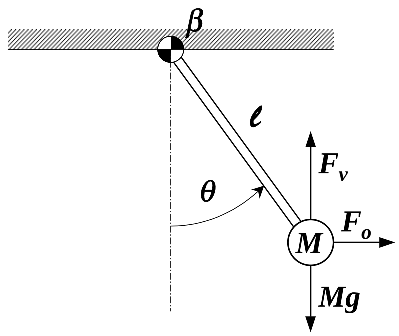
CONTROLLI AUTOMATICI I - D. U. - Sede di Alessandria
Compito del 5/VII/1999

Negli esercizi che seguono, rispondere alle domande motivando adeguatamente le scelte operate e riportando inoltre tutte le istruzioni MATLAB *utilizzate per il conseguimento dei risultati presentati.*

Esercizio 1

Un corpo puntiforme di massa M è collegato ad una cerniera mediante un'asta rigida di lunghezza ℓ e massa trascurabile, la cui posizione angolare è individuata dall'angolo $\theta\,(t)$. Il pendolo così costituito è libero di muoversi vincolato in un semipiano verticale $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$ e risulta soggetto alla forza peso Mg dovuta al campo gravitazionale. Sulla massa M agiscono anche una forza verticale $F_v\,(t)$ ed una forza orizzontale $F_o\,(t)$, come indicato nella figura sottostante. Sulla cerniera si origina una coppia di attrito viscoso caratterizzata dal coefficiente β. Le due forze $F_v\,(t)$ ed $F_o\,(t)$ costituiscono gli ingressi del sistema, mentre come uscita si sceglie la velocità angolare del pendolo $\dot{\theta}\,(t)$.



Facendo riferimento a tale sistema dinamico:

1. costruire il modello matematico in variabili di stato, precisandone le proprietà secondo la classificazione introdotta a lezione;
2. determinare gli stati di equilibrio corrispondenti agli ingressi costanti $F_v\,(t) = F_o\,(t) = Mg/2$, $\forall t \geq 0$;
3. operare la linearizzazione intorno ai punti di equilibrio trovati, specificando quali sono le equazioni d'ingresso-stato-uscita, i vettori d'ingresso, stato ed uscita, e le matrici del sistema linearizzato;
4. discutere la stabilità nell'intorno dei punti di equilibrio trovati al punto 2, facendo ricorso al solo metodo di linearizzazione e considerando tutti i possibili valori del coefficiente reale $\beta \geq 0$.

Esercizio 2

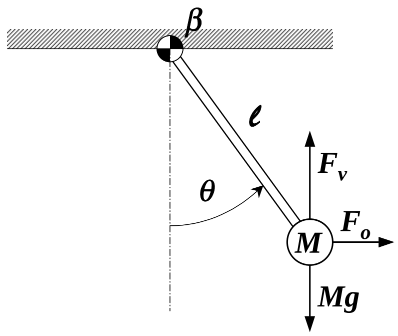
Dato il sistema dinamico avente la seguente rappresentazione in variabili di stato:

$$\dot{x}\,(t) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x\,(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u\,(t)\,, \qquad y\,(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x\,(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\,(t)$$

1. studiarne le caratteristiche di stabilità interna ed esterna;
2. determinare l'espressione analitica dell'uscita $y\,(t)$ ad un ingresso $u\,(t)$ a gradino di ampiezza 5, ipotizzando condizioni iniziali nulle, e precisare le caratteristiche dei vari modi ottenuti;
3. è possibile calcolare il valore in regime permanente della risposta del sistema ad un ingresso $u\,(t)$ a gradino di ampiezza 5, ipotizzando condizioni iniziali nulle? se sì, quanto vale?
4. è possibile progettare un opportuno dispositivo di controllo in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema, supponendo di avere a disposizione solamente la misura dell'uscita $y\,(t)$? se sì, progettarlo;
5. determinare la funzione di trasferimento del sistema controllato come al punto 4, mettendone in evidenza zeri e poli, e tracciare l'andamento della risposta in frequenza;
6. è possibile calcolare il valore in regime permanente della risposta del sistema controllato come al punto 4 ad un ingresso a gradino di ampiezza 5, ipotizzando condizioni iniziali nulle? se sì, quanto vale?

