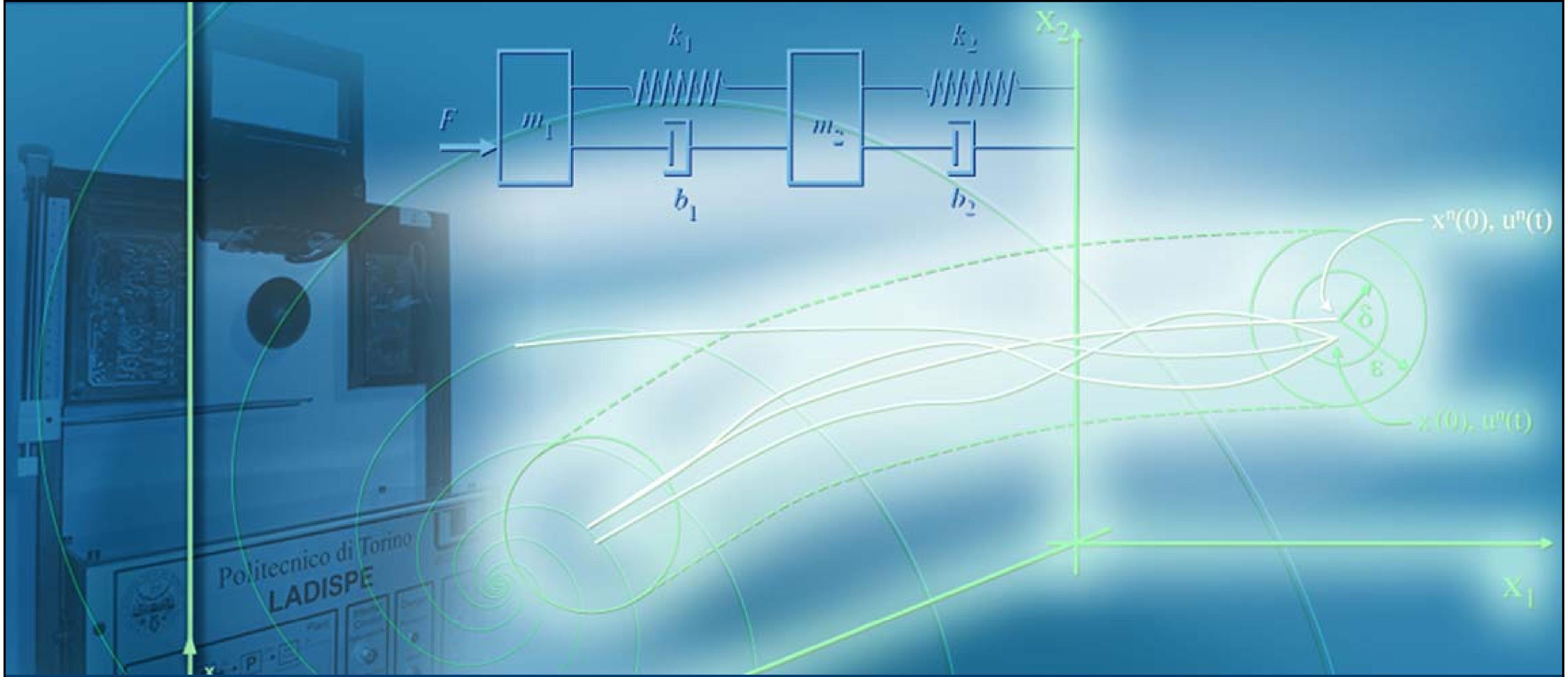
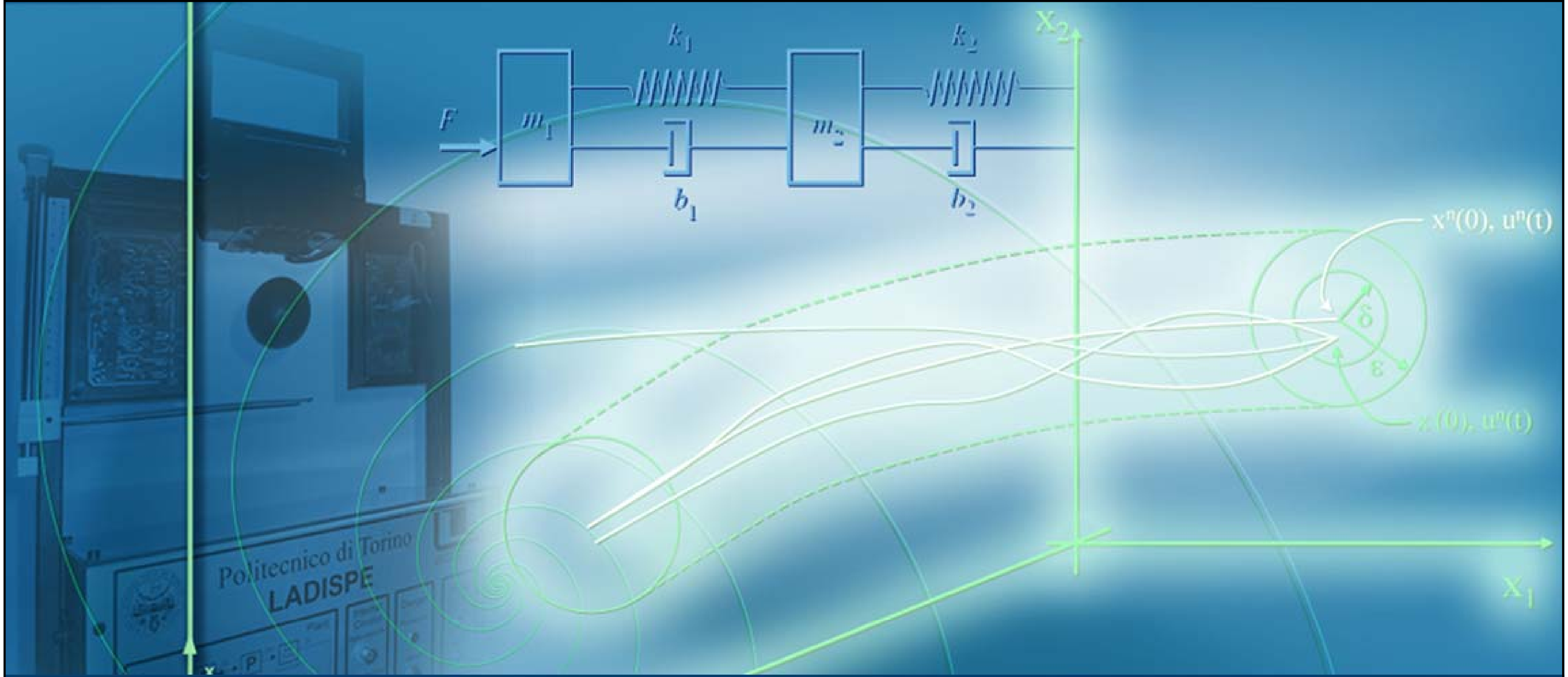


