

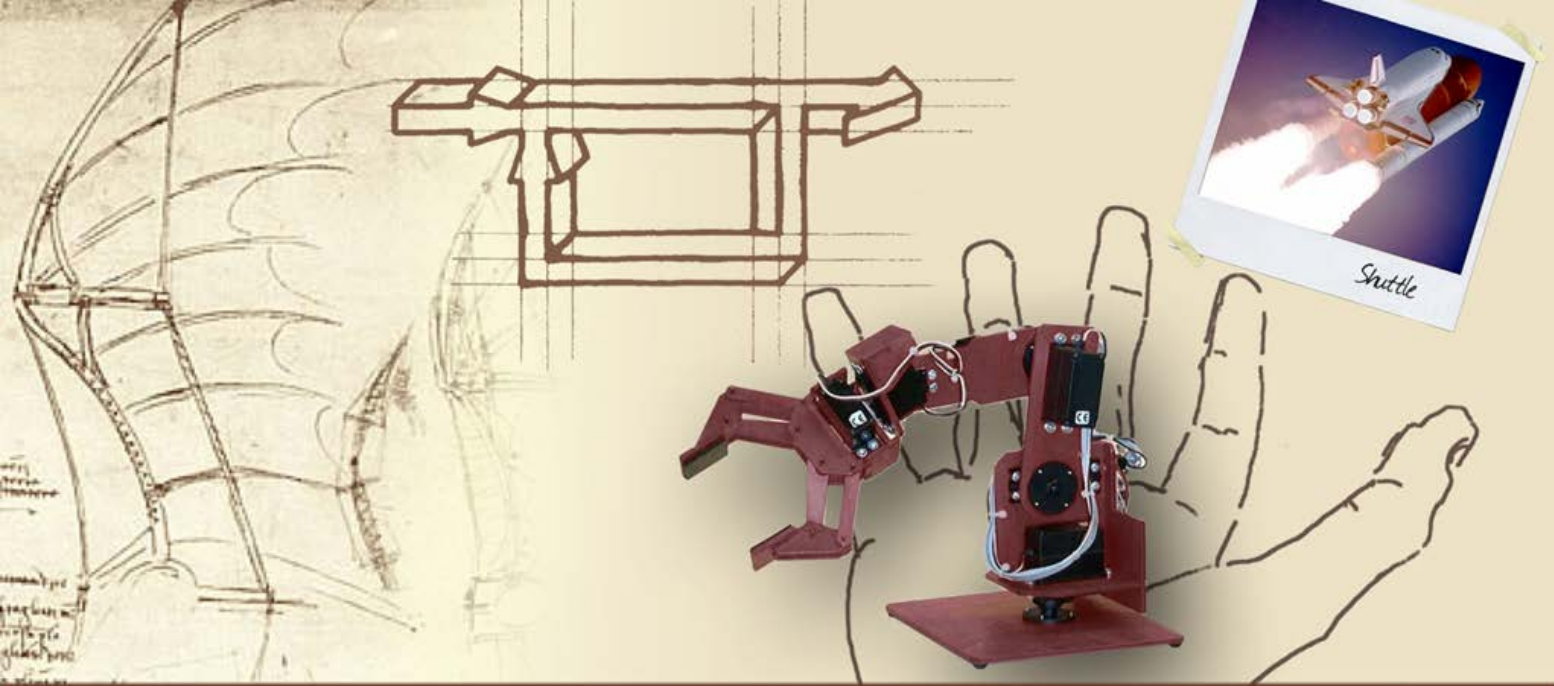
Stabilità dei sistemi di controllo in retroazione

Margini di stabilità



Margini di stabilità

- Indicatori di robustezza della stabilità
- Margine di guadagno
- Margine di fase
- Stabilità regolare e marginale ed estensioni delle definizioni dei margini
- M_r come margine di stabilità: i luoghi a modulo (e a fase) costante

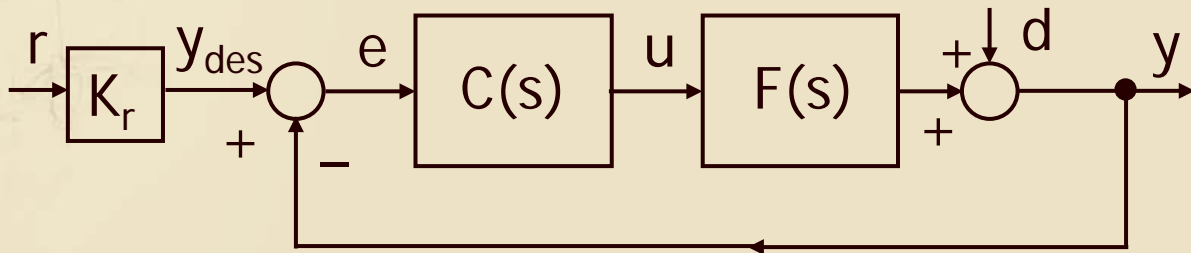


Margini di stabilità

**Indicatori di robustezza
della stabilità**

Stabilità e stabilità robusta (1/3)

- Il criterio di Nyquist permette di valutare l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa $W(s)$ a partire dalla funzione d'anello $G_a(s)$



- L'analisi della stabilità e l'effettiva correttezza dei risultati si basano sull'ipotesi che il **sistema** sia **in condizioni nominali**, cioè che la **conoscenza** di $G_a(s)$ sia **esatta**



Stabilità e stabilità robusta (2/3)

- Nella pratica si hanno sempre **discrepanze fra** il comportamento del **sistema vero e** quello del **modello** utilizzato per rappresentarlo

Variazioni dei parametri della $F(s)$; scarsa accuratezza del modello del processo

Variazioni dei parametri della $C(s)$; problemi nella realizzazione pratica del compensatore

Variazioni della funzione d'anello $G_a(s)$



Stabilità e stabilità robusta (3/3)

- È fondamentale garantire il mantenimento dell'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa anche in condizioni perturbate, a causa di variazioni di $G_a(s)$ o di incertezze nella sua conoscenza: si parla in tal caso di **stabilità robusta**
- Per valutare il **grado di robustezza** del sistema a fronte di variazioni del suo modello nominale è necessario introdurre opportuni **indicatori di robustezza**

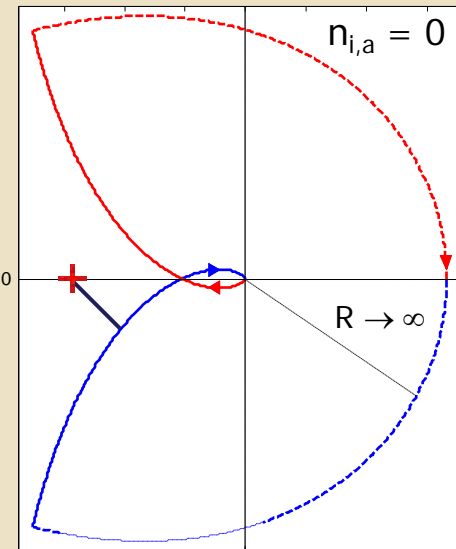


Indicatori di robustezza (1/3)


- Gli indicatori di robustezza devono permettere di **quantificare l'ampiezza delle massime perturbazioni** sul modello che garantiscono il mantenimento dell'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa
- Intuitivamente la robustezza è tanto maggiore quanto più il sistema è "lontano" dalla condizione per cui si avrebbe il passaggio dalla stabilità all'instabilità

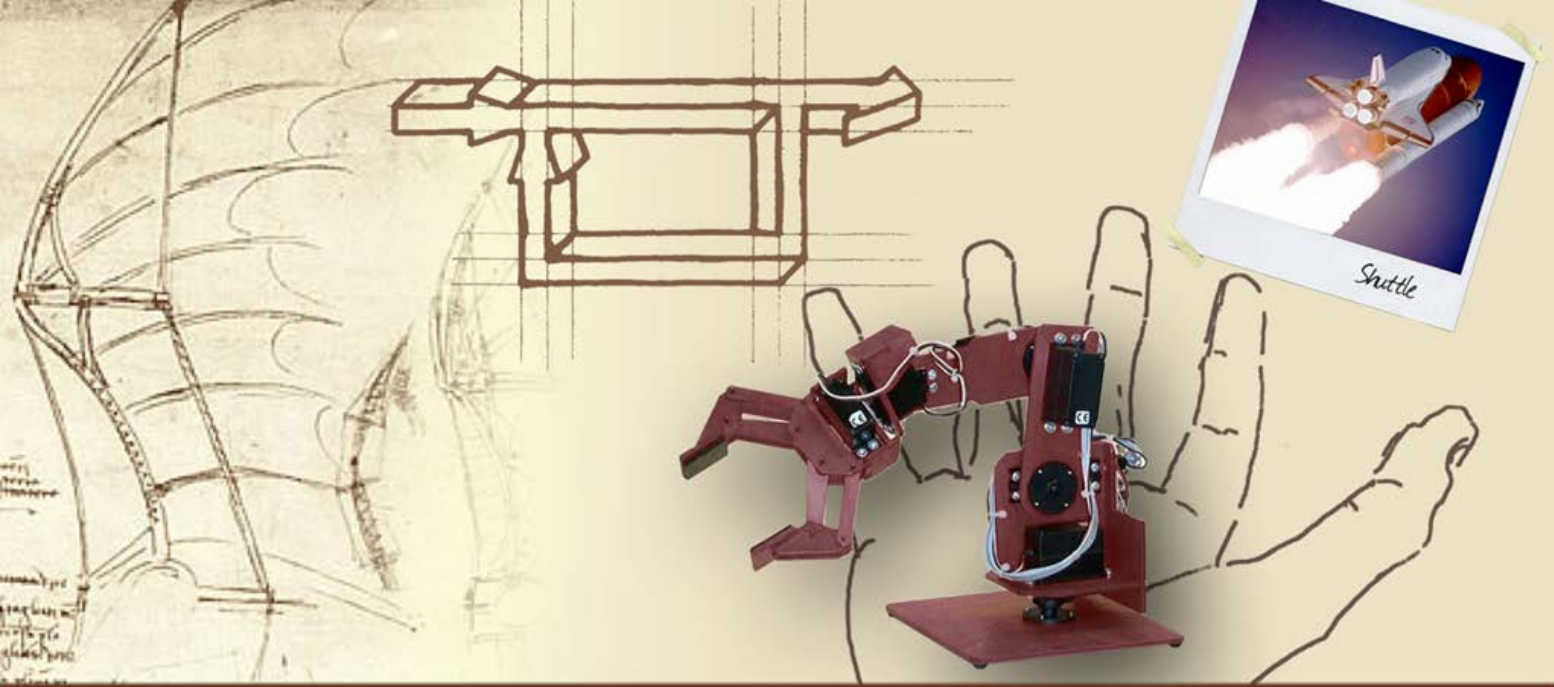
Indicatori di robustezza (2/3)