Soluzione dell'esercizio 1:

Un corpo puntiforme di massa M è collegato ad una cerniera mediante un'asta rigida di lunghezza ℓ e massa trascurabile, la cui posizione angolare è individuata dall'angolo $\theta(t)$. Il pendolo così costituito è libero di muoversi vincolato in un semipiano verticale ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) e risulta soggetto alla forza peso Mg dovuta al campo gravitazionale. Sulla massa M agiscono anche una forza verticale $F_v(t)$ ed una forza orizzontale $F_o(t)$, come indicato nella figura sottostante. Sulla cerniera si origina una coppia di attrito viscoso caratterizzata dal coefficiente β. Le due forze $F_v(t)$ ed $F_o(t)$ costituiscono gli ingressi del sistema, mentre come uscita si sceglie la velocità angolare del pendolo $\dot{\theta}(t)$.



Facendo riferimento a tale sistema dinamico:

Punto 1: *costruire il modello matematico in variabili di stato, precisandone le proprietà secondo la classificazione introdotta a lezione.*

L'equazione del moto del pendolo è:

$$J\ddot{\theta}(t) = Ml^2\ddot{\theta}(t) = [F_v(t) - Mg]\, l \sin\theta(t) + F_o(t)\, l\cos\theta(t) - \beta\dot{\theta}(t)$$

Introducendo come variabili d'ingresso-stato-uscita del sistema:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v(t) \\ F_o(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \dot{\theta}(t)$$

le equazioni d'ingresso-stato-uscita del sistema possono essere scritte come:

$$\left.\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) & = \quad f_1(x,u) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{u_1(t) - Mg}{Ml}\sin x_1(t) + \dfrac{u_2(t)}{Ml}\cos x_1(t) - \dfrac{\beta}{Ml^2}x_2(t) & = \quad f_2(x,u) \end{cases}\right\} \text{equazione di stato}$$

$$y(t) = x_2(t) = g(x,u) \qquad \text{equazione di uscita}$$

Il modello matematico ottenuto è a tempo continuo, non lineare, tempo-invariante, a dimensione finita.

Punto 2: *determinare gli stati di equilibrio corrispondenti agli ingressi costanti $F_v(t) = F_o(t) = Mg/2$, $\forall t \geq 0$.*

Per calcolare gli stati di equilibrio, si va a vedere quando è che, ponendo $u(t) = \overline{u} = \begin{bmatrix} Mg/2 \\ Mg/2 \end{bmatrix}$ $\forall t \geq 0$, risulta che:

$$x(t) = \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix}, \quad \forall t \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}(t) = \frac{d\overline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \geq 0$$

Pertanto l'equazione di stato valutata in un generico punto di equilibrio risulta essere:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x_1}}{dt} = 0 = \overline{x_2} \\ \dfrac{d\overline{x_2}}{dt} = 0 = -\dfrac{g}{2l}\sin\overline{x_1} + \dfrac{g}{2l}\cos\overline{x_1} - \dfrac{\beta}{Ml^2}\overline{x_2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{x_2} = 0 \\ -\sin\overline{x_1} + \cos\overline{x_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tan\overline{x_1} = 1 \\ \overline{x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{x_1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \pm k\pi \\ \overline{x_2} = 0 \end{cases}$$

Poiché il sistema ammette solo $-\pi/2 \leq \overline{\theta} = \overline{x_1} \leq \pi/2$, allora l'unico stato di equilibrio del sistema è

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Punto 3: *operare la linearizzazione intorno ai punti di equilibrio trovati, specificando quali sono le equazioni d'ingresso-stato-uscita, i vettori d'ingresso, stato ed uscita, e le matrici del sistema linearizzato.*

Essendo il sistema non lineare, è possibile procedere alla sua linearizzazione nell'intorno del punto di equilibrio $(\overline{x}, \overline{u})$ precedentemente trovato. Tale linearizzazione porta a definire il seguente nuovo sistema, detto sistema linearizzato:

$$\begin{array}{rcll} \delta\dot{x}(t) & = & F(t)\,\delta x(t) + G(t)\,\delta u(t) & \qquad \text{equazione di stato del sistema linearizzato} \\ \delta y(t) & = & H(t)\,\delta x(t) + D(t)\,\delta u(t) & \qquad \text{equazione di uscita del sistema linearizzato} \end{array}$$

in cui compaiono le seguenti variabili d'ingresso, stato ed uscita:

$$\delta u(t) = u(t) - \overline{u}, \quad \delta x(t) = x(t) - \overline{x}, \quad \delta y(t) = y(t) - \overline{y} = g(x, u) - g(\overline{x}, \overline{u})$$

