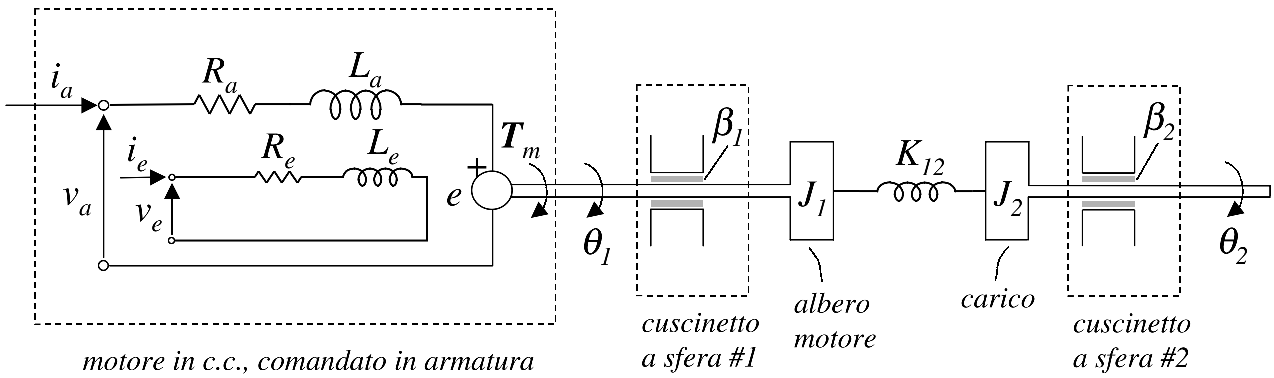
01AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Tipologia degli esercizi proposti nel compito del 13/II/2002

In questo documento si riporta la tipologia degli esercizi proposti con la relativa soluzione. Per consentire agli studenti una migliore comprensione degli errori commessi, nella tabella seguente sono indicate le posizioni dei vari esercizi nei diversi compiti, nonché il livello di difficoltà dei singoli esercizi.

Esercizio	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13
Compito #1 (pag. 11)	12	8	13	7	10	5	9	6	1	3	11	4	2
Compito #2 (pag. 21)	4	9	13	8	5	1	11	12	2	10	3	6	7
Compito #3 (pag. 31)	6	13	9	7	5	11	8	4	10	3	1	12	2
Compito #4 (pag. 41)	10	7	13	9	8	6	1	2	5	11	3	12	4
Compito #5 (pag. 51)	5	4	8	7	9	10	1	11	12	13	3	6	2
Compito #6 (pag. 61)	3	7	4	11	2	9	8	5	10	1	6	13	12
Compito #7 (pag. 71)	9	2	5	13	1	3	11	8	4	10	7	6	12
Compito #8 (pag. 81)	11	8	4	10	6	3	13	5	2	9	1	12	7
Livello di difficoltà	alto	basso	basso	medio	basso	medio	basso	medio	medio	basso	medio	medio	alto

Esercizio 1 - Nel sistema dinamico elettromeccanico riportato in figura, un motore elettrico in corrente continua comandato in armatura è collegato ad un carico mediante una molla torsionale avente elasticità K_{12}. Un cuscinetto a sfera con coefficiente di attrito viscoso β_1 è calettato sull'albero motore, caratterizzato dal momento d'inerzia J_1 e dalla posizione angolare θ_1. Un cuscinetto a sfera con coefficiente di attrito viscoso β_2 è calettato sul carico, caratterizzato dal momento d'inerzia J_2 e dalla posizione angolare θ_2. Con v_a, i_a, R_a, L_a, v_e, i_e, R_e, L_e si indichino la tensione, la corrente, la resistenza e l'induttanza rispettivamente del circuito di armatura e di eccitazione. La f.e.m. indotta vale $e = K_e^* \cdot \dot{\theta}_1$, mentre la coppia motrice vale $T_m = K_m^* \cdot i_a$.