- Dall'applicazione del criterio di Nyquist possiamo intuire un modo "geometrico" per caratterizzare il grado di robustezza della stabilità di un sistema: la **distanza** del diagramma polare di $G_a(j\omega)$ **dal punto critico** di Nyquist
- Se la distanza è elevata, limitate variazioni di $G_a(s)$ non sono sufficienti a far sì che il diagramma scavalchi il punto critico, rendendo il sistema instabile ($N=2 \rightarrow n_{i,c}=2$)



Indicatori di robustezza (3/3)

- La distanza minima del diagramma polare di $G_a(j\omega)$ dal punto critico di Nyquist, detta **margine di stabilità vettoriale** , è un buon indicatore di robustezza ma **non è di facile lettura** 
- Risulta opportuno introdurre come indicatori di robustezza i **margini di guadagno e di fase** che, tenendo conto separatamente degli effetti di variazioni del modulo e della fase della fdt d'anello, possono essere valutati agevolmente sia dal diagramma di Nyquist, sia dai diagrammi di Bode e di Nichols



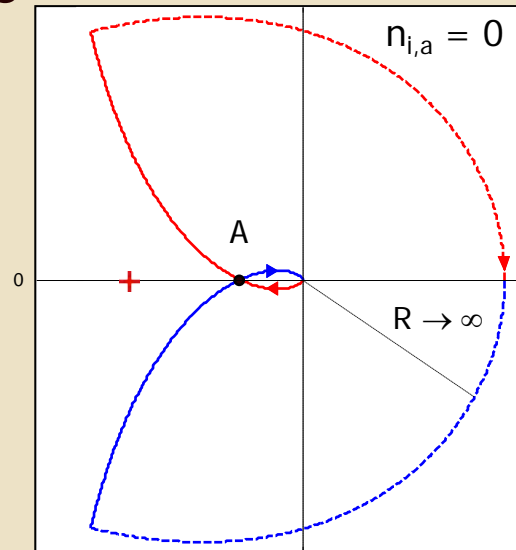
Margini di stabilità

Margine di guadagno

Margine di guadagno (1/4)

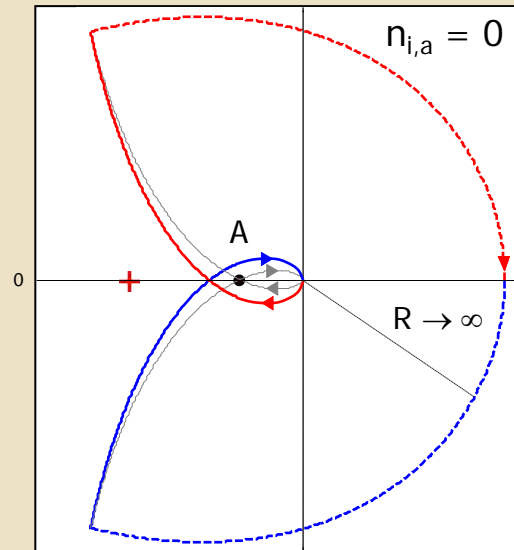
- Sia $G_a(j\omega) = K_c G_{a,f}(j\omega)$, con $G_{a,f}(j\omega)$ a guadagno positivo, priva di poli a parte reale positiva, e sia il suo diagramma polare tale da attraversare una sola volta il semiasse reale negativo in un punto A alla destra del punto critico

Per $K_c = 1$, il sistema in catena chiusa risulta asintoticamente stabile ($N=0 \rightarrow n_{i,c} = 0$)



Margine di guadagno (2/4)

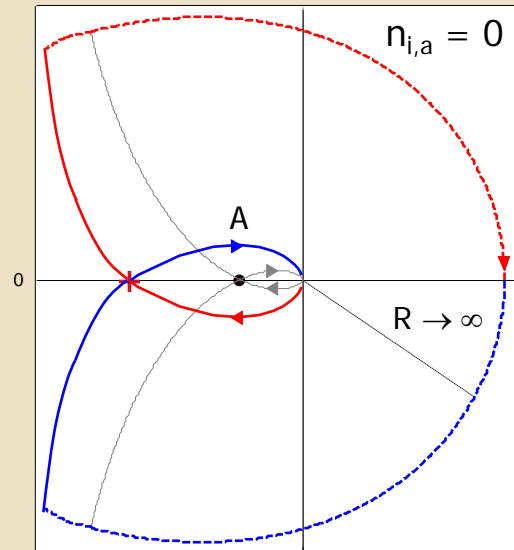
- Aumentando K_c , il modulo della funzione d'anello aumenta ed il punto di attraversamento del semiasse reale negativo si sposta verso sinistra



Margine di guadagno (2/4)

- Aumentando K_c , il modulo della funzione d'anello aumenta ed il punto di attraversamento del semiasse reale negativo si sposta verso sinistra

Il sistema in catena chiusa continua ad essere asintoticamente stabile fino a quando il punto di attraversamento non viene a coincidere con il punto critico



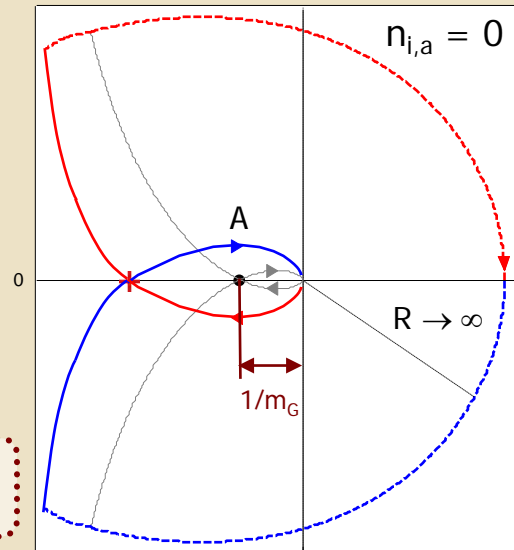
Margine di guadagno (3/4)

- Il valore di K_c (m_G) per cui la funzione d'anello passa proprio per il punto critico rappresenta il fattore moltiplicativo massimo che non deve essere raggiunto per preservare l'asintotica stabilità in catena chiusa

Tale valore è detto
marginе di guadagno

$$m_G = \frac{1}{|x_A|}$$

$x_A =$ ascissa di A



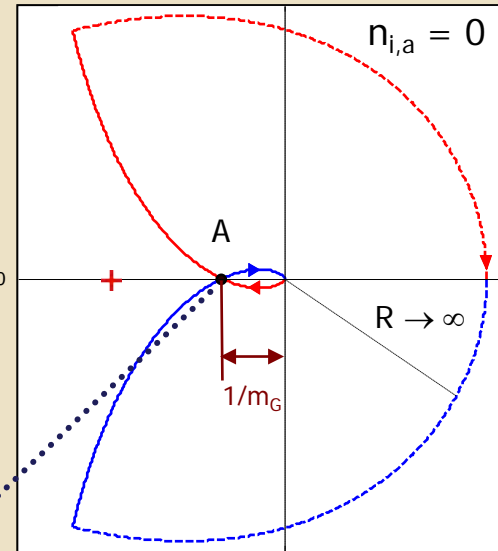
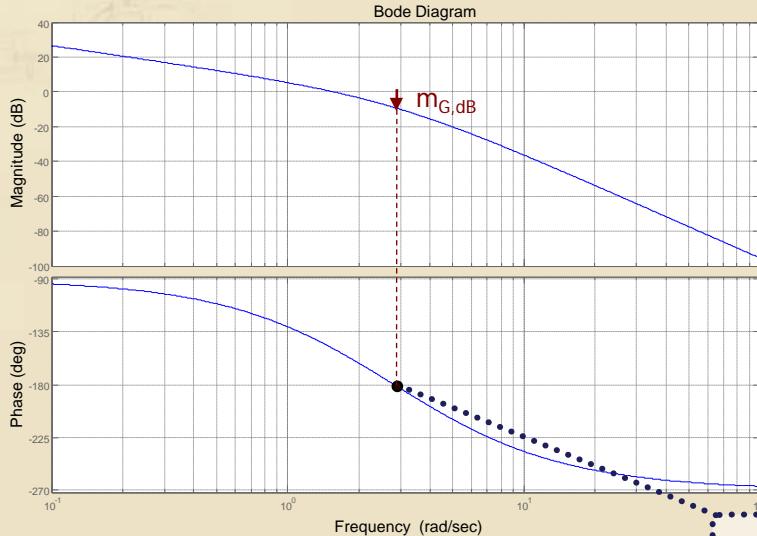


Margine di guadagno (4/4)

- Il **marginale di guadagno** è un **indicatore del grado di robustezza** della stabilità del sistema in catena chiusa **a fronte di possibili incertezze o variazioni del guadagno** della funzione d'anello

Lettura di m_G sui DdB (1/2)

- Il margine di guadagno può essere letto agevolmente sui diagrammi di Bode di $G_a(j\omega)$, osservando che il punto A viene raggiunto alla pulsazione (ω_π) alla quale $\varphi_{G_a}(j\omega_\pi) = -180^\circ$