Proprietà strutturali e leggi di controllo

Osservabilità e rilevabilità

Osservabilità e rilevabilità

- Definizioni ed esempi introduttivi
- Analisi dell’osservabilità di sistemi dinamici LTI
- Esempi di studio dell’osservabilità
- Osservabilità e realizzazione
- Il principio di dualità



Osservabilità e rilevabilità

Definizioni ed esempi introduttivi

Introduzione

- Le proprietà di **osservabilità** e di **rilevabilità** descrivono le possibilità di stimare lo stato del sistema $x(\cdot)$ tramite la misura del movimento dell'uscita $y(\cdot)$ e dell'ingresso $u(\cdot)$
- La proprietà di **osservabilità** descrive la possibilità di stimare lo stato iniziale del sistema mediante la misura dell'uscita $y(\cdot)$ e dell'ingresso $u(\cdot)$ su un dato intervallo di tempo
- La proprietà di **rilevabilità** descrive la possibilità di stimare lo stato finale del sistema mediante la misura dell'uscita $y(\cdot)$ e dell'ingresso $u(\cdot)$ su un dato intervallo di tempo

Definizione di stato non osservabile

- Per studiare la proprietà di **osservabilità** è opportuno definire dapprima il concetto di stato **non osservabile**
- Uno stato $x^* \neq 0$ si dice **non osservabile** (nell'intervallo $[t_0, t^*]$) se, qualunque sia $t^* \in [t_0, \infty)$, detto $y_\ell(t)$ il movimento libero dell'uscita conseguente allo stato iniziale $x(t_0) = x^* \neq 0$, risulti:

$$\boxed{y_\ell(t) = 0, \forall t \in \left[t_0, t^*\right]}$$

- Senza perdere generalità, si può assumere: $t_0 = 0$

Lo spazio di non osservabilità

- L'insieme di tutti gli stati non osservabili (nell'intervallo $[t_0, t^*]$) è dato dall'**insieme di non osservabilità** $X_{NO}(t^*)$ al tempo t^*
- L'insieme $X_{NO}(t^*)$ costituisce un sottospazio lineare dello spazio di stato X
- Il **sottospazio di non osservabilità** X_{NO} è definito come l'insieme di non osservabilità $X_{NO}(t)$ di dimensione minima:

$$\boxed{X_{NO} = \min_{t \in [t_0, \infty)} X_{NO}(t)}$$

La completa osservabilità

- Si definisce **il sottospazio di osservabilità** X_O come il complemento ortogonale di X_{NO}:

$$\boxed{X_O = X_{NO}^{\perp}}$$

e quindi $X_O \cap X_{NO} = \varnothing, X_O + X_{NO} = X$

- Un sistema è **completamente osservabile** se

$$\boxed{X_O = X}$$

Definizione di stato non rilevabile

- Uno stato x^* si dice **non rilevabile** (nell'intervallo $[t_0,t^*]$) se, qualunque sia $t^* \in [t_0, \infty)$, detto $y_\ell(t)$ il movimento libero dell'uscita che ha come stato finale $x(t^*) = x^* \neq 0$, risulti:

$$\boxed{y_\ell(t) = 0, \forall t \in \left[t_0, t^*\right]}$$

- L'insieme di tutti gli stati non rilevabili (nell'intervallo $[t_0,t^*]$) è dato dall'**insieme di non rilevabilità** $X_{ND}(t^*)$ al tempo t^*