Scrivere le sole equazioni **dinamiche** del sistema complessivo.

Soluzione: $L_a \dfrac{di_a}{dt} = -R_a\, i_a + v_a - K_e^*\, \dot{\theta}_1$, $\quad J_1\, \ddot{\theta}_1 + \beta_1\, \dot{\theta}_1 + K_{12}\, \theta_1 = K_m^*\, i_a + K_{12}\, \theta_2$, $\quad J_2\, \ddot{\theta}_2 + \beta_2\, \dot{\theta}_2 + K_{12}\, \theta_2 = +K_{12}\, \theta_1$

Esercizio 2 - Dato il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + 2u_1(k) \\ x_2(k+1) &= k \cdot x_1(k) + u_2(k) \\ y(k) &= x_1(k) + 3u_1(k) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è statico o dinamico, a dimensione finita o infinita, SISO o MIMO, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante.

Soluzione: Il sistema è: dinamico, a dimensione finita (pari a 2), MIMO, lineare, tempo-variante.

Esercizio 3 - Calcolare la funzione di trasferimento $G(z) = Y(z)/U(z)$ del sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= u(k) \\ x_2(k+1) &= 0.9x_1(k) \\ x_3(k+1) &= 0.8x_2(k) \\ y(k) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \end{aligned}$$

Soluzione: $G(z) = \dfrac{z^2 + 0.9z + 0.72}{z^3}$

Esercizio 4 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

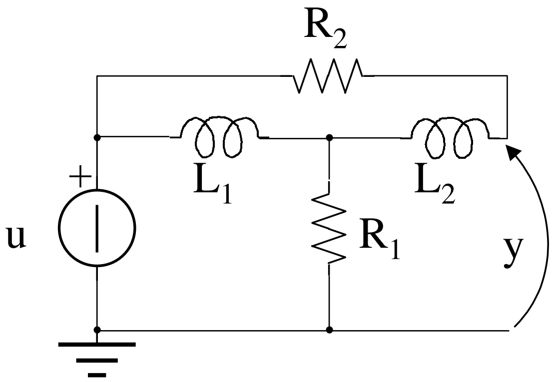
di un modello LTI in variabili di stato a tempo discreto, determinare, se possibile, i guadagni K di retroazione dagli stati che permettono di posizionare gli autovalori del sistema retroazionato in:

$$\lambda_1 = -0.1 \quad \lambda_2 = -0.2 \quad \lambda_3 = -0.3$$

Soluzione: Non è possibile, in quanto il sistema non è controllabile.

Esercizio 5 - Dato il sistema schematizzato in figura e definita la fdt $G(s) = Y(s)/U(s)$, dire qual è la coppia K_∞, K_{staz} esatta.

$$G(s) = K_\infty \frac{s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = K_{staz} \frac{1 + \beta_1 s + \beta_2 s^2}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2}$$



Soluzione: $K_\infty = 1$, $K_{staz} = 1$.

Esercizio 6 - Dato il sistema dinamico non lineare a tempo continuo descritto da:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.25x_1^2(t) - x_2^2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 4x_1(t) - 16x_1(t)x_2(t) \\ y(t) &= 2x_2(t) \end{aligned}$$

determinare il sistema linearizzato nell'intorno del punto di funzionamento $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\overline{u} = 0.5$.

Soluzione: Le matrici del sistema linearizzato sono: $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D = [0]$.

Esercizio 7 - Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto da:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) &= C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{aligned}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

studiarne le caratteristiche di stabilità interna.
Soluzione: Il sistema è instabile.

Esercizio 8 - Sapendo che la rappresentazione in variabili di stato di un modello LTI a tempo continuo, completamente controllabile ed osservabile, è caratterizzata dalle seguenti matrici: A=[5x5], B=[5x1], C=[1x5], D=[1x1]$\neq$0, indicare la forma della corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$.