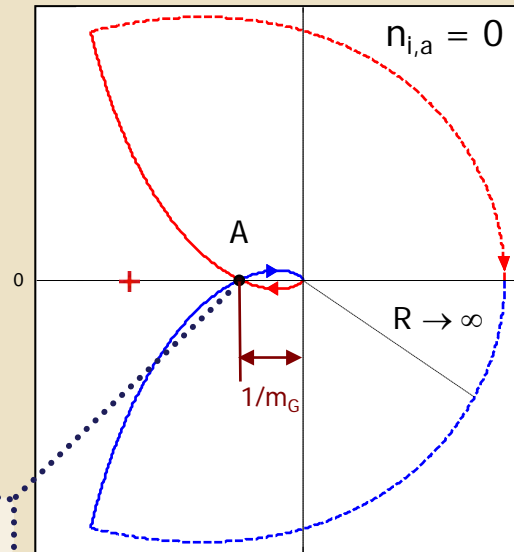
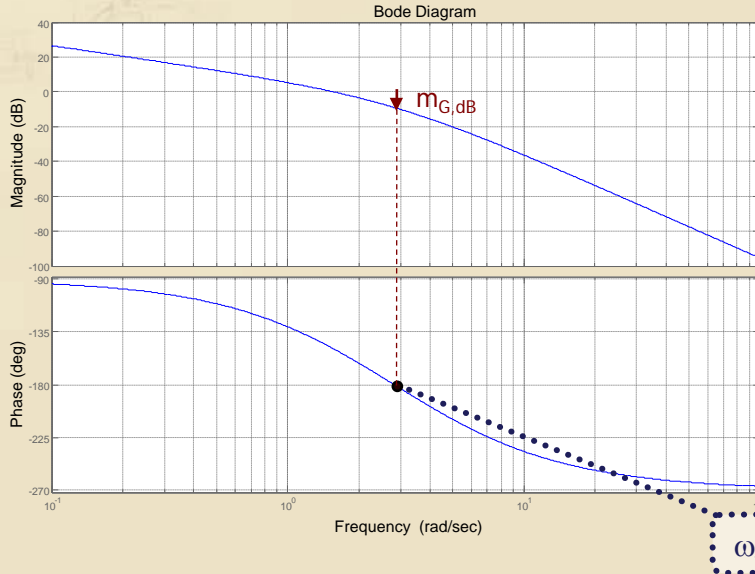
Lettura di m_G sui DdB (2/2)

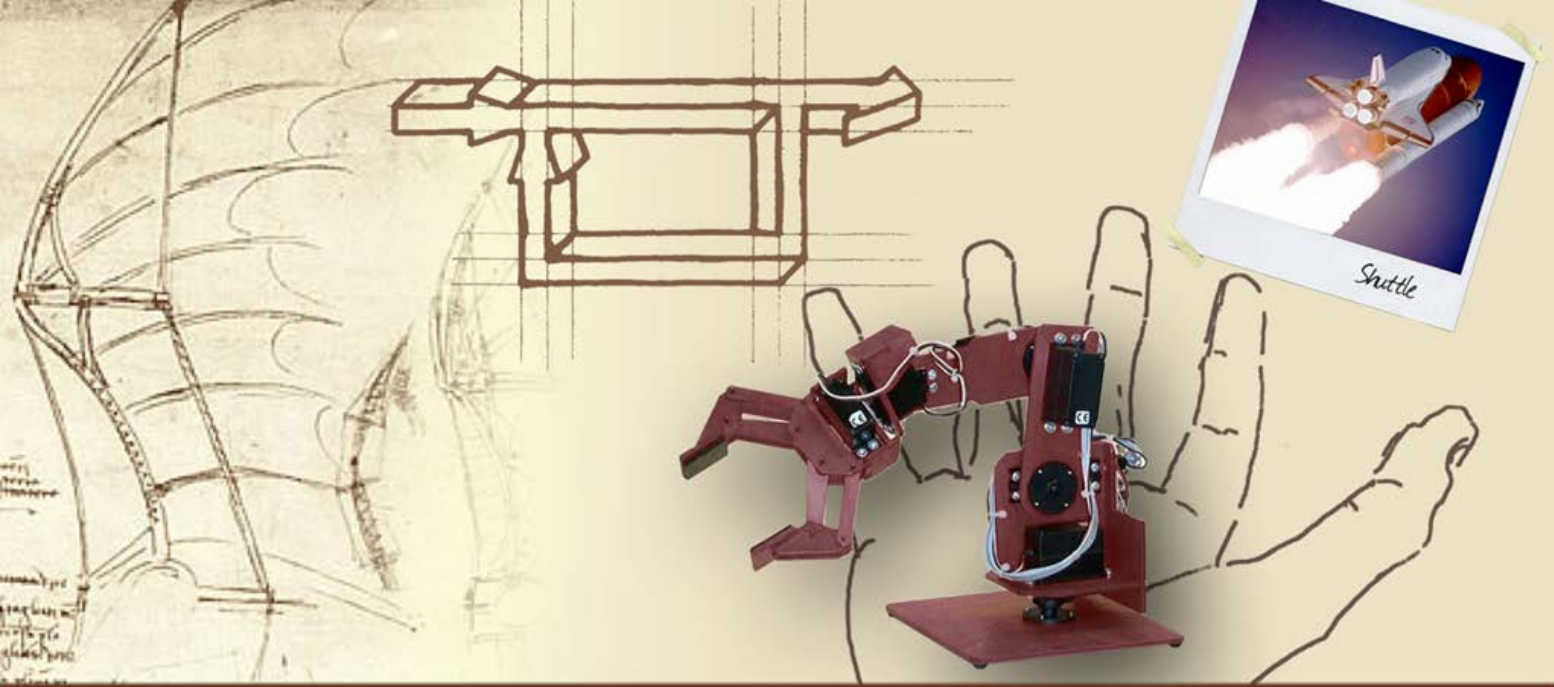
➤ Sui DdB:

$$m_{G,dB} = - \left| G_a(j\omega_\pi) \right|_{dB}$$

➤ Sul DdN:

$$m_G = \frac{1}{|x_A|}$$





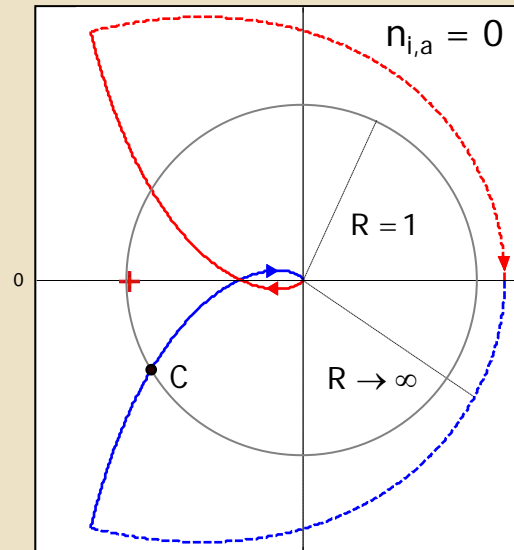
Margini di stabilità

Margine di fase

Margine di fase (1/4)

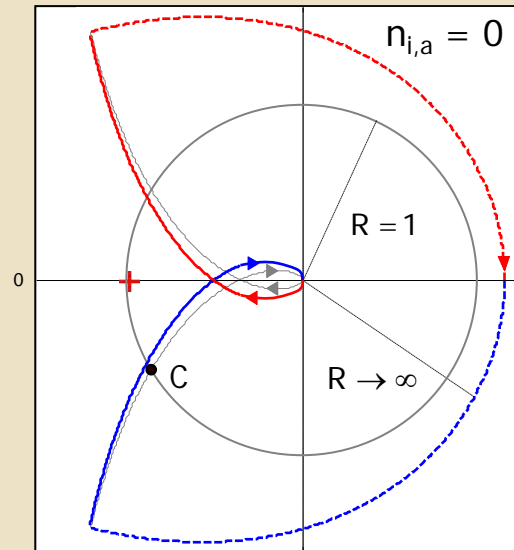
- Sia $G_a(j\omega)$ a guadagno positivo, priva di poli a parte reale positiva, e sia il suo diagramma polare tale da attraversare una sola volta la circonferenza di raggio unitario, centrata nell'origine, in un punto C
- Sia $\varphi_{G_a}(j\omega_c) > -180^\circ$ ove ω_c è la pulsazione relativa al punto C (**N.B.** $|G_a(j\omega_c)| = 1$)

Il sistema in catena chiusa è asintoticamente stabile



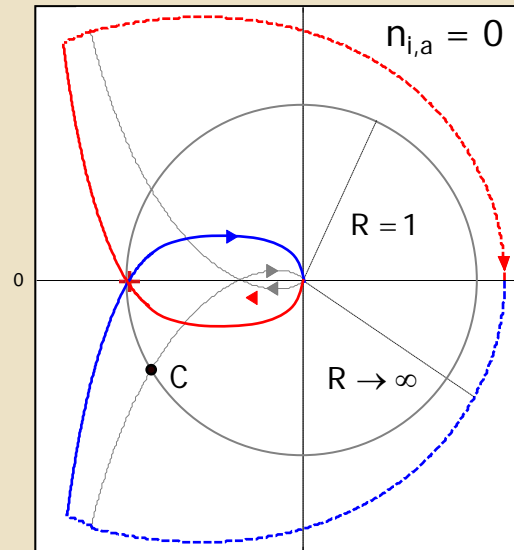
Margine di fase (2/4)

- Una **perdita di fase** alla pulsazione ω_c (ad esempio a causa della presenza di un ritardo nell'anello di retroazione) fa spostare il punto di intersezione con la circonferenza unitaria verso il punto critico di Nyquist



Margine di fase (2/4)

- Una **perdita di fase** alla pulsazione ω_c (ad esempio a causa della presenza di un ritardo nell'anello di retroazione) fa spostare il punto di intersezione con la circonferenza unitaria verso il punto critico di Nyquist
- Il sistema in catena chiusa rimane asintoticamente stabile fino a quando la perdita di fase è tale da portare il punto di intersezione a coincidere con il punto critico

