# RAGGIUNGIBILITÀ E FORMA CANONICA DI KALMAN DI RAGGIUNGIBILITÀ

- Si consideri un sistema dinamico lineare tempo invariante TC oppure TD:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\dim(x) = n, \dim(u) = \dim(y) = 1$$

- Matrice di raggiungibilità:

$$K_r = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \text{ MATLAB } \texttt{ctrb}$$

$$r = \rho(K_r), \text{ MATLAB } \texttt{rank}$$

Se $r < n$ il sistema non è completamente raggiungibile. In questo caso è possibile determinare una trasformazione di similarità, descritta da un’opportuna matrice $T$ invertibile tale da decomporre lo stato $x$ nelle sue parti non raggiungibile $z_{nr}$ e raggiungibile $z_r$:

$$z = \begin{bmatrix} z_{nr} \\ z_r \end{bmatrix} = T \cdot x, \quad \dim(z_{nr}) = n - r, \quad \dim(z_r) = r$$

- Applicando la trasformazione di similarità T al sistema dinamico considerato si ottiene la ***Forma canonica di Kalman di raggiungibilità***:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \overline{A}z(t) + \overline{B}u(t) \\ \\ y(t) = \overline{C}z(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} z(k+1) = \overline{A}z(k) + \overline{B}u(k) \\ \\ y(k) = \overline{C}z(k) + Du(k) \end{cases} \qquad \dim(z) = n$$

dove:

$$\overline{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} \quad \overline{B} = T \cdot B \quad \overline{C} = C \cdot T^{-1}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{nr} & 0_{(n-r)\times r} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{r} \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} 0_{(n-r)\times 1} \\ \overline{B}_{r} \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{nr} & \overline{C}_{r} \end{bmatrix}$$

$$\dim\left(\overline{A}_{nr}\right) = (n-r)\times(n-r) \quad \dim\left(\overline{A}_{r}\right) = r\times r \quad \dim\left(\overline{A}_{21}\right) = r\times(n-r)$$

$$\dim\left(\overline{B}_{r}\right) = r\times 1 \quad \dim\left(\overline{C}_{nr}\right) = 1\times(n-r) \quad \dim\left(\overline{C}_{r}\right) = 1\times r$$

- La funzione MATLAB `ctrbf` permette di calcolare le matrici $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ e la matrice di trasformazione $T$.

# RETROAZIONE DEGLI STATI MEDIANTE POSIZIONAMENTO DEI POLI

- ***SE*** il sistema considerato è ***completamente raggiungibile E il vettore di stato risulta accessibile*** è possibile posizionare ad arbitrio tutti i suoi autovalori attraverso una legge di controllo per retroazione degli stati del tipo:

$$u(\cdot) = -K\,x(\cdot) + v(\cdot), \quad \dim(K) = 1 \times n$$

in modo che la matrice $A - BK$ abbia gli autovalori desiderati.

- Il calcolo di $K$ si esegue con i comandi MATLAB

$$\begin{cases} \text{place (autovalori con molteplicità semplice)} \\ \\ \text{acker (autovalori con molteplicità multipla)} \end{cases}$$

- È sempre consigliabile verificare, dopo avere calcolato *K*, che gli autovalori di $A - BK$ siano quelli desiderati. A tal fine si può utilizzare il comando MATLAB:

```
eig(A-B*K)
```

# POSIZIONAMENTO DEI POLI CON LA FORMA CANONICA DI KALMAN DI RAGGIUNGIBILITÀ

- Quando il sistema considerato non è completamente raggiungibile, posso posizionare, attraverso retroazione degli stati del tipo $u = -Kx + v$, soltanto gli $r$ autovalori della parte raggiungibile di $A$. Questo può essere fatto considerando la sola parte raggiungibile $\left(\overline{A}_r, \overline{B}_r\right)$ del sistema ottenuta attraverso il calcolo della forma canonica di Kalman di raggiungibilità.
- In questo caso posso procedere come segue:
  1. Considero gli $r$ poli che posso posizionare.
  2. Calcolo la matrice $\overline{K}$ tale che gli autovalori di $\overline{A}_r - \overline{B}_r\overline{K}$ coincidano con gli $r$ da posizionare (MATLAB `place`, `acker`).
  3. Poiché mi interessa la matrice $K$ da applicare allo stato $x$ del sistema completo e non la matrice $\overline{K}$ applicata alla sola parte raggiungibile $z_r$ dello stato, devo opportunamente applicare la trasformazione di similarità $T$ a $\overline{K}$.

$$K = \left[0_{1\times(n-r)} \quad \overline{K}\right]\cdot T$$

Si noti che, poiché la matrice $K$ deve avere dimensioni $1\times n$ mentre la matrice $\overline{K}$ ha dimensioni $1\times r$, si è aggiunta, per completamento, una riga di $n$-$r$ zeri.

