APPENDICE:
NORME E SPAZI DI SEGNALI E SISTEMI

Michele TARAGNA

Dipartimento di Automatica e Informatica

Politecnico di Torino

michele.taragna@polito.it

Corso di III livello

“Experimental modeling: costruzione di modelli da dati sperimentali”

Norme e spazi di segnali e sistemi

Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Si definisce **norma su $\mathbb{X}$** una funzione a valore reale

$$x \longmapsto \|x\|$$

che soddisfa le seguenti proprietà, valide $\forall x, y \in \mathbb{X}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \|x\| \geq 0 \text{ (nonnegatività)} \\ (ii) & \|x\| = 0 \text{ se e solo se } x = 0 \end{array}\right\} \|x\| \text{ è una funzione definita positiva}$$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (omogeneità)

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

$\mathbb{X}$ è detto normato se si è definita una norma su di esso.

Norme di vettori

Sia $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$; si definiscono norme di Hölder ℓ_p :

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Casi d'interesse:

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \quad \text{(norma euclidea)}$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Norme di matrici

Sia $\mathbb{X}$ l'insieme di tutte le matrici $m \times n$ definite su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$: $\mathbb{R}^{m \times n}$ o $\mathbb{C}^{m \times n}$;
$\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale su cui si possono definire diversi tipi di norme.

Di particolare interesse è la classe delle norme indotte**:**

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad A \in \mathbb{X}$$

con la seguente proprietà, valida $\forall A, B \in \mathbb{X}$:

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p$$

Esempi di norme indotte:

$$\|A\|_1 := \sup_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{(massima somma per colonna)}$$

$$\|A\|_2 := \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i \left(A^* A\right)}$$

$$\|A\|_\infty := \sup_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(massima somma per riga)}$$

La norma di Frobenius è un esempio di norma non indotta:

$$\|A\|_F := \sqrt{\text{Traccia}\left(A^* A\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Norme e spazi di segnali a tempo discreto

Si considerino i seguenti spazi vettoriali ℓ_p a dimensione infinita (con $1 \leq p \leq \infty$), costituiti da sequenze $x = \{x_k\} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\ell_p(\mathbb{Z}_+) &:= \left\{ x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} : \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \infty \right\} \\
\ell_p(\mathbb{Z}_-) &:= \left\{ x = \{x_k\}_{k=-\infty}^{-1} : \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} |x_k|^p\right)^{1/p} < \infty \right\} \\
\ell_p(\mathbb{Z}) &:= \left\{ x = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty} : \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \infty \right\}
\end{aligned}$$

su cui si possono definire rispettivamente le norme:

$$\begin{aligned}
\|x\|_p &:= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \\
\|x\|_p &:= \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} |x_k|^p\right)^{1/p} \\
\|x\|_p &:= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Norme e spazi di segnali a tempo continuo

Si consideri il seguente spazio vettoriale L_p a dimensione infinita (con $1 \leq p \leq \infty$), costituito da funzioni $f = f(t) : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrabili secondo Lebesgue:

$$L_p(I) := \left\{ f : f \text{ è misurabile, } \left(\int_I |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

su cui si può definire la norma:

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

Casi d'interesse:

p	**Tempo discreto**	**Tempo continuo**
1	$\|x\|_1 := \sum_k \|x_k\|$	$\|f\|_1 := \int_I \|f(t)\| \, dt$
2	$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_k \|x_k\|^2}$	$\|f\|_2 := \sqrt{\int_I \|f(t)\|^2 \, dt}$
∞	$\|x\|_\infty := \sup_k \|x_k\|$	$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|f(t)\|$

Casi d'interesse:

p	**Tempo discreto**	**Tempo continuo**
1	$\|x\|_1 := \sum_k \|x_k\|$	$\|f\|_1 := \int_I \|f(t)\| dt$
2	$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_k \|x_k\|^2}$	$\|f\|_2 := \sqrt{\int_I \|f(t)\|^2 dt}$
∞	$\|x\|_\infty := \sup_k \|x_k\|$	$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|f(t)\|$

Applicazioni:

(i) un segnale s ha *energia finita* se e solo se $\|s\|_2 < \infty$;

(ii) un segnale s è *limitato* se e solo se $\|s\|_\infty < \infty$;

(iii) un segnale $s \in L_p(\mathbb{R})$ è detto *causale* se $s \in L_p(\mathbb{R}_+)$, mentre è detto *anticausale* se $s \in L_p(\mathbb{R}_-)$.

Norme e spazi delle caratterizzazioni in frequenza di segnali a tempo discreto

Sia $x = \{x_k\} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un segnale a tempo discreto.

Si definisce caratterizzazione in frequenza di x la trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT)

$$X(\omega) = \hat{x}\left(e^{j\omega}\right) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k}$$

Si definisce allora lo spazio normato $\mathcal{L}_p$ delle caratterizzazioni in frequenza di segnali a tempo discreto (con $1 \le p \le \infty$):

$$\mathcal{L}_p([0, 2\pi]) := \left\{ X : \|X\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(\omega)|^p \, d\omega \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Norme e spazi delle caratterizzazioni in frequenza di segnali a tempo continuo

Sia $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un segnale a tempo continuo.