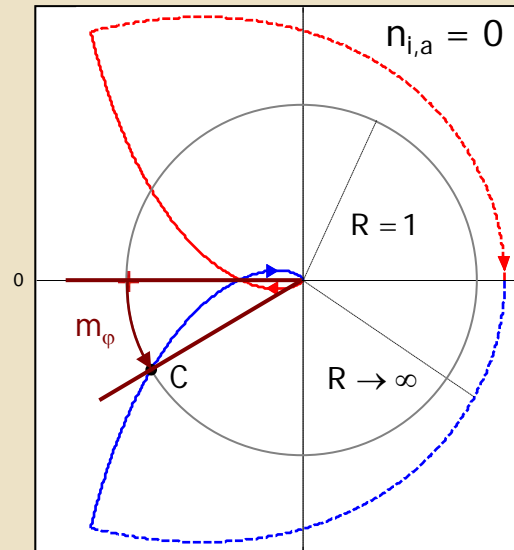


Margine di fase (3/4)

- Tale perdita di fase (alla pulsazione ω_c) costituisce il **margin**e di fase (m_φ)

$$m_\varphi \doteq 180^\circ + \angle G_a(j\omega_c)$$

- m_φ indica la **massima perdita di fase** sopportabile in ω_c **senza perdere l'asintotica stabilità in catena chiusa**



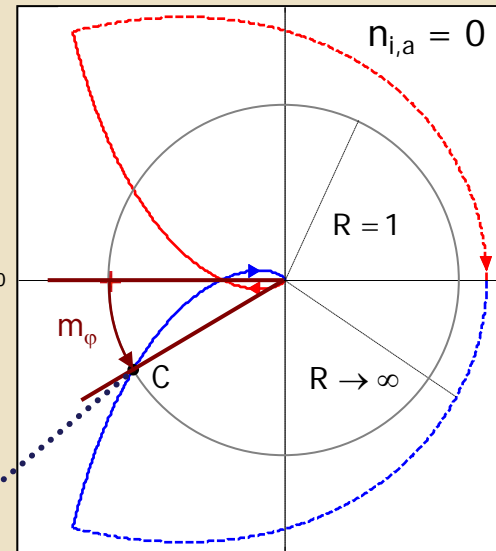
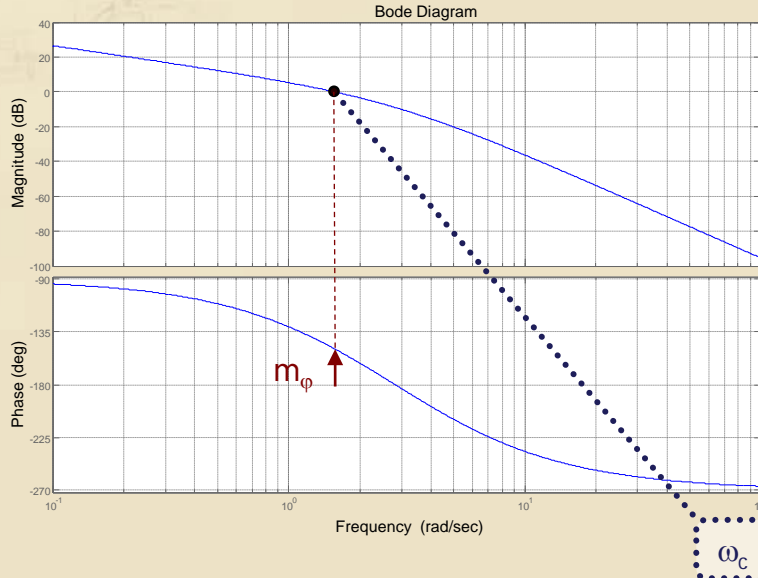


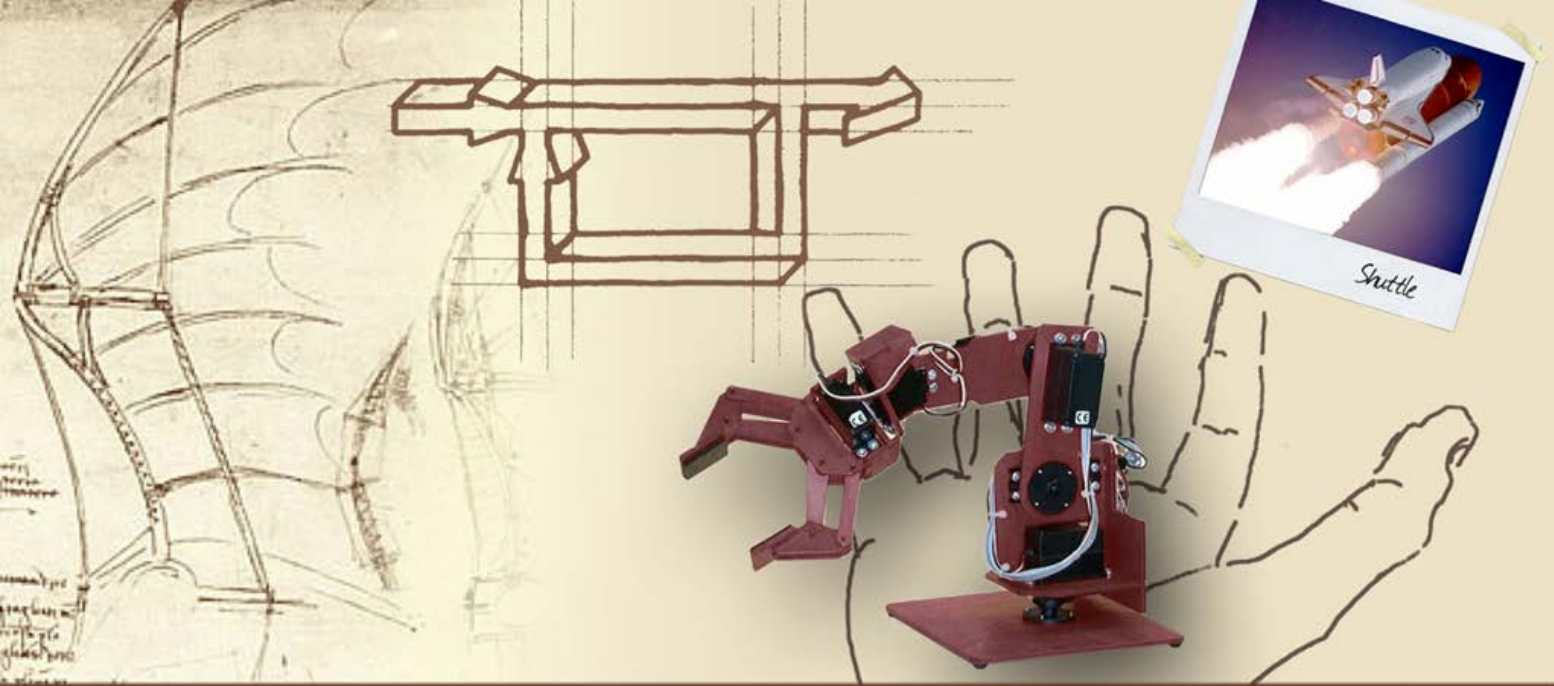
Margine di fase (4/4)

- Il **margine di fase** è un **indicatore del grado di robustezza** della stabilità del sistema in catena chiusa a **fronte di possibili incertezze o variazioni della fase** della funzione d'anello alla pulsazione ω_c o **a fronte della presenza di eventuali ritardi di tempo**
- La pulsazione ω_c è detta **pulsazione critica** oppure anche **pulsazione di cross-over** (o di **taglio**), perché è la pulsazione alla quale il diagramma di Bode del modulo di $G_a(j\omega)$ attraversa l'asse a 0 dB (essendo $|G_a(j\omega_c)| = 1$)

Lettura di m_φ sui DdB

- Tale osservazione permette di leggere agevolmente il margine di fase sui diagrammi di Bode di $G_a(j\omega)$





Margini di stabilità

Stabilità regolare e marginale ed estensioni delle definizioni dei margini



Stabilità dalla valutazione dei margini (1/2)

- ▶ I **marginì di stabilità** (di guadagno e di fase) sono stati definiti sotto l'ipotesi che la funzione d'anello godesse di particolari proprietà
- ▶ In tali casi la condizione di asintotica stabilità in catena chiusa equivale alla condizione di **positività dei marginì letti sui diagrammi di Bode**

Per questi sistemi è possibile determinare l'asintotica stabilità in catena chiusa direttamente dalla lettura dei marginì di guadagno e di fase sui diagrammi di Bode



Stabilità dalla valutazione dei margini (2/2)

► È possibile affermare in particolare che se la funzione di anello $G_a(s)$ soddisfa le seguenti proprietà:

- Ha guadagno positivo
- È a minima rotazione di fase
- Esiste una sola pulsazione per cui il modulo risulta unitario
- Esiste una sola pulsazione di valore finito per cui la sua fase vale -180°

Non ha singolarità a parte reale positiva

allora il sistema è asintoticamente stabile in catena chiusa se e solo se i **margini di guadagno e di fase sui DdB** sono **positivi**



Sistemi a stabilità regolare

- In particolare, un sistema che risulti **asintoticamente stabile** in catena chiusa **per qualunque valore positivo del guadagno non superiore alla soglia massima determinata da m_G** è detto **a stabilità regolare**



Estensioni delle definizioni dei margini (1/2)

- Se non tutte le condizioni prima elencate sono soddisfatte, è necessario
 - Applicare il criterio di Nyquist per studiare correttamente la stabilità in catena chiusa
 - “Estendere” i concetti di margini di guadagno e di fase in modo opportuno



Estensioni delle definizioni dei margini (2/2)

