Esercizio (calcolo analitico dell'evoluzione di un sistema dinamico LTI a tempo discreto)
Sia dato un sistema dinamico lineare tempo-invariante a tempo discreto, le cui equazioni di ingresso-stato-uscita sono:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calcolino:

1. gli stati e l'uscita del sistema con ingresso nullo e stato iniziale $x(k=0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$;
2. gli stati e l'uscita del sistema con ingresso $u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \varepsilon(k) \\ 3 \cdot \delta(k) \end{bmatrix}$ e stato iniziale nullo;
3. gli stati e l'uscita del sistema con ingresso $u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \varepsilon(k) \\ 3 \cdot \delta(k) \end{bmatrix}$ e stato iniziale $x(k=0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Soluzione
Dato il sistema dinamico, utilizzando le trasformate $\mathcal{Z}$ si ha:

$$X(z) = \underbrace{z\,(zI-A)^{-1}\,x_0}_{X_l(z)} + \underbrace{(zI-A)^{-1}\,BU(z)}_{X_f(z)}$$

$$Y(z) = \underbrace{Cz\,(zI-A)^{-1}\,x_0}_{Y_l(z)} + \underbrace{\left[C\,(zI-A)^{-1}\,B + D\right]U(z)}_{Y_f(z)}$$

dove $U(z) = \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{z}{z-1} \\ 3 \end{bmatrix}$

1. Per quanto riguarda l'evoluzione libera dello stato, $X_l(z) = z\,(zI-A)^{-1}\,x_0 \quad \Rightarrow$

$$\frac{X_l(z)}{z} = (zI-A)^{-1}\,x_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{z+0.5}{z^2-2.5z-1.5} \\ \dfrac{-2z+2.5}{z^2-2.5z-1.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-3} + \dfrac{0}{z+0.5} \\ \dfrac{-1}{z-3} + \dfrac{-1}{z+0.5} \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$X_l(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-3} \\ -\dfrac{z}{z-3} - \dfrac{z}{z+0.5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x_l(k) = \begin{bmatrix} 3^k \\ -3^k - (-0.5)^k \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

Per quanto riguarda l'evoluzione libera dell'uscita, $Y_l(z) = Cz\,(zI-A)^{-1}\,x_0 \quad \Rightarrow$

$$\frac{Y_l(z)}{z} = C\,(zI-A)^{-1}\,x_0 = \frac{3z-2}{z^2-2.5z-1.5} = \frac{2}{z-3} + \frac{1}{z+0.5}$$

e quindi:

$$Y_l(z) = 2\frac{z}{z-3} + \frac{z}{z+0.5} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y_l(k) = \left[2 \cdot 3^k + (-0.5)^k\right] \varepsilon(k)$$

D'altra parte, $y_l(k) = Cx_l(k) \quad \Rightarrow$

$$y_l(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k \\ -3^k - (-0.5)^k \end{bmatrix} \varepsilon(k) = \left[2 \cdot 3^k + (-0.5)^k\right] \varepsilon(k)$$

2. Per quanto riguarda l'evoluzione forzata dello stato, $X_f(z) = (zI - A)^{-1} BU(z) \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{X_f(z)}{z} &= (zI-A)^{-1} B \frac{U(z)}{z} = \begin{bmatrix} \left[(zI-A)^{-1}B\right]_1 & \left[(zI-A)^{-1}B\right]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{U_1(z)}{z} \\ \dfrac{U_2(z)}{z} \end{bmatrix} = \\
&= \underbrace{\left[(zI-A)^{-1}B\right]_1 \frac{U_1(z)}{z}}_{\dfrac{X_{f,1}(z)}{z}} + \underbrace{\left[(zI-A)^{-1}B\right]_2 \frac{U_2(z)}{z}}_{\dfrac{X_{f,2}(z)}{z}}
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\frac{X_{f,1}(z)}{z} &= \begin{bmatrix} \dfrac{2z+1}{z^3-3.5z^2+z+1.5} \\ \dfrac{4z-19}{z^3-3.5z^2+z+1.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-3} + \dfrac{-1}{z-1} + \dfrac{0}{z+0.5} \\ \dfrac{-1}{z-3} + \dfrac{5}{z-1} + \dfrac{-4}{z+0.5} \end{bmatrix} \\
\frac{X_{f,2}(z)}{z} &= \begin{bmatrix} \dfrac{3z+1.5}{z^3-2.5z^2-1.5z} \\ \dfrac{-6z+7.5}{z^3-2.5z^2-1.5z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-3} + \dfrac{0}{z+0.5} + \dfrac{-1}{z} \\ \dfrac{-1}{z-3} + \dfrac{6}{z+0.5} + \dfrac{-5}{z} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
X_{f,1}(z) &= \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-3} - \dfrac{z}{z-1} \\ -\dfrac{z}{z-3} + 5\dfrac{z}{z-1} - 4\dfrac{z}{z+0.5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x_{f,1}(k) = \begin{bmatrix} 3^k - 1^k \\ -3^k + 5 \cdot 1^k - 4 \cdot (-0.5)^k \end{bmatrix} \varepsilon(k) \\
X_{f,2}(z) &= \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-3} - 1 \\ -\dfrac{z}{z-3} + 6\dfrac{z}{z+0.5} - 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x_{f,2}(k) = \begin{bmatrix} 3^k \varepsilon(k) - \delta(k) \\ \left[-3^k + 6 \cdot (-0.5)^k\right] \varepsilon(k) - 5\delta(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