Si definisce caratterizzazione in frequenza di x la trasformata di Fourier

$$X(\omega) = \hat{x}(j\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

Si definisce allora lo spazio normato $\mathcal{L}_p$ delle caratterizzazioni in frequenza di segnali a tempo continuo (con $1 \leq p \leq \infty$):

$$\mathcal{L}_p(\mathbb{R}) := \left\{ X : \|X\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^p \, d\omega \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Spazi di Hardy

$$\mathcal{H}_p(\mathbb{D}) := \left\{ \hat{h} : \hat{h}(\lambda) \text{ è analitica in } \mathbb{D},\ \|\hat{h}\|_p < \infty \right\}$$

con $\quad \mathbb{D} := \{\lambda : |\lambda| < 1\}, \qquad \|\hat{h}\|_p := \left(\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \hat{h}\left(r \cdot e^{j\omega}\right) \right|^p d\omega \right)^{1/p}$

Casi d'interesse nel caso di caratterizzazioni in frequenza di segnali a tempo discreto:

- $\mathcal{H}_2(\mathbb{D}) := \left\{ \hat{h} : \hat{h}(\lambda) \text{ è analitica in } \mathbb{D},\ \|\hat{h}\|_2 < \infty \right\}$, con
$$\|\hat{h}\|_2 := \left(\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \hat{h}\left(r \cdot e^{j\omega}\right) \right|^2 d\omega \right)^{1/2}$$
- $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}) := \left\{ \hat{h} : \hat{h}(\lambda) \text{ è analitica in } \mathbb{D},\ \|\hat{h}\|_\infty < \infty \right\}$, con
$$\|\hat{h}\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{|\lambda|<1} \left| \hat{h}(\lambda) \right|$$

- $\mathcal{H}_{\rho,M}(\mathbb{D}) := \left\{\hat{h} : \hat{h} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \lambda^k \text{ è analitica in } \mathbb{D}_\rho,\ \|\hat{h}\|_{\infty,\rho} \leq M\right\}$, con

$$\mathbb{D}_\rho := \{\lambda : |\lambda| < \rho\}$$

$$\|\hat{h}\|_{p,\rho} := \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\hat{h}\left(\rho \cdot e^{j\omega}\right)\right|^p d\omega\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda \in \mathbb{D}_\rho} \left|\hat{h}(\lambda)\right|, & p = \infty \end{cases}$$

- $\mathcal{H}^{(1)}_{\rho=1,M}(\mathbb{D}) := \left\{\hat{h} : \hat{h} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \lambda^k \text{ è analitica in } \mathbb{D},\ \|\hat{h}'\|_{\infty} \leq M\right\}$, con

$$\hat{h}' := \frac{d\hat{h}}{d\lambda}$$

Norme di sistemi

Sia G un sistema lineare tempo invariante (LTI), a tempo discreto oppure a tempo continuo, e sia $\widehat{G}$ la sua trasformata Lambda ($\widehat{G} = \sum_k g_k \lambda^k$) o di Laplace.

Siano u ed $y = g * u$ rispettivamente l'ingresso e l'uscita di G. Allora:

$$\|G\|_{2,2} := \sup_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} = \|\widehat{G}\|_\infty = \begin{cases} \underset{\omega \in [0,2\pi]}{\operatorname{ess\,sup}} \left|\hat{g}\left(e^{j\omega}\right)\right| & (T.D.) \\ \underset{\omega \in]-\infty,\infty[}{\operatorname{ess\,sup}} \left|\hat{g}\left(j\omega\right)\right| & (T.C.) \end{cases}$$

$$\|G\|_{\infty,\infty} := \sup_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \|G\|_1 = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k| & (T.D.) \\ \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt & (T.C.) \end{cases}$$

Applicazioni:

- G ha un'amplificazione limitata di energia se e solo se $\widehat{G} \in \mathcal{H}_\infty$;
- G è BIBO-stabile se e solo se $\|G\|_1$ è finita.

Spazi di Banach

Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale normato:

- una sequenza $x = \{x_k\} \in \mathbb{X}$ è convergente se

$$\exists x^* \in \mathbb{X} : \|x_k - x^*\| \longrightarrow 0 \quad \text{per } k \to \infty;$$

- una sequenza $x = \{x_k\} \in \mathbb{X}$ è una sequenza di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n > 0 : \|x_i - x_k\| \leq \varepsilon, \quad \forall i, k \geq n;$$

- $\mathbb{X}$ si dice completo se ogni sequenza di Cauchy in $\mathbb{X}$ è convergente.

Si definisce **spazio di Banach** uno spazio vettoriale normato completo.

Esempi di spazi di Banach: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\ell_p(\mathbb{Z})$, $L_p(I)$, $\mathcal{L}_p([0, 2\pi])$, $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$.

Spazi di Hilbert

Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Si definisce **prodotto interno (o scalare) in $\mathbb{X}$** una funzione a valore complesso

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

che soddisfa le seguenti proprietà, valide $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ (nonnegatività)} \\ (ii) & \langle x, x \rangle = 0 \text{ se e solo se } x = 0 \end{array}\right\} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ è una funzione definita positiva}$$

(iii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (addività)

(iv) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (omogeneità)

(v) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (simmetria)

Si definisce **spazio di Hilbert** uno spazio vettoriale normato completo su cui è definito un prodotto interno, che induce come norma:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Esempi di spazi di Hilbert:

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}^n, \qquad \langle x, y \rangle := x^H y = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k y_k$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}^{m \times n}, \qquad \langle A, B \rangle := \text{Traccia}\,(A^* B)$$

$$\mathbb{X} = \ell_2\,(\mathbb{Z})\,, \qquad \langle x, y \rangle := x^H y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x}_k y_k$$

$$\mathbb{X} = L_2\,(I)\,, \qquad \langle f, g \rangle := \int_I \overline{f\,(t)} g\,(t)\,dt, \quad \text{dove } I = \mathbb{R},\ \mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_-,\ j\mathbb{R}$$

$$\mathbb{X} = \mathcal{L}_2\,([0, 2\pi])\,, \qquad \langle X, Y \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{X\,(\omega)} Y\,(\omega)\,d\omega$$