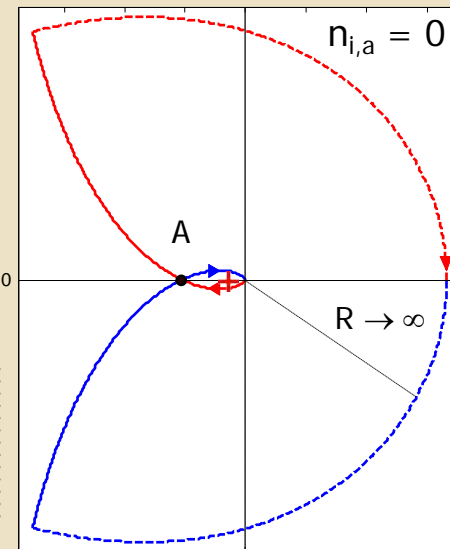
- I principali casi di interesse riguardano:
 - L'esistenza di più pulsazioni per cui la fase di $G_a(s)$ vale -180° (\Rightarrow il diagramma polare di $G_a(s)$ attraversa più volte l'asse reale)
 - L'esistenza di più pulsazioni per cui il modulo di $G_a(s)$ risulta unitario (\Rightarrow il diagramma polare di $G_a(s)$ interseca più volte la circonferenza unitaria)
 - $G_a(s)$ è instabile (o, più in generale, non è a minima rotazione di fase)

Attraversamenti multipli dell'asse reale (1/2)

- Nella definizione del margine di guadagno era stato ipotizzato che il diagramma polare di $G_a(s)$ fosse tale da **attraversare una sola volta il semiasse reale negativo** in un punto A posto alla destra del punto critico

Ipotesi necessaria per l'asintotica stabilità in catena chiusa per $G_a(s)$ a guadagno positivo con $n_{i,a} = 0$

Se A fosse a sinistra, il diagramma polare scavalcherebbe il punto critico
 $\Rightarrow N > 0 \Rightarrow n_{i,c} > 0$





Attraversamenti multipli dell'asse reale (2/2)

- Che cosa succede se **il diagramma polare di $G_a(s)$ è tale da attraversare più volte il semiasse reale negativo?**
 - Il sistema non è a stabilità regolare: è necessario applicare il criterio di Nyquist
 - Possono presentarsi casi diversi, a seconda dei valori di $n_{i,a}$ e di N prima e dopo gli attraversamenti
 - Di particolare interesse sono i **sistemi a stabilità marginale (o condizionata)**, per i quali si può avere **instabilità sia per valori troppo elevati del guadagno sia per valori troppo piccoli**

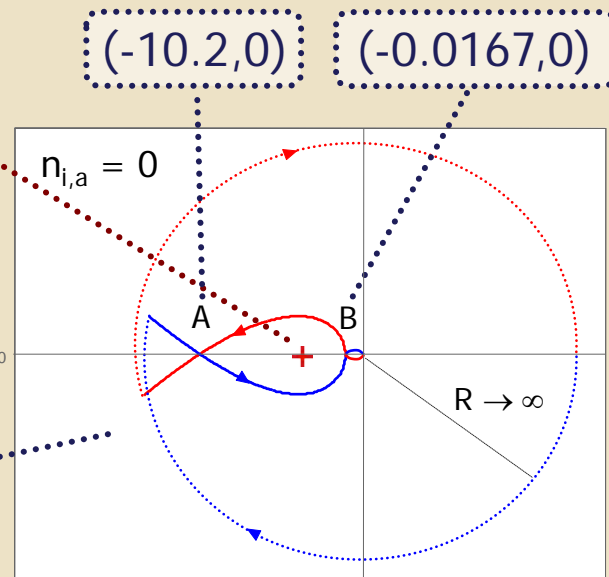
Un sistema a stabilità marginale (1/3)

► Sia

$$G_a(s) = 10^6 K_c \frac{(s + 2)(s + 20)}{s^2(s + 1)(s + 200)(s + 500)}$$

Per $K_c = 1$ il sistema in catena chiusa è asintoticamente stabile: $N = 0 \Rightarrow n_{i,c} = 0$

Diagramma per $K_c = 1$



Un sistema a stabilità marginale (1/3)

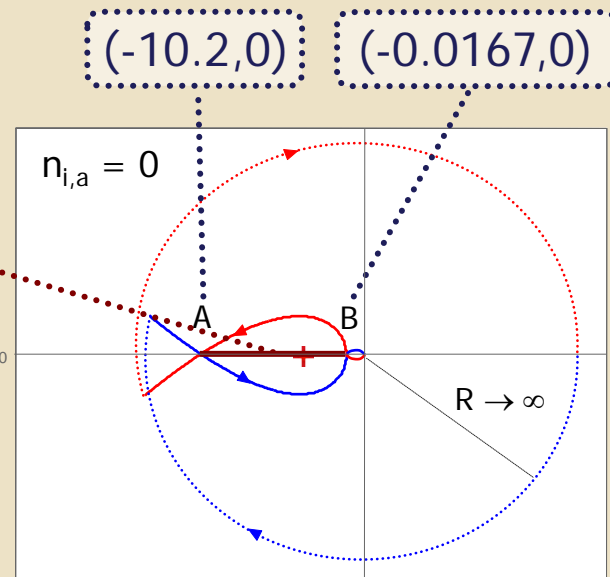
► Sia

$$G_a(s) = 10^6 K_c \frac{(s + 2)(s + 20)}{s^2(s + 1)(s + 200)(s + 500)}$$

Il sistema in catena chiusa rimane asintoticamente stabile per tutti i valori di K_c per cui $(-1/K_c, 0)$ risulta compreso fra A e B, cioè per $0.098 < K_c < 59.9$

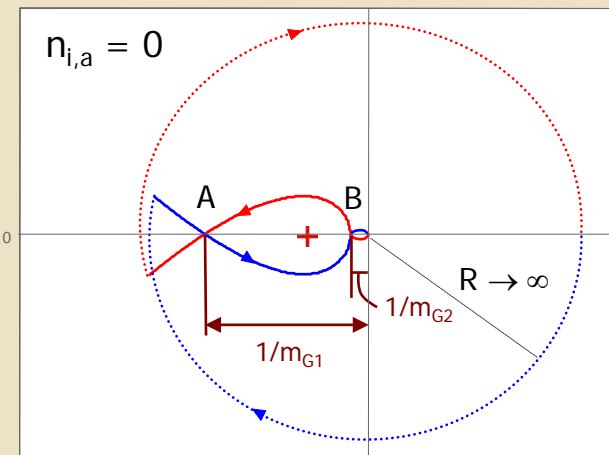
m_{G1} "inferiore"
(margine di attenuazione)

m_{G2} "superiore"
(margine di amplificazione)



Un sistema a stabilità marginale (2/3)

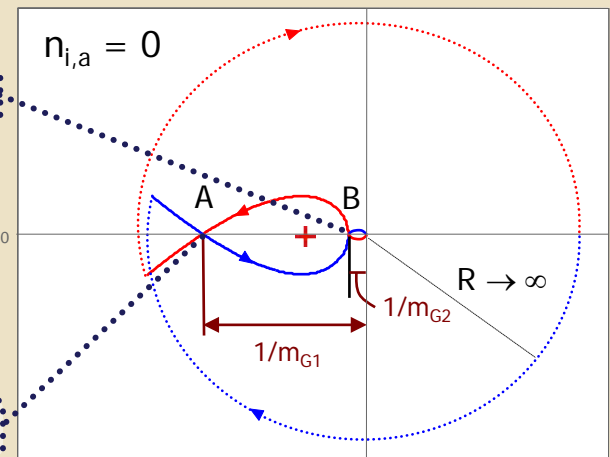
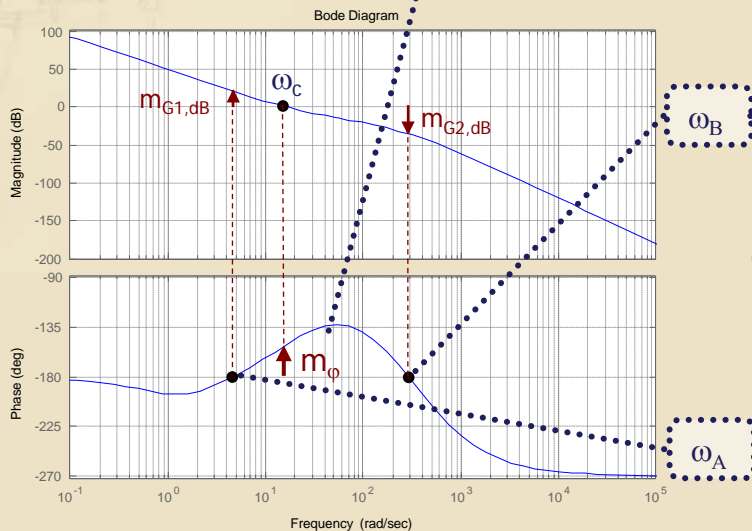
- L'esistenza di m_{G1} (non nullo) indica la necessità di garantire un guadagno minimo della fdt d'anello
- m_{G2} è coerente con la precedente definizione di margine di guadagno



Un sistema a stabilità marginale (3/3)

- I due margini di guadagno possono essere ritrovati facilmente sui diagrammi di Bode della funzione d'anello:

N.B.: Non ci sono ambiguità nella lettura di m_φ , che è **positivo** a conferma della stabilità del sistema in catena chiusa





Molteplici punti a modulo unitario (1/6)

- Nella definizione del margine di fase era stato ipotizzato che il diagramma polare di $G_a(j\omega)$ fosse tale da **intersecare una sola volta la circonferenza di raggio unitario**
- L'ipotesi non è soddisfatta se esistono più valori di ω per cui il modulo di $G_a(j\omega)$ è unitario
- Le principali conseguenze riguardano:
 - La necessità di individuare l'effettiva ω_c a cui leggere m_φ
 - La possibilità di avere due margini di fase, corrispondenti alla perdita di stabilità sia per una perdita sia per un aumento della fase



Molteplici punti a modulo unitario (2/6)

- Per un sistema il cui diagramma polare interseca più volte la circonferenza unitaria in punti **a fase maggiore di -180° , il margine di fase** (secondo la definizione precedentemente data di **massima perdita di fase** tollerabile senza andare in instabilità) deve essere letto **in corrispondenza del punto di intersezione più vicino all'asse reale**
- La pulsazione corrispondente a tale punto è l'effettiva pulsazione di cross-over