## OSSERVABILITÀ E
## FORMA CANONICA DI KALMAN DI OSSERVABILITÀ

- Si consideri un sistema dinamico lineare tempo invariante TC oppure TD:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\dim(x) = n, \dim(u) = \dim(y) = 1$$

- Matrice di osservabilità:

$$K_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ MATLAB } \texttt{obsv}$$

$$o = \rho(K_o), \text{ MATLAB } \texttt{rank}$$

Se $o < n$ il sistema non è completamente osservabile. In questo caso è possibile determinare una trasformazione di similarità, descritta da un’opportuna matrice $T$ invertibile tale da decomporre lo stato $x$ nelle sue parti non osservabile $z_{no}$ e osservabile $z_o$:

$$z = \begin{bmatrix} z_{no} \\ z_o \end{bmatrix} = T \cdot x, \quad \dim(z_{no}) = n - o, \quad \dim(z_o) = o$$

- Applicando la trasformazione di similarità T al sistema dinamico considerato si ottiene la ***Forma canonica di Kalman di osservabilità***:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ \\ y(t) = \bar{C}z(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} z(k+1) = \bar{A}z(k) + \bar{B}u(k) \\ \\ y(k) = \bar{C}z(k) + Du(k) \end{cases} \qquad \dim(z) = n$$

dove:

$$\bar{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} \quad \bar{B} = T \cdot B \quad \bar{C} = C \cdot T^{-1}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{no} & \bar{A}_{12} \\ 0_{o\times(n-o)} & \bar{A}_o \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{no} \\ \bar{B}_o \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0_{1\times(n-o)} & \bar{C}_o \end{bmatrix}$$

$$\dim(\bar{A}_{no}) = (n-o)\times(n-o) \quad \dim(\bar{A}_o) = o\times o \quad \dim(\bar{A}_{12}) = (n-o)\times o$$

$$\dim(\bar{B}_{no}) = (n-o)\times 1 \quad \dim(\bar{B}_o) = o\times 1 \quad \dim(\bar{C}_o) = 1\times o$$

- La funzione MATLAB `obsvf` permette di calcolare le matrici $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ e la matrice di trasformazione $T$.

# STIMATORE ASINTOTICO DELLO STATO

***SE*** il sistema considerato è ***completamente osservabile***, è sempre possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in modo tale che la differenza $e(\cdot)$ tra la stima asintotica dello stesso $\hat{x}(\cdot)$ e lo stato $x(\cdot)$ gode della seguente proprietà:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} \left|e(t)\right| = \lim\limits_{t\to\infty} \left|\hat{x}(t) - x(t)\right| = 0 & \textit{sistemi TC} \\ \\ \lim\limits_{k\to\infty} \left|e(k)\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\hat{x}(k) - x(k)\right| = 0 & \textit{sistemi TD} \end{cases}$$

- La matrice $L$ ($\dim(L) = n \times 1$) dei guadagni dello stimatore asintotico dello stato viene progettata in modo che la matrice $A - LC$ abbia tutti i suoi autovalori ***asintoticamente stabili***. A tal fine si possono convenientemente utilizzare le istruzioni MATLAB `place` ed `acker` con la seguente sintassi:

  ```
  L=place(A',C',p_o)';
  L=acker(A',C',p_o)';
  ```

  essendo `p_o` il vettore contenente gli autovalori desiderati di $A - LC$.

  Si raccomanda di verificare il risultato tramite:

  ```
  eig(A-L*C)
  ```

# PROGETTO DELLLO STIMATORE ASINTOTICO DELLO STATO CON LA FORMA CANONICA DI KALMAN DI OSSERVABILITÀ

- In realtà lo stimatore asintotico dello stato può essere costruito anche se il sistema non è completamente osservabile, a patto che la parte non osservabile $\bar{A}_{no}$ risulti asintoticamente stabile. In questo caso si dice che il sistema è ***asintoticamente stimabile***.
- Quando il sistema considerato risulta ***asintoticamente stimabile***, posso progettare la matrice $L$ dei guadagni dello stimatore, imponendo l'asintotica stabilità degli $o$ autovalori della parte osservabile $\bar{A}_o$ di $A$. Questo può essere fatto considerando la sola parte osservabile $\left(\bar{A}_o, \bar{C}_o\right)$ del sistema ottenuta attraverso il calcolo della forma canonica di Kalman di osservabilità.
- In questo caso posso procedere come segue:
  1. Considero gli $o$ autovalori che posso imporre.
  2. Calcolo la matrice $\bar{L}$ tale che gli autovalori di $\bar{A}_o - \bar{L}\bar{C}_o$ coincidano con gli $o$ autovalori da imporre (MATLAB `place`, `acker`).
  3. Poiché mi interessa la matrice $L$ da applicare allo stato $x$ del sistema completo e non la matrice $\bar{L}$ applicata alla sola parte osservabile $z_o$ dello stato, devo opportunamente applicare la trasformazione di similarità $T$ a $\bar{L}$:

$$L = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{1\times(n-o)} & \bar{L}' \end{bmatrix} \cdot T \end{bmatrix}'$$