Le matrici del sistema linearizzato sono:

$$\begin{aligned} F(t) &= \left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j}\right]_{\substack{x(t)=\overline{x}\\u(t)=\overline{u}}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \dfrac{u_1(t) - Mg}{Ml}\cos x_1(t) - \dfrac{u_2(t)}{Ml}\sin x_1(t) & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{array}\right]_{\substack{x(t)=\overline{x}\\u(t)=\overline{u}}} = \\ &= \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{array}\right] = F \\ G(t) &= \left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_j}\right]_{\substack{x(t)=\overline{x}\\u(t)=\overline{u}}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{Ml}\sin x_1(t) & \dfrac{1}{Ml}\cos x_1(t) \end{array}\right]_{\substack{x(t)=\overline{x}\\u(t)=\overline{u}}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2Ml} & \dfrac{\sqrt{2}}{2Ml} \end{array}\right] = G \\ H(t) &= \left[\frac{\partial g_i(x,u)}{\partial x_j}\right]_{\substack{x(t)=\overline{x}\\u(t)=\overline{u}}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{x(t)=\overline{x}\\u(t)=\overline{u}}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right] = H \\ D(t) &= \left[\frac{\partial g_i(x,u)}{\partial u_j}\right]_{\substack{x(t)=\overline{x}\\u(t)=\overline{u}}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]_{\substack{x(t)=\overline{x}\\u(t)=\overline{u}}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right] = D \end{aligned}$$

e quindi il sistema linearizzato ottenuto è tempo invariante, essendo le matrici F, G, H e D costanti.

Punto 4: *discutere la stabilità nell'intorno dei punti di equilibrio trovati al punto 2, facendo ricorso al solo metodo di linearizzazione e considerando tutti i possibili valori del coefficiente reale* $\beta \geq 0$.

La stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto di equilibrio $(\overline{x}, \overline{u})$ può essere studiata mediante il metodo di linearizzazione andando a calcolare gli autovalori della matrice F del sistema linearizzato proprio in quel punto. Il polinomio caratteristico $pc(\lambda)$ associato a F vale:

$$pc(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \left|\begin{array}{cc} \lambda - 0 & -1 \\ +\dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & \lambda + \dfrac{\beta}{Ml^2} \end{array}\right| = \lambda\left(\lambda + \frac{\beta}{Ml^2}\right) + \frac{\sqrt{2}g}{2l} = \lambda^2 + \frac{\beta}{Ml^2}\lambda + \frac{\sqrt{2}g}{2l}$$

Nel caso $\beta > 0$, il polinomio caratteristico ha due radici con parte reale strettamente negativa. Questo deriva dall'applicazione della regola di Cartesio e dal fatto che non ci sono variazioni di segno fra i coefficienti di $pc(\lambda)$. Pertanto il sistema linearizzato è asintoticamente stabile e quindi, secondo il metodo di linearizzazione, anche il sistema non lineare è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di equilibrio considerato.

Nel caso $\beta = 0$, il polinomio caratteristico ha due radici immaginarie pure in $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}g}{2l}}j$. Pertanto il sistema linearizzato è semplicemente stabile e quindi, in base al metodo di linearizzazione, non si può affermare nulla sulla stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto di equilibrio considerato.

Soluzione dell'esercizio 2:

Dato il sistema dinamico avente la seguente rappresentazione in variabili di stato:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Punto 1: *studiarne le caratteristiche di stabilità interna ed esterna.*

Per quanto riguarda la stabilità interna, bisogna calcolare gli autovalori della matrice F. Essendo F diagonale, i suoi autovalori si trovano sulla diagonale:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poiché il sistema è LTI a tempo continuo, occorre osservare la parte reale di tali autovalori: $\Re e\{\lambda_i\} \leq 0$ $\forall i$, ed inoltre l'autovalore con $\Re e\{\lambda_i\} = 0$ è $\lambda_4 = 0$ che ha molteplicità unitaria. Pertanto il sistema è semplicemente stabile.

Alla stessa conclusione si giunge calcolando con MATLAB gli autovalori mediante le funzioni `eig` oppure `roots` e `poly`:

```
F=diag([-5,-2,-1,0]); G=[0;1;1;1]; H=[1,0,2,1]; D=[0];
eig(F)
    ans =
         −5
         −2
         −1
          0
roots(poly(F))
    ans =
                  0
         −5.0000
         −2.0000
         −1.0000
```