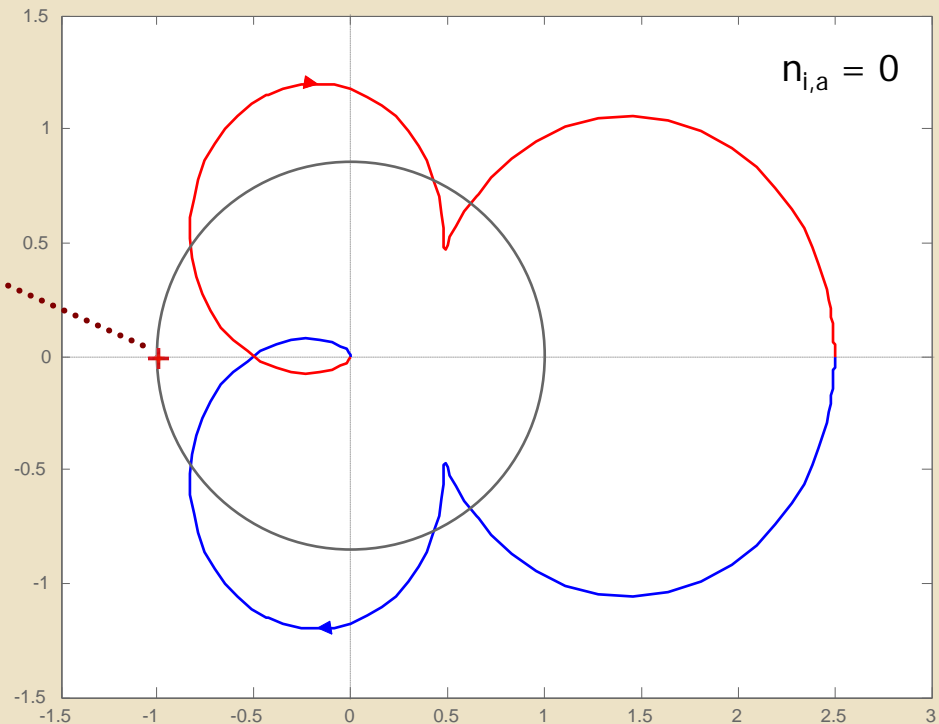
Molteplici punti a modulo unitario (3/6)

► Esempio:

$$G_a(s) = \frac{10000(s + 5)}{(s + 1)(s^2 + 8s + 400)(s + 50)}$$

Il sistema in
catena chiusa è
asintoticamente
stabile:

$$N = 0 \Rightarrow n_{i,c} = 0$$



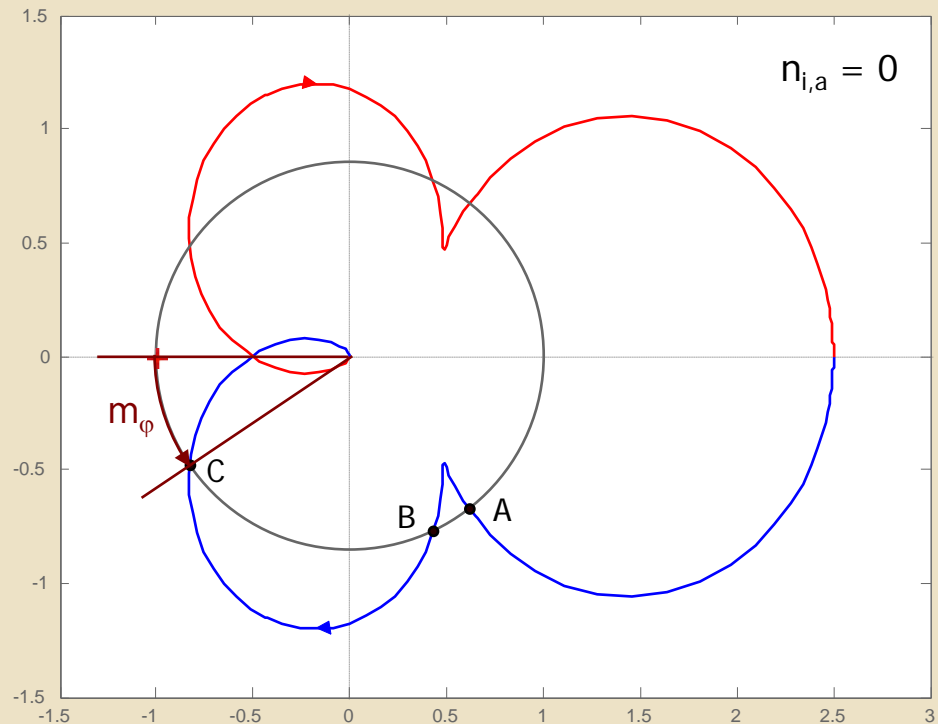
Molteplici punti a modulo unitario (3/6)

► Esempio:

$$G_a(s) = \frac{10000(s + 5)}{(s + 1)(s^2 + 8s + 400)(s + 50)}$$

Tre punti di intersezione con la circonferenza unitaria (A, B, C) a fase $> -180^\circ$

Il corretto margine di fase è leggibile in C:
 $m_\varphi = 33.7^\circ$

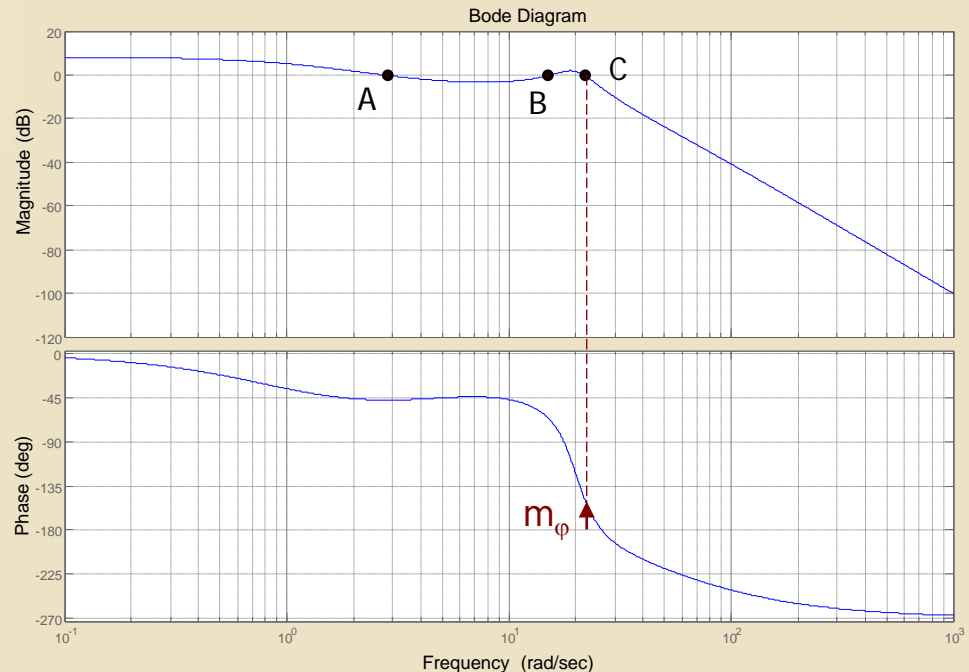


Molteplici punti a modulo unitario (4/6)

► Esempio:

$$G_a(s) = \frac{10000(s + 5)}{(s + 1)(s^2 + 8s + 400)(s + 50)}$$

Sui DdB A, B, C sono i punti di attraversamento dell'asse a 0 dB



Si può leggere anche sui DdB il margine di fase in C: $m_\phi = 33.7^\circ$



Molteplici punti a modulo unitario (5/6)

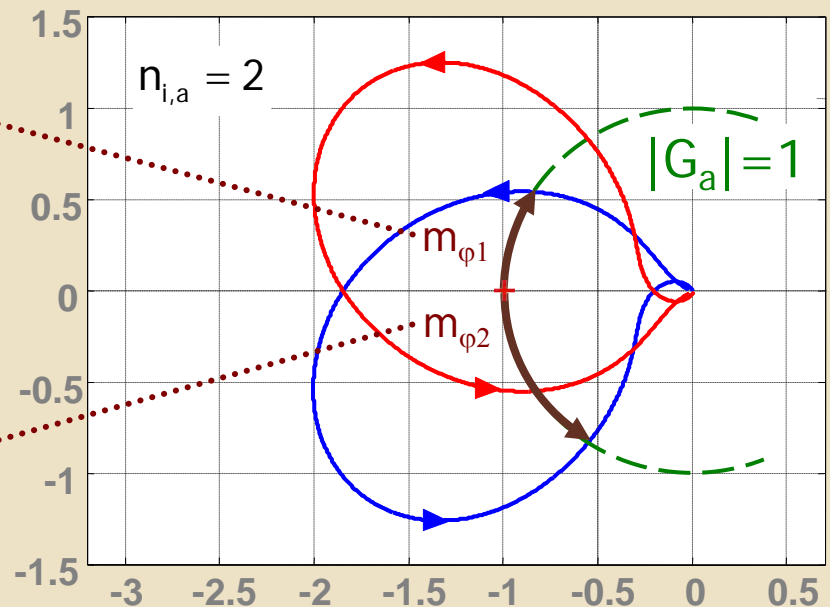
- Per un sistema il cui diagramma polare interseca più volte la circonferenza unitaria in punti **non tutti a fase maggiore di -180°** , si potrebbe avere **instabilità** in catena chiusa **sia per una perdita** (come nella definizione base di m_φ) **sia per un eccessivo aumento di fase**
- In tale caso si possono definire **due margini di fase**, uno di perdita massima ed uno di aumento massimo di fase, ad indicare le massime variazioni di fase tollerabili mantenendo l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa

Molteplici punti a modulo unitario (6/6)

- Un esempio di sistema con due margini di fase è dato da un **pendolo montato su di un carrello**, con opportuno controllore

