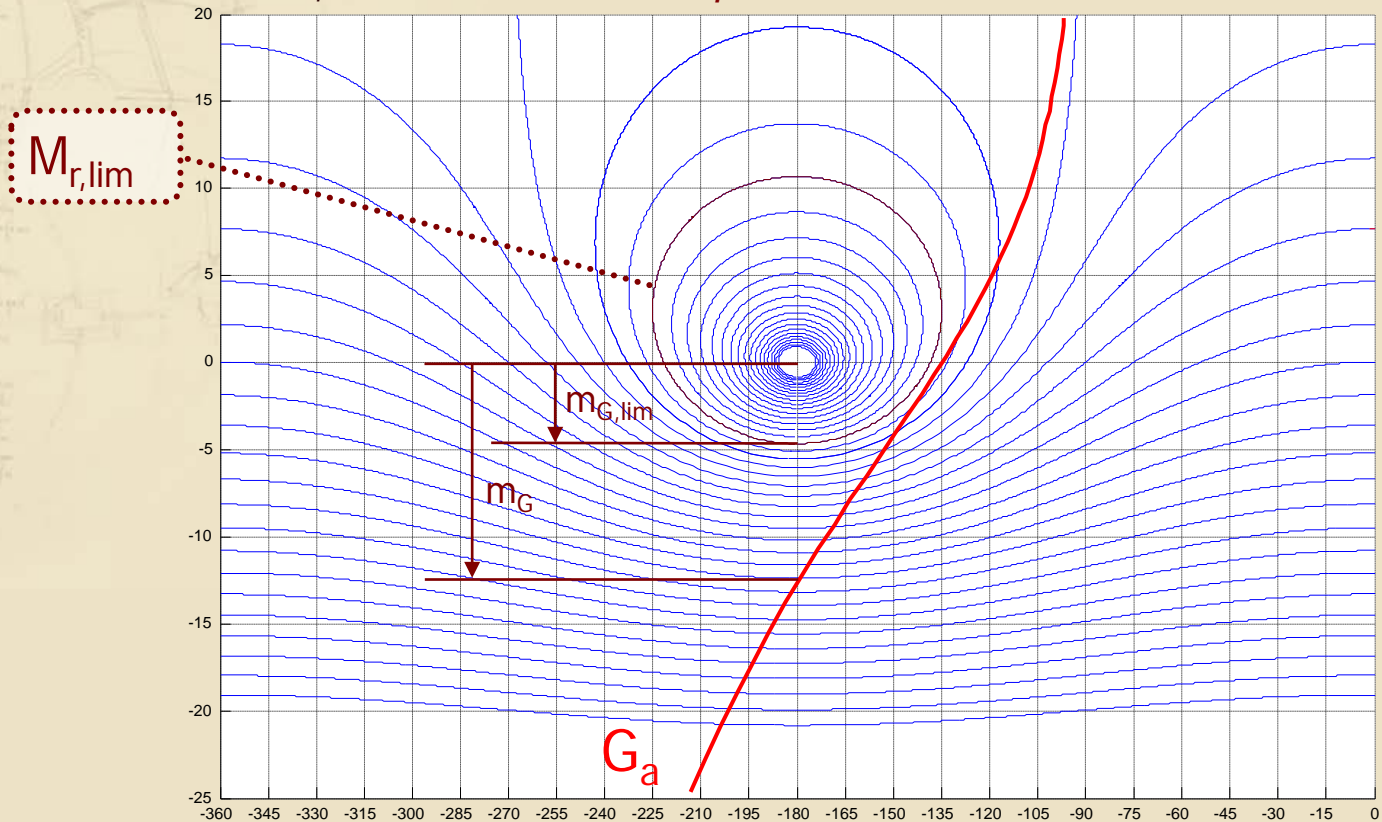
Legame fra M_r e m_G (1/4)

► $M < M_{r,lim} \Rightarrow$ DdNic di G_a **esterno** alla curva $M_{r,lim}$



Legame fra M_r e m_G (2/4)

► $M < M_{r,lim} \Rightarrow m_G > m_{G,lim}$





Legame fra M_r e m_G (3/4)

- La condizione $m_G > m_{G,\text{lim}}$ (ove $m_{G,\text{lim}}$ è il margine di guadagno letto in corrispondenza della curva $M = M_{r,\text{lim}}$) è **necessaria ma non sufficiente** per garantire $M_r < M_{r,\text{lim}}$
- Se il DdNic di $G_a(j\omega)$ interseca la curva $M = M_{r,\text{lim}}$ a pulsazioni inferiori alla ω_π (alla quale viene letto m_G), la $W_y(j\omega)$ presenta $M_r > M_{r,\text{lim}}$ anche quando $m_G > m_{G,\text{lim}}$



Legame fra M_r e m_G (4/4)

- Poiché $m_{G,lim}$ risulta contenuto anche per piccoli valori di $M_{r,lim}$, il soddisfacimento di $m_G > m_{G,lim}$ risulta spesso insufficiente a garantire $M_r < M_{r,lim}$
- Nell'esempio precedente il margine di guadagno era infinito e quindi superiore a qualunque $m_{G,lim}$ considerato, indipendentemente dall'effettivo picco di risonanza

N.B.: Nella pratica dinamiche di alta frequenza trascurate nel modello e vincoli tecnologici impediscono al margine di guadagno di essere infinito



Relazioni numeriche fra margini e M_r

- I legami fra picco di risonanza e margini di stabilità ricavati dalla carta di Nichols possono essere espressi numericamente come:

$$m_{\varphi, \text{lim}} = \arctan \left(\frac{\sqrt{4M_{r, \text{lim}}^2 - 1}}{2M_{r, \text{lim}}^2 - 1} \right), \quad m_{G, \text{lim}} = \frac{M_{r, \text{lim}}}{M_{r, \text{lim}} + 1}$$

con $m_{\varphi, \text{lim}}$ in rad, $M_{r, \text{lim}}$ e $m_{G, \text{lim}}$ in unità naturali

$$(m_{\varphi, \text{lim}})_{\text{gradi}} \cong 60^\circ - 5 (M_{r, \text{lim}})_{\text{dB}}$$

$$(m_{G, \text{lim}})_{\text{dB}} \cong 6 - 0.4 (M_{r, \text{lim}})_{\text{dB}}$$

Approssimazioni
valide per

$$0\text{dB} < M_{r, \text{lim}} < 6\text{dB}$$



Osservazioni conclusive

- La condizione $M_r < M_{r,lim}$, se rispettata, garantisce una buona robustezza della stabilità, con soddisfacenti margini di fase e di guadagno (rispettivamente pari almeno a $m_{\varphi,lim}$ e $m_{G,lim}$)
- Le condizioni $m_{\varphi} > m_{\varphi,lim}$ e $m_G > m_{G,lim}$ non garantiscono con assoluta certezza che il picco di risonanza risulti inferiore a $M_{r,lim}$, anche se il suo valore è comunque contenuto in presenza di buoni margini di stabilità