Per quanto riguarda la stabilità esterna, è necessario verificare che la parte completamente raggiungibile ed osservabile del sistema sia asintoticamente stabile. Alternativamente, bisogna verificare che la funzione di trasferimento $M(s)$ del sistema, una volta effettuate tutte le possibili cancellazioni zeri-poli, presenti soltanto poli con parte reale strettamente negativa. Utilizzando le funzioni MATLAB `ss2tf` (per passare da rappresentazione in variabili di stato a funzione di trasferimento), `minreal` (per effettuare le cancellazioni zeri-poli della funzione di trasferimento) e `roots` (per calcolare le radici dei polinomi a numeratore e denominatore della funzione di trasferimento, ossia gli zeri ed i poli), si ottiene:

```
[num,den]=ss2tf(F,G,H,D)
    num =
         0   3.0000   22.0000   37.0000   10.0000
    den =
         1   8   17   10   0
[numr,denr]=minreal(num,den)
    2 pole-zeros cancelled
    numr =
         0   3   1
    denr =
         1.0000   1.0000       0
roots(numr)
    ans =
         −0.3333
roots(denr)
    ans =
                  0
         −1.0000
```

Pertanto la funzione di trasferimento del sistema è:

$$M(s) = H(sI - F)^{-1} G + D = \frac{3s^3 + 22s^2 + 37s + 10}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 10s} = \frac{3s+1}{s^2+s} = \frac{3(s+1/3)}{s(s+1)}$$

e quindi un polo di $M(s)$ si trova sull'asse immaginario; di conseguenza, il sistema non è esternamente stabile.

Punto 2: *determinare l'espressione analitica dell'uscita $y(t)$ ad un ingresso $u(t)$ a gradino di ampiezza 5, ipotizzando condizioni iniziali nulle, e precisare le caratteristiche dei vari modi ottenuti.*

La trasformata di Laplace $Y(s)$ dell'uscita è data da:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}\{y(t)\} = H(sI-F)^{-1} x(t=0) + \left[H(sI-F)^{-1} G + D\right] \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} = \\ &= M(s) \cdot U(s) = \frac{3s+1}{s^2+s} \cdot \frac{5}{s} = \frac{15s+5}{s^3+s^2} = \frac{15s+5}{s^2(s+1)} \end{aligned}$$

La scomposizione in fratti semplici di $Y(s)$ si ricava con MATLAB mediante la funzione `residue`:

```
numy=conv(numr,5);
deny=conv(denr,[1,0]);
[ry,py,ky]=residue(numy,deny)
    ry =
         −10.0000
          10.0000
           5.0000
    py =
         −1.0000
               0
               0
    ky =
         []
```

Quindi $Y(s)$ può essere scomposta in fratti semplici come:

$$Y(s) = \frac{15s+5}{s^3+s^2} = -\frac{10}{s+1} + \frac{10}{s} + \frac{5}{s^2}$$

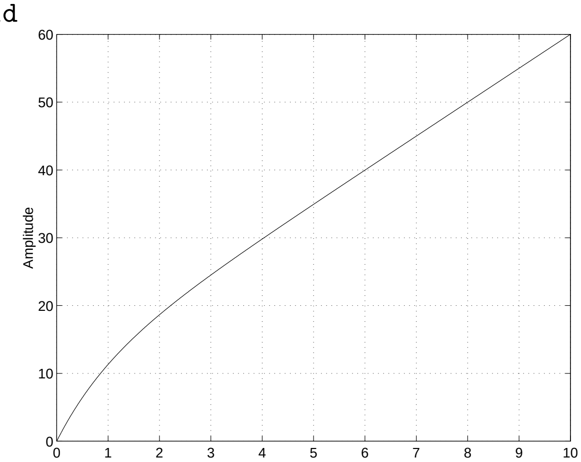
Si osservi la presenza di un polo doppio nell'origine. Antitrasformando, si ricava:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(-10e^{-t} + 10 + 5t\right)\varepsilon(t)$$

Compaiono quindi tre modi distinti nella risposta $y(t)$:
- il modo convergente $-10e^{-t}\varepsilon(t)$ associato al polo in -1;
- il modo costante $10\varepsilon(t)$ associato al polo semplice nell'origine;
- il modo divergente $5t\varepsilon(t)$ associato al polo doppio nell'origine.

Si può simulare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = 5\varepsilon(t)$ utilizzando la funzione MATLAB `lsim`:

```
t=linspace(0,10,1000);
u=5*ones(size(t));
lsim(F,G,H,D,u,t), grid
```



Punto 3: *è possibile calcolare il valore in regime permanente della risposta del sistema ad un ingresso $u(t)$ a gradino di ampiezza 5, ipotizzando condizioni iniziali nulle? se sì, quanto vale?*

Poiché dal punto 1 è risultato che il sistema è semplicemente stabile anziché asintoticamente stabile, non esiste alcuna risposta in regime permanente. D'altra parte, poiché l'espressione analitica della risposta $y(t)$ è stata determinata al punto precedente, si vede direttamente che $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ e quindi non esiste alcun valore in regime permanente.