  Si noti che, poiché la matrice $L$ deve avere dimensioni $n\times1$ mentre la matrice $\bar{L}$ ha dimensioni $o\times1$, occorre aggiungere opportunamente $n$-$o$ zeri.

## COMPORTAMENTO DINAMICO DELLO STIMATORE ASINTOTICO

Introducendo il vettore di stato:

$$x_{tot} = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \ \dim(x_{tot}) = 2n$$

e considerando come uscita $y_{tot} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx + Du \\ C\hat{x} + Du \end{bmatrix}$ si possono scrivere le equazioni di ingresso – stato – uscita del sistema dinamico costituito dall'unione del sistema dato con lo stimatore asintotico:

$$\begin{cases} \dot{x}_{tot}(t) = A_{tot} x_{tot}(t) + B_{tot} u(t) \\ y_{tot}(t) = C_{tot} x_{tot}(t) + D_{tot} u(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k+1) = A_{tot} x_{tot}(k) + B_{tot} u(k) \\ y_{tot}(k) = C_{tot} x_{tot}(k) + D_{tot} u(k) \end{cases}$$

$$\dim(u) = 1, \ \dim(y_{tot}) = 2$$

dove:

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times n} \\ LC & A - LC \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} C & 0_{1\times n} \\ 0_{1\times n} & C \end{bmatrix} \quad D_{tot} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}$$

# POSIZIONAMENTO DEI POLI MEDIANTE RETROAZIONE DEGLI STATI STIMATI (REGOLATORE)

- ***SE il vettore di stato NON risulta accessibile*** ma ***si ha a disposizione la sola misura dell'uscita***, se è possibile progettare uno stimatore asintotico dello stato e se sono soddisfatte tutte le condizioni affinché i poli del sistema da controllare possano essere opportunamente posizionati, si può progettare una ***legge di controllo per retroazione degli stati stimati*** del tipo:

$$u(\cdot) = -K\,\hat{x}(\cdot) + v(\cdot), \quad \dim(K) = 1 \times n$$

dove $\hat{x}(\cdot)$ costituisce la stima del vettore di stato $x(\cdot)$ ottenuta tramite lo stimatore asintotico con matrice dei guadagni pari ad $L$, mentre la matrice $K$ viene calcolata in modo che la matrice $A-BK$ abbia gli autovalori desiderati. Il dispositivo di controllo che realizza tale legge viene complessivamente detto ***REGOLATORE***.

- Il calcolo di $K$ si esegue con le medesime procedure adottate per la retroazione degli stati mediante posizionamento dei poli.
- Il calcolo di $L$ si esegue con le medesime procedure adottate per il progetto dello stimatore asintotico dello stato.
- È sempre consigliabile verificare, dopo avere calcolato $K$ ed $L$, che gli autovalori di $A-BK$ e di $A-LC$ siano quelli desiderati (`eig(A-B*K)`, `eig(A-L*C)`).

# EQUAZIONI DI INGRESSO - STATO - USCITA DEL SISTEMA CONTROLLATO ATTRAVERSO RETROAZIONE DEGLI STATI STIMATI (REGOLATORE)

Introducendo il vettore di stato:

$$x_{tot} = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \ \dim(x_{tot}) = 2\,n$$

e considerando come uscita $y_{tot} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx+Dv \\ C\hat{x}+Dv \end{bmatrix}$ si possono scrivere le equazioni di ingresso – stato – uscita del sistema controllato mediante regolatore:

$$\begin{cases} \dot{x}_{tot}(t) = A_{reg}\, x_{tot}(t) + B_{reg}\, v(t) \\ \\ y_{tot}(t) = C_{reg}\, x_{tot}(t) + D_{reg}\, v(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{tot}(k+1) = A_{reg}\, x_{tot}(k) + B_{reg}\, v(k) \\ \\ y_{tot}(k) = C_{reg}\, x_{tot}(k) + D_{reg}\, v(k) \end{cases}$$

$$\dim(v) = 1, \ \dim(y_{tot}) = 2$$

dove:

$$A_{reg} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix} \quad B_{reg} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$$

$$C_{reg} = \begin{bmatrix} C & 0_{1\times n} \\ 0_{1\times n} & C \end{bmatrix} \qquad D_{reg} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}$$