per cui:

$$x_f(k) = x_{f,1}(k) + x_{f,2}(k) = \begin{bmatrix} \left[2 \cdot 3^k - 1\right] \varepsilon(k) - \delta(k) \\ \left[-2 \cdot 3^k + 2 \cdot (-0.5)^k + 5\right] \varepsilon(k) - 5\delta(k) \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda l'evoluzione forzata dell'uscita, $Y_f(z) = \left[C(zI-A)^{-1}B + D\right] U(z) \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{Y_f(z)}{z} &= \left[C(zI-A)^{-1}B + D\right] \frac{U(z)}{z} = \\
&= \begin{bmatrix} \left[C(zI-A)^{-1}B + D\right]_1 & \left[C(zI-A)^{-1}B + D\right]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{U_1(z)}{z} \\ \dfrac{U_2(z)}{z} \end{bmatrix} = \\
&= \underbrace{\left[C(zI-A)^{-1}B + D\right]_1 \frac{U_1(z)}{z}}_{\dfrac{Y_{f,1}(z)}{z}} + \underbrace{\left[C(zI-A)^{-1}B + D\right]_2 \frac{U_2(z)}{z}}_{\dfrac{Y_{f,2}(z)}{z}}
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\frac{Y_{f,1}(z)}{z} &= \frac{-2z+20}{z^3-3.5z^2+z+1.5} = \frac{2}{z-3} + \frac{-6}{z-1} + \frac{4}{z+0.5} \\
\frac{Y_{f,2}(z)}{z} &= \frac{9z-6}{z^3-2.5z^2-1.5z} = \frac{2}{z-3} + \frac{-6}{z+0.5} + \frac{4}{z}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$
\begin{aligned}
Y_{f,1}(z) &= 2\frac{z}{z-3} - 6\frac{z}{z-1} + 4\frac{z}{z+0.5} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y_{f,1}(k) = \left[2\cdot 3^k - 6\cdot 1^k + 4\cdot(-0.5)^k\right]\varepsilon(k) \\
Y_{f,2}(z) &= 2\frac{z}{z-3} - 6\frac{z}{z+0.5} + 4 \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y_{f,2}(k) = \left[2\cdot 3^k - 6\cdot(-0.5)^k\right]\varepsilon(k) + 4\delta(k)
\end{aligned}
$$

per cui:

$$
y_f(k) = y_{f,1}(k) + y_{f,2}(k) = \left[4\cdot 3^k - 2\cdot(-0.5)^k - 6\right]\varepsilon(k) + 4\delta(k)
$$

D'altra parte, poiché D è nulla, allora $y_f(k) = Cx_f(k) \quad \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
y_f(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[2\cdot 3^k - 1\right]\varepsilon(k) - \delta(k) \\ \left[-2\cdot 3^k + 2\cdot(-0.5)^k + 5\right]\varepsilon(k) - 5\delta(k) \end{bmatrix} = \\
&= \left[4\cdot 3^k - 2\cdot(-0.5)^k - 6\right]\varepsilon(k) + 4\delta(k)
\end{aligned}
$$

3. In base ai risultati ottenuti nei due punti precedenti,

$$
x(k) = x_l(k) + x_f(k) = \begin{bmatrix} \left[3\cdot 3^k - 1\right]\varepsilon(k) - \delta(k) \\ \left[-3\cdot 3^k + (-0.5)^k + 5\right]\varepsilon(k) - 5\delta(k) \end{bmatrix}
$$

$$
y(k) = y_l(k) + y_f(k) = \left[6\cdot 3^k - (-0.5)^k - 6\right]\varepsilon(k) + 4\delta(k)
$$

D'altra parte, poiché D è nulla, allora $y(k) = Cx(k) \quad \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[3\cdot 3^k - 1\right]\varepsilon(k) - \delta(k) \\ \left[-3\cdot 3^k + (-0.5)^k + 5\right]\varepsilon(k) - 5\delta(k) \end{bmatrix} = \\
&= \left[6\cdot 3^k - (-0.5)^k - 6\right]\varepsilon(k) + 4\delta(k)
\end{aligned}
$$