Punto 4: *è possibile progettare un opportuno dispositivo di controllo in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema, supponendo di avere a disposizione solamente la misura dell'uscita $y(t)$? se sì, progettarlo.*

Poiché si ha a disposizione la misura della sola uscita $y(t)$ e non di tutti gli stati $x(t)$, al fine di stabilizzare asintoticamente il sistema si può provare a vedere se è possibile progettare un regolatore, che opera una retroazione dagli stati stimati. Occorre quindi accertarsi che:

1) il sistema sia asintoticamente stimabile, cioè che sia possibile progettare uno stimatore asintotico degli stati che fornisca una stima $\hat{x}(t)$ degli stati asintoticamente convergente al valore vero $x(t)$;

2) il sistema sia asintoticamente stabilizzabile, cioè che sia possibile progettare una legge di controllo $u(t) = v(t) - K\hat{x}(t)$ in grado di rendere asintoticamente stabile il sistema retroazionato dagli stati stimati.

Affinché il sistema sia asintoticamente stimabile, occorre che la sua eventuale parte non osservabile sia asintoticamente stabile. Si va a vedere innanzi tutto se il sistema è completamente osservabile, perché in tal caso non esiste una parte non osservabile. Usando le funzioni MATLAB `obsv` e `rank`, si calcola la matrice di osservabilità K_O ed il suo rango:

```
Ko=obsv(F,H), o=rank(Ko)
    Ko =
            1  0   2  1
           −5  0  −2  0
           25  0   2  0
         −125  0  −2  0
    o =
        3
```

e di conseguenza

$$K_O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -2 & 0 \\ 25 & 0 & 2 & 0 \\ -125 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad o = \rho(K_O) = 3 < n = 4$$

quindi il sistema non è completamente osservabile, ed in particolare presenta $n-o=1$ modo non osservabile. Per evidenziare tale parte non osservabile, si va a porre il sistema nella forma canonica di Kalman di osservabilità, utilizzando la funzione MATLAB `obsvf`:

```
[Fo,Go,Ho,To,ko]=obsvf(F,G,H)
```

$$\overline{F}_O = \left[\begin{array}{c|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -0.4839 & 1.0535 & 0 \\ 0 & 1.0535 & -4.0161 & 1.6073 \\ 0 & 0 & 1.6073 & -1.5 \end{array}\right], \quad \overline{G}_O = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0.3111 \\ 0.6350 \\ 1.2247 \end{array}\right], \quad \overline{H}_O = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 2.4495 \end{array}\right]$$

pertanto il sottosistema non osservabile è:

$$\overline{F}_{no} = [-2], \quad \overline{G}_{no} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{H}_{no} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ed il relativo modo non osservabile è associato all'autovalore -2 di $\overline{F}_{no}$: tale modo è convergente, essendo la parte reale dell'autovalore strettamente negativa, e quindi il sistema è asintoticamente stimabile.

Affinché il sistema sia asintoticamente stabilizzabile, occorre che la sua eventuale parte non raggiungibile sia asintoticamente stabile. Si va a vedere innanzi tutto se il sistema è completamente raggiungibile, perché in tal caso non esiste una parte non raggiungibile. Usando le funzioni MATLAB `ctrb` e `rank`, si calcola la matrice di raggiungibilità K_R ed il suo rango:

```
Kr=ctrb(F,G), r=rank(Kr)
    Kr =
         0    0  0    0
         1   −2  4   −8
         1   −1  1   −1
         1    0  0    0
    r =
         3
```

e di conseguenza

$$K_R = \left[\begin{array}{cccc} G & FG & F^2G & F^3G \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad r = \rho\left(K_R\right) = 3 < n = 4$$

pertanto il sistema non è completamente raggiungibile, ed in particolare presenta $n - r = 1$ modo non raggiungibile. Per evidenziare tale parte non raggiungibile, si va a porre il sistema nella forma canonica di Kalman di raggiungibilità, utilizzando la funzione Matlab `ctrbf`:

```
[Fr,Gr,Hr,Tr,kr]=ctrbf(F,G,H)
```

$$\overline{F}_R = \left[\begin{array}{c|ccc} -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0.5774 & 0 \\ 0 & 0.5774 & -1 & 0.8165 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -1 \end{array}\right], \ \overline{G}_R = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1.7321 \end{array}\right], \ \overline{H}_R = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & -1.2247 & 0.7071 & 1.7321 \end{array}\right]$$

pertanto il sottosistema non raggiungibile è:

$$\overline{F}_{nr} = [-5], \quad \overline{G}_{nr} = \left[\begin{array}{c} 0 \end{array}\right], \quad \overline{H}_{nr} = \left[\begin{array}{c} -1 \end{array}\right]$$

ed il relativo modo non raggiungibile è associato all'autovalore -5 di $\overline{F}_{nr}$: tale modo è convergente, essendo la parte reale dell'autovalore strettamente negativa, e quindi il sistema è asintoticamente stabilizzabile.