Soluzione: $G(s) = \dfrac{K\, s^5 + \cdots}{s^5 + \cdots}$

Esercizio 9 - Dato il denominatore $D(z)$ di una fdt in z, determinare l'intervallo I_1 dei valori del parametro K che assicurano asintotica stabilità. Calcolare inoltre l'intervallo I_2 dei valori di K per cui i poli risultano asintoticamente stabili <u>e</u> a parte reale strettamente positiva (reali > 0 o complessi coniugati con parte reale > 0).

$$D(z) = z^2 - 1.2(1-K)z + 0.2$$

Soluzione: $I_1 = \{0 < K < 2\}$, $I_2 = \{0 < K < 1\}$.

Esercizio 10 - Sia dato un sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d^3 z(t)}{dt^3} + \ddot{z}(t) + 16\dot{z}(t) = y(t) \\ y(t) = u(t) - Kz(t) \end{cases}$$

dove $u(t)$ è l'ingresso, $y(t)$ è l'uscita e $z(t)$ è una variabile interna. Dato un ingresso a rampa (non unitaria) $u(t) = 5t$ e definito y_∞ come $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, dire quale coppia K, y_∞ è quella esatta.
Soluzione: $K = 10$, $y_\infty = 8$.

Esercizio 11 - Sia dato un sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 14\dot{y}(t) + 49y(t) = \ddot{z}(t) + 49z(t) \\ z(t) = K\left(u(t) - y(t)\right) \end{cases}$$

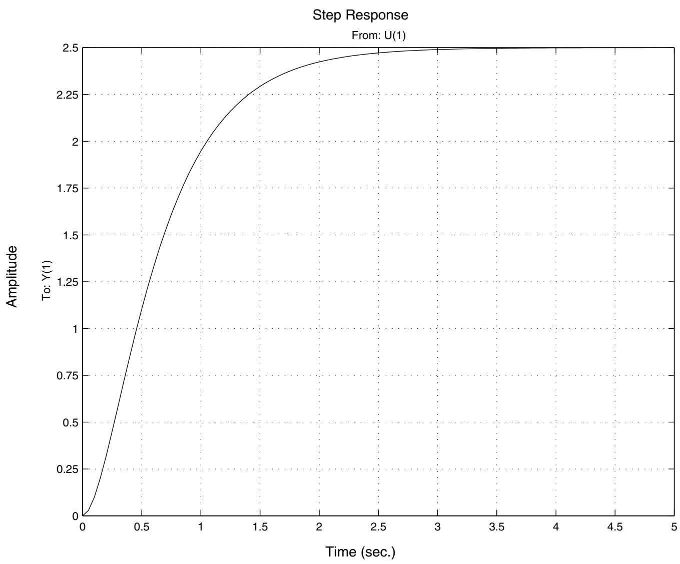
dove $u(t)$ è l'ingresso, $y(t)$ è l'uscita e $z(t)$ è una variabile interna. Dato un ingresso sinusoidale $u(t) = \sin(7t)$ e detta A l'ampiezza dell'uscita per $t \to \infty$, dire quale coppia A, K è quella corretta.
Soluzione: $A = 0$ per $K = 7$.

Esercizio 12 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{s^2 + 7s + 10}$$

dire qual è il grafico in cui è riportato l'andamento della risposta $y\,(t)$ ad un gradino unitario, a partire da condizioni iniziali nulle (si presti attenzione alle scale di entrambi gli assi).

Soluzione:



Esercizio 13 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.008 \\ 1 & 0 & -0.12 \\ 0 & 1 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato a tempo discreto, determinare, se possibile, i coefficienti L del ricostruttore asintotico che permettono di posizionare gli autovalori del sistema osservato in $\lambda_1 = 0.05$, $\lambda_2 = 0.1$ e $\lambda_3 = 0.2$.
Soluzione: $L' = \begin{bmatrix} 0.007 & -0.085 & 0.25 \end{bmatrix}$.