Massimo
aumento di fase

Massima
perdita di fase





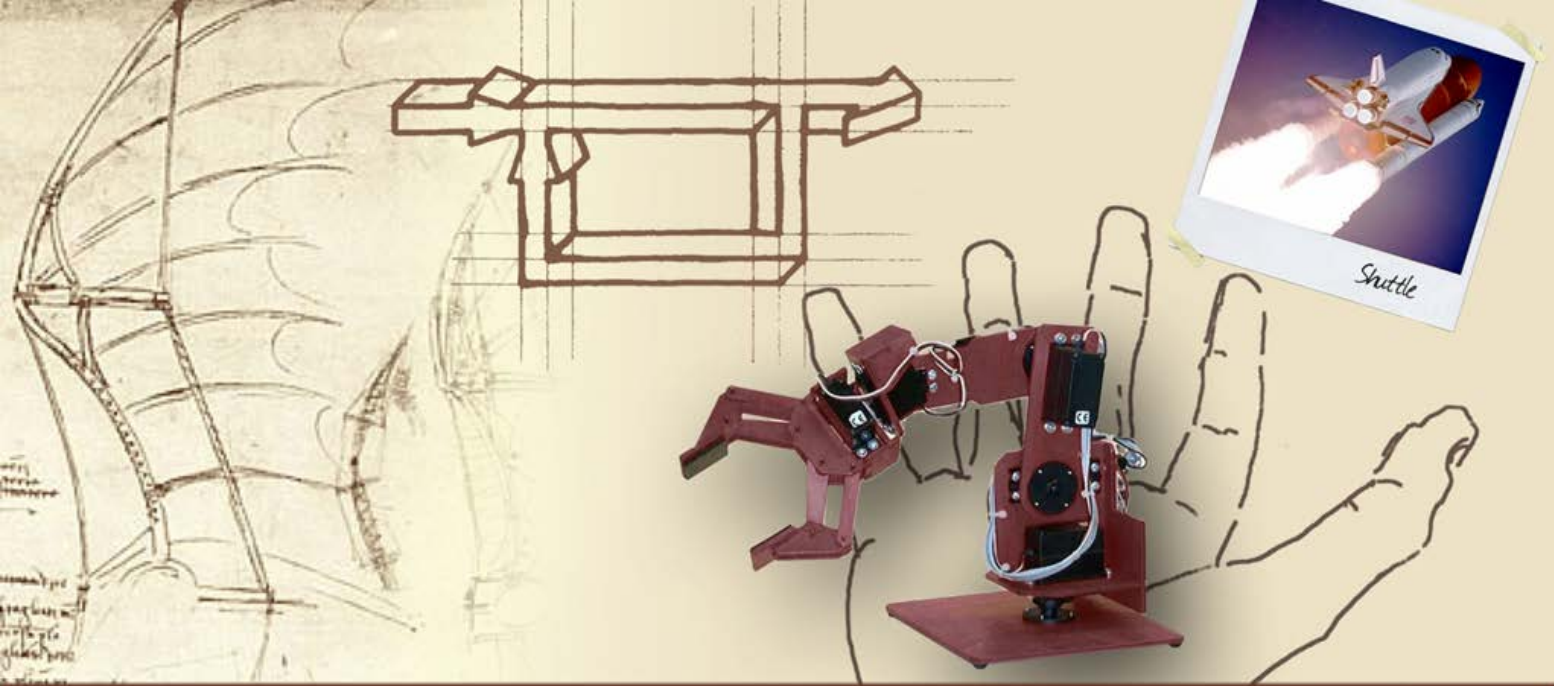
$G_a(s)$ a non minima rotazione di fase

- ▶ Se $G_a(s)$ ha **almeno una singolarità a parte reale positiva (sistema a non minima rotazione di fase)**, possono presentarsi diverse situazioni, fra cui:
 - Sistemi a stabilità marginale (ad es. il pendolo inverso stesso)
 - Sistemi **stabili solo per valori elevati del guadagno** ($K_c > K_{c, \min}$) **o per valori negativi**
 - Sistemi con uno o due margini di fase (il pendolo)
- ▶ Per questi sistemi **è indispensabile applicare il criterio di Nyquist** per analizzarne la stabilità e definire opportunamente i margini



Lettura dei margini di stabilità su Matlab

- Il comando **margin** (per la sintassi consultare il relativo help o il manuale breve fornito a parte) applicato alla fdt d'anello fornisce il risultato della **lettura dei margini di guadagno e di fase sui diagrammi di Bode**
- **Attenzione:** l'informazione è sicuramente corretta solo per i sistemi per i quali è possibile dedurre la stabilità in catena chiusa dalla sola lettura dei margini sui DdB, senza la necessità di svolgere un'analisi completa della stabilità con il criterio di Nyquist



Margini di stabilità

M_r come margine di stabilità: i luoghi a modulo (e a fase) costante



Legami fra M_r e stabilità (1/4)

- È possibile ricavare **indicatori di robustezza della stabilità "indiretti"** a partire da caratteristiche della fdt in catena chiusa, in particolare dalla presenza di un picco di risonanza M_r di ampiezza "significativa"

$$M_r = W_r / |W(0)|$$

ove $W_r = \max \{|W(j\omega)|\} \rightarrow$ valore del modulo della fdt in catena chiusa alla (pulsazione di) risonanza



Legami fra M_r e stabilità (2/4)

- Se $W(j\omega)$ presenta una risonanza “evidente” in banda ($W_r > |W(0)|$) è lecito pensare alla presenza di almeno due poli complessi coniugati (dominanti) a smorzamento “piccolo”

Per una coppia di poli complessi coniugati si ha:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{per} \quad 0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$$

Valori tipici: $1 \text{ dB} < M_r < 5 \text{ dB} \leftrightarrow 0.5 > \zeta > 0.3$



Legami fra M_r e stabilità (3/4)

- Se $W(j\omega)$ presenta una risonanza “evidente” in banda ($W_r > |W(0)|$) è lecito pensare alla presenza di almeno due poli complessi coniugati (dominanti) a smorzamento “piccolo”
- Più piccolo è tale smorzamento più la coppia di poli è vicina all’asse immaginario, cioè al semipiano di destra

Quanto più è significativa l’entità del picco di risonanza tanto più il sistema è “vicino” alla condizione di instabilità



Legami fra M_r e stabilità (4/4)

- Al contrario, una “buona lontananza” dalla condizione di instabilità (**robustezza della stabilità**) si ha per una fdt in catena chiusa con poli complessi dominanti a smorzamento “non piccolo”, ovvero con M_r “piccolo”

M_r può essere visto come un “indiretto” margine di stabilità: per una buona stabilità robusta M_r deve essere “piccolo” (qualche dB)



Legame fra M_r e funzione d'anello

► Facendo riferimento alla consueta struttura di controllo, in cui $W_y = y/y_{\text{des}} = G_a/(1+G_a)$ e $W = y/r = K_r W_y$, si noti che:

- $W_r/|W(0)|$ coincide con $W_{y,r}/|W_y(0)|$,
ove $W_{y,r} = \max \{|W_y(j\omega)|\}$
- Se G_a presenta almeno un polo nell'origine:
 $W_y(0) = 1 \Rightarrow M_r = W_{y,r}$
- Se G_a non ha poli nell'origine:
 $W_y(0) \approx 1 \Rightarrow M_r \approx W_{y,r}$

M_r è (esattamente o con buona approssimazione)
il massimo di $|W_y|$ ovvero di $|G_a/(1+G_a)|$



I luoghi a modulo costante (1/3)

- La funzione

$$M(j\omega) = |W_y(j\omega)| = \left| \frac{G_a(j\omega)}{1 + G_a(j\omega)} \right|$$

esprime la variazione del modulo di $W_y(j\omega)$ al variare di ω

- Per $G_a(j\omega) \doteq \mathfrak{R} + j\mathfrak{I}$ (omettendo ω per semplicità), si ha

$$M = \left| \frac{\mathfrak{R} + j\mathfrak{I}}{1 + \mathfrak{R} + j\mathfrak{I}} \right| \Rightarrow M^2 = \left| \frac{\mathfrak{R} + j\mathfrak{I}}{1 + \mathfrak{R} + j\mathfrak{I}} \right|^2$$



I luoghi a modulo costante (2/3)

- Con alcuni passaggi si ottiene

$$(\Re - \Re_0)^2 + \Im^2 = \rho^2$$

con

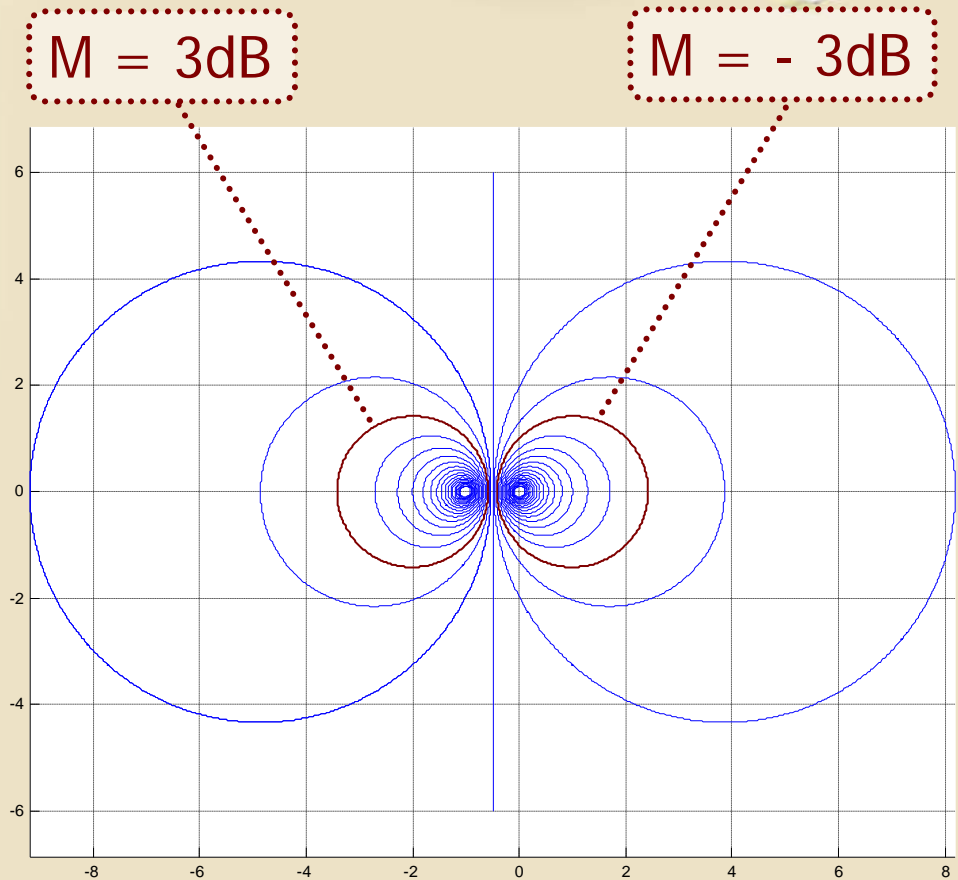
$$\Re_0 = \frac{M^2}{1 - M^2}, \quad \rho = \frac{M}{|1 - M^2|}$$