Essendo il sistema sia asintoticamente stimabile sia asintoticamente stabilizzabile, è possibile progettare un regolatore che stabilizza il sistema. Tale dispositivo di controllo è costituito da uno stimatore asintotico degli stati, di cui si deve progettare opportunamente il vettore colonna L, e da una retroazione dagli stati stimati, di cui si deve progettare opportunamente il vettore riga K.

Il vettore L va progettato in modo tale che gli autovalori della matrice $F - LH$ siano opportunamente posizionati nel semipiano sinistro. Poiché l'autovalore -2 della matrice F è associato ad un modo non osservabile, esso comparirà sempre fra gli autovalori di $F - LH$, qualunque sia il valore di L; sarà quindi possibile progettare L per posizionare ad arbitrio solo i rimanenti 3 autovalori di $F - LH$, ad esempio in -10, -20, -30. Il modo più semplice di calcolare L è di applicare la funzione Matlab `place` all'intero sistema, verificando a posteriori che gli autovalori di $F - LH$ risultino effettivamente posizionati dove desiderato:

```
L1=place(F',H',[-2,-10,-20,-30])'
    place:  ndigits= 18
    L1 =
         1.0e + 003  *
             0.0938
             0.0000
            −0.6199
             1.2000
eig(F-L1*H)
    ans =
           −2.0000
          −30.0000
          −20.0000
          −10.0000
```

e quindi il vettore colonna L vale:

$$L = \left[\begin{array}{c} 93.8 \\ 0 \\ -619.9 \\ 1200 \end{array}\right]$$

Va osservato che questo procedimento non sempre funziona, quando applicato ad un sistema non completamente osservabile. In tal caso è necessario procedere al posizionamento degli autovalori della sola parte osservabile del sistema in forma canonica di Kalman di osservabilità, progettando un vettore colonna $\overline{L}_o$ in grado di posizionare ad arbitrio gli autovalori di $\overline{F}_o - \overline{L}_o \overline{H}_o$ ($\overline{F}_o$ e $\overline{H}_o$ sono le parti osservabili rispettivamente di $\overline{F}_O$ e $\overline{H}_O$). Ad esempio, per posizionare questi ultimi autovalori in -10, -20, -30, si possono utilizzare le funzioni MATLAB `place`:

```
Lo=place(Fo(2:4,2:4)',Ho(1,2:4)',[-10,-20,-30])'
    place:  ndigits= 18
    Lo =
         1.0e+003  *
             1.3363
             0.2164
             0.0220
```

oppure `acker` (necessaria qualora si fossero voluti posizionare autovalori coincidenti):

```
Lo=acker(Fo(2:4,2:4)',Ho(1,2:4)',[-10,-20,-30])'
    Lo =
         1.0e+003  *
             1.3363
             0.2164
             0.0220
```

Si utilizza poi $\overline{L}_o$ per posizionare gli autovalori di $F - LH$ dove desiderato, sfruttando le relazioni di equivalenza fra il sistema dato (F, G, H) e quello in forma canonica di Kalman di osservabilità $\left(\overline{F}_O, \overline{G}_O, \overline{H}_O\right)$, verificando a posteriori che gli autovalori di $F - LH$ risultino correttamente posizionati:

```
L2=([0,Lo']*To)'
    L2 =
         1.0e+003  *
             0.0938
             0.0000
            -0.6199
             1.2000
eig(F-L2*H)
    ans =
         -30.0000
         -20.0000
         -10.0000
          -2.0000
```

Il vettore K va progettato in modo tale che gli autovalori della matrice $F - GK$ siano opportunamente posizionati nel semipiano sinistro. Poiché l'autovalore -5 della matrice F è associato ad un modo non raggiungibile, esso comparirà sempre fra gli autovalori di $F - GK$, qualunque sia il valore di K; sarà quindi possibile progettare K per posizionare ad arbitrio solo i rimanenti 3 autovalori di $F - GK$, ad esempio in -1, -3, -4. Il modo più semplice di calcolare K è di applicare la funzione MATLAB `place` all'intero sistema, verificando a posteriori che gli autovalori di $F - GK$ risultino effettivamente posizionati dove desiderato.

```
K1=place(F,G,[-5,-1,-3,-4])
    place:  ndigits= 16
    K1 =
         -0.1049  -1.0000  0  6.0000
eig(F-G*K1)
    ans =
         -1.0000
         -3.0000
         -4.0000
         -5.0000
```

e quindi il vettore riga K vale:

$$K = \begin{bmatrix} -0.1049 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Va osservato che questo procedimento non sempre funziona, quando applicato ad un sistema non completamente raggiungibile. In tal caso è necessario procedere al posizionamento degli autovalori della sola parte raggiungibile del sistema in forma canonica di Kalman di raggiungibilità, progettando un vettore riga $\overline{K}_r$

in grado di posizionare ad arbitrio gli autovalori di $F_r - G_r K_r$ (F_r e G_r sono le parti raggiungibili rispettivamente di $\overline{F}_R$ e $\overline{G}_R$). Ad esempio, per posizionare questi ultimi autovalori in -1, -3, -4, si possono utilizzare le funzioni Matlab `place`:

```
Kr=place(Fr(2:4,2:4),Gr(2:4,1),[-1,-3,-4])
    place:  ndigits= 16
    Kr =
         2.0412   4.9497   2.8868
```

oppure `acker` (necessaria qualora si fossero voluti posizionare autovalori coincidenti):

```
Kr=acker(Fr(2:4,2:4),Gr(2:4,1),[-1,-3,-4])
    Kr =
         2.0412   4.9497   2.8868
```

Si utilizza poi $\overline{K}_r$ per posizionare gli autovalori di $F - GK$ dove desiderato, sfruttando le relazioni di equivalenza fra il sistema dato (F, G, H) e quello in forma canonica di Kalman di raggiungibilità $\left(\overline{F}_R, \overline{G}_R, \overline{H}_R\right)$, verificando a posteriori che gli autovalori di $F - GK$ risultino correttamente posizionati:

```
K2=[0,Kr]*Tr
    K2 =
         0.0000   −1.0000   0.0000   6.0000
eig(F-G*K2)
    ans =
         −4.0000
         −3.0000
         −1.0000
         −5.0000
```

Si osservi che in questo caso, mediante i due differenti approcci, si sono ottenuti due diversi vettori K_1 e K_2 ed entrambi posizionano gli autovalori di $F - GK$ in $(-1, -3, -4, -5)$. Tale fenomeno è legato al fatto che i sistema non è completamente raggiungibile, e quindi non esiste un'unica soluzione al problema del posizionamento degli autovalori.

Punto 5: *determinare la funzione di trasferimento del sistema controllato come al punto 4, mettendone in evidenza zeri e poli, e tracciare l'andamento della risposta in frequenza.*

La funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa controllato mediante regolatore vale

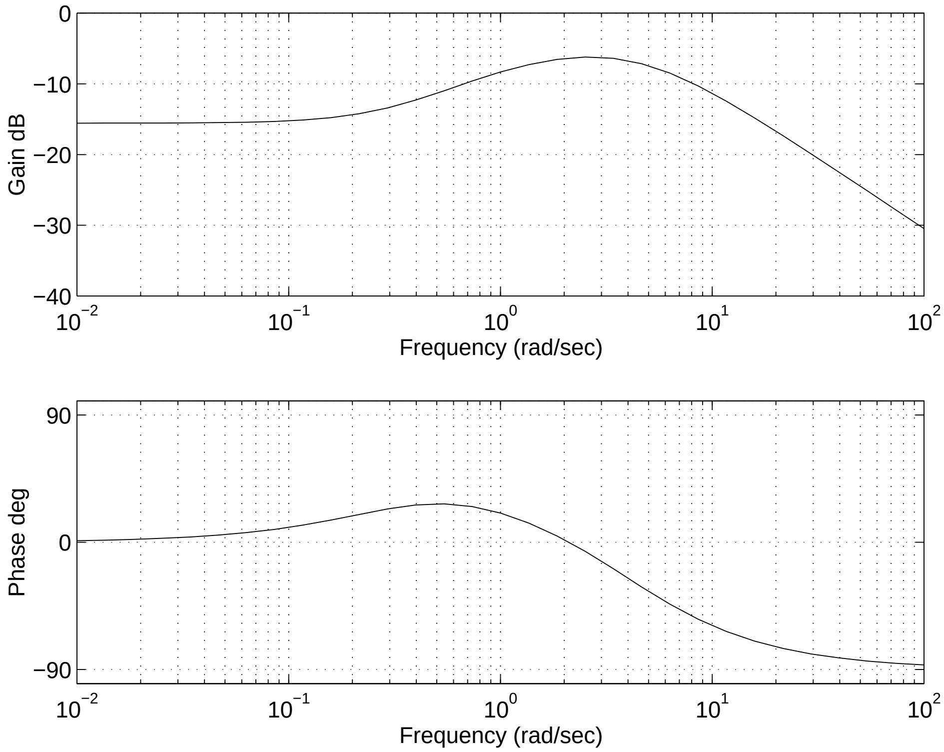
$$M_{cc}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = H\left[sI - (F - GK)\right]^{-1} G$$