Circonferenza sul piano complesso
di raggio ρ e centro in $(\Re_0, 0)$

- Le circonferenze tracciate sul piano complesso per diversi valori di M rappresentano i **luoghi a modulo costante della fdt in catena chiusa**

I luoghi a modulo costante (3/3)

- $M=0$:
origine
- $M=1$: retta
verticale in
 -0.5
- $M \rightarrow \infty$:
punto critico
 $(-1,0)$





Robustezza della stabilità da M_r (1/2)

- Si ha **robustezza della stabilità** in catena chiusa se M_r è piccolo:

$$M_r \leq M_{r,\text{lim}}$$

- Affinché tale relazione sia soddisfatta, il diagramma di Nyquist di $G_a(j\omega)$ deve essere **esterno alla circonferenza corrispondente a $M_{r,\text{lim}}$** per tutti i valori di ω

Robustezza della stabilità da M_r (2/2)

► Esempio: $G_{a1}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$, $G_{a2}(s) = 1.5 G_{a1}(s)$

$$M_{r1} = 1.99 \text{ dB}$$

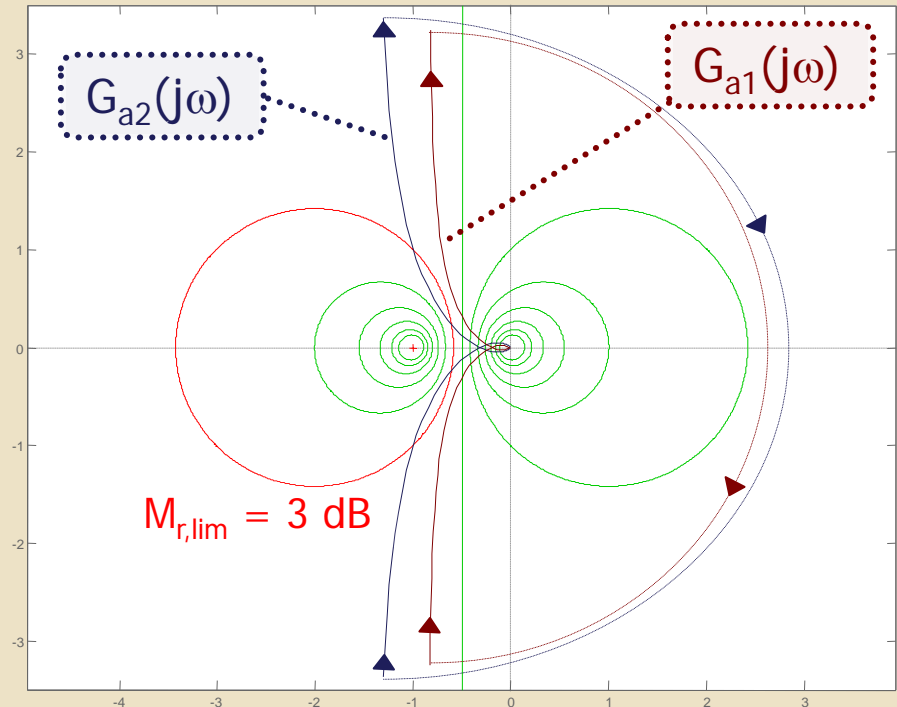
$$m_{G1} = 13.6 \text{ dB}$$

$$m_{\phi1} = 47^\circ$$

$$M_{r2} = 4.74 \text{ dB}$$

$$m_{G2} = 10.1 \text{ dB}$$

$$m_{\phi2} = 34.6^\circ$$



Determinazione di $|W_y(j\omega)|$ (1/2)

- Sovrapponendo al diagramma polare di $G_a(j\omega)$ i luoghi a M costante, è possibile ricavare il valore del modulo di $W_y(j\omega)$ per ogni ω

$$M = 4 \text{ dB}$$

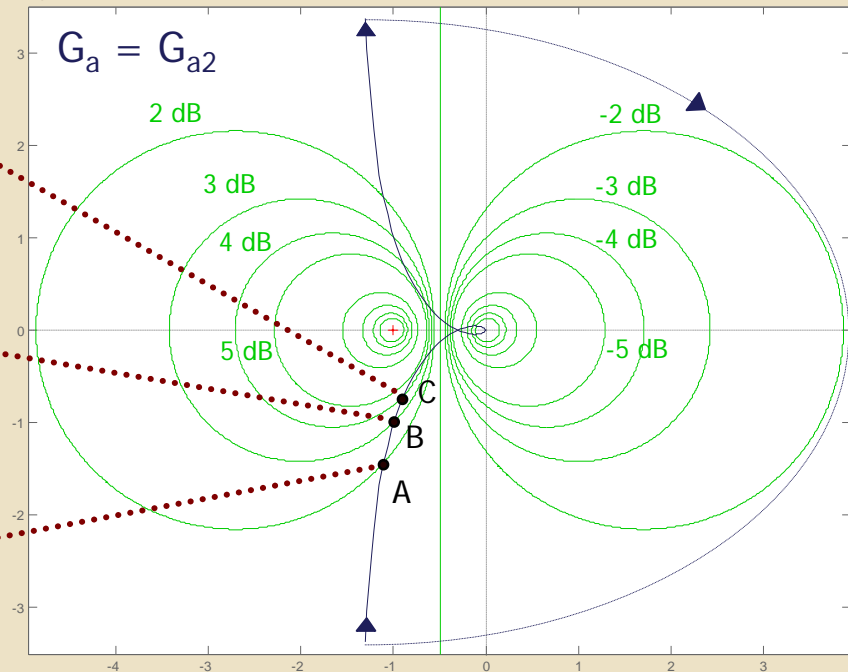
$$\omega = 1.31 \text{ rad/s}$$

$$M = 3 \text{ dB}$$

$$\omega = 1.12 \text{ rad/s}$$

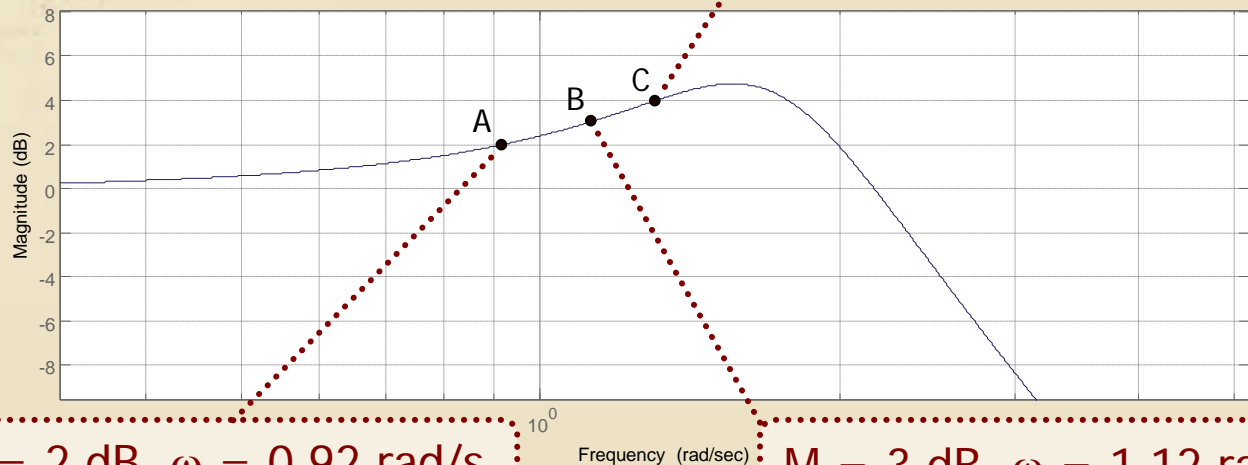
$$M = 2 \text{ dB}$$

$$\omega = 0.92 \text{ rad/s}$$



Determinazione di $|W_y(j\omega)|$ (2/2)

- Il DdB del modulo della fdt in catena chiusa può essere costruito a partire dai valori di $|W(j\omega)|$ letti dalle intersezioni di $G_a(j\omega)$ con i cerchi M



$M = 2 \text{ dB}, \omega = 0.92 \text{ rad/s}$

$M = 3 \text{ dB}, \omega = 1.12 \text{ rad/s}$

$M = 4 \text{ dB}, \omega = 1.31 \text{ rad/s}$



I luoghi a fase costante

- Con procedimento analogo, è possibile determinare sul piano complesso i **luoghi a fase costante** della fdt in catena chiusa
- Posto $N = \tan \arg (W_y(j\omega))$, si dimostra che tali luoghi sono dati dalle **circonferenze** aventi:

- Centro in $(-1/2, 1/(2N))$, Raggio = $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{N^2 + 1}{N^2}}$

Non si ritiene opportuno trattare i cerchi N con maggiori dettagli, in quanto di limitato interesse per gli obiettivi del corso