e può essere ricavata utilizzando le funzioni Matlab `ss2tf` (per passare da rappresentazione in variabili di stato a funzione di trasferimento), `minreal` (per effettuare le cancellazioni zeri-poli della funzione di trasferimento) e `roots` (per calcolare le radici dei polinomi a numeratore e denominatore della funzione di trasferimento, ossia gli zeri ed i poli):

```
[numreg,denreg]=ss2tf(F-G*K1,G,H,D)
    numreg =
         0   3.0000   22.0000   37.0000   10.0000
    denreg =
      1.0000   13.0000   59.0000   107.0000   60.0000
[numregr,denregr]=minreal(numreg,denreg)
    1 pole-zeros cancelled
    numregr =
         0   3.0000   7.0000   2.0000
    denregr =
         1.0000   8.0000   19.0000   12.0000
roots(numregr)
    ans =
         −2.0000   −0.3333
roots(denregr)
    ans =
         −4.0000   −3.0000   −1.0000
```

$$M_{cc}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{3s^3 + 22s^2 + 37s + 10}{s^4 + 13s^3 + 59s^2 + 107s + 60} = \frac{3s^2 + 7s + 2}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12} = \frac{3(s + 1/3)(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)(s + 4)}$$

Per il tracciamento della risposta in frequenza, si utilizza la funzione MATLAB `bode`:
`bode(numregr,denregr)`



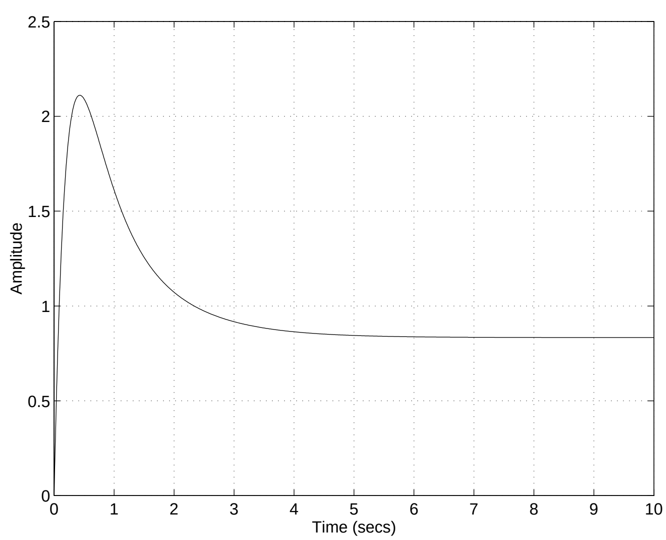
Punto 6: *è possibile calcolare il valore in regime permanente della risposta del sistema controllato come al punto 4 ad un ingresso a gradino di ampiezza* 5*, ipotizzando condizioni iniziali nulle? se sì, quanto vale?*

Il sistema è stato stabilizzato asintoticamente mediante il regolatore; pertanto esiste la risposta in regime permanente ed il suo valore può essere calcolato applicando il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned} y_{regime} &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \mathcal{L}\{y(t)\} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{Y(s)}{V(s)} \cdot \mathcal{L}\{v(t)\} = \lim_{s\to 0} s \cdot M_{cc}(s) \cdot \mathcal{L}\{v(t)\} = \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{3s^2+7s+2}{s^3+8s^2+19s+12} \cdot \frac{5}{s} = \frac{2\cdot 5}{12} = \frac{5}{6} = 0.8333 \end{aligned}$$

È anche possibile simulare la risposta del sistema in catena chiusa all'ingresso $5\varepsilon(t)$ utilizzando la funzione MATLAB `lsim`:

```
lsim(F-G*K1,G,H,D,u,t), grid
```



dalla quale si può verificare l'effettivo valore della risposta in regime permanente.