La completa rilevabilità

- Si definisce **il sottospazio di non rilevabilità** X_{ND} come l'insieme di non rilevabilità $X_{ND}(t)$ di dimensione minima:

$$\boxed{X_{ND} = \min_{t \in [t_0, \infty)} X_{ND}(t)}$$

- Si definisce **il sottospazio di rilevabilità** X_D come il complemento ortogonale di X_{ND}:

$$\boxed{X_D = X_{ND}^{\perp}}$$

- Un sistema è **completamente rilevabile** se

$$\boxed{X_D = X}$$

Relazioni tra osservabilità e rilevabilità

- Per i sistemi LTI TC si ha:

$$\boxed{X_O = X_D}$$

- Per i sistemi LTI TD si ha in generale:

$$\boxed{X_O \subseteq X_D}$$

  - Se la matrice *A* è non singolare

$$\boxed{X_O = X_D}$$

Studio dell'osservabilità

- Per i sistemi LTI si ha quindi in generale:

$$\boxed{X_O \subseteq X_D}$$

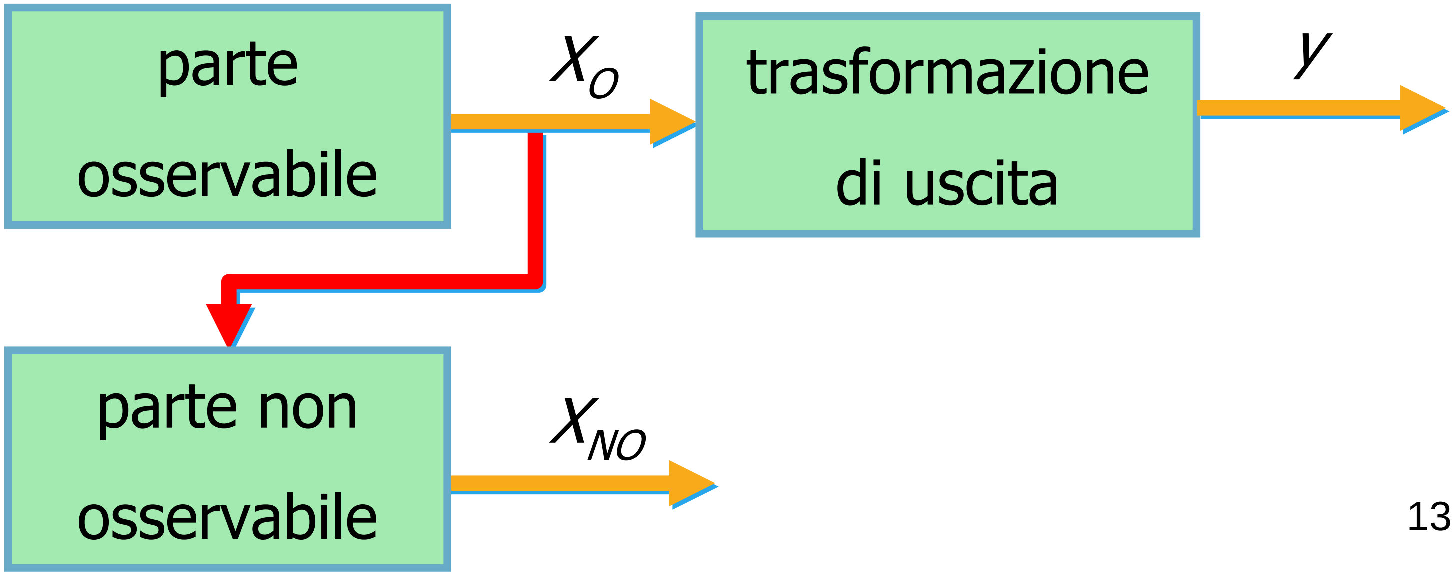
- Quindi, se un sistema LTI è completamente osservabile è anche completamente rilevabile
- Pertanto, si studieranno sempre le proprietà di osservabilità

Parte osservabile e non osservabile

- In un sistema LTI con dimensione finita n e non completamente osservabile sono stati definiti:
  - Il **sottospazio di osservabilità** X_O ($\dim(X_O) = o < n$) → **parte osservabile**
  - Il **sottospazio di non osservabilità** X_{NO} ($\dim(X_{NO}) = n - o$) → **parte non osservabile**
  - Al **sottospazio di osservabilità** sono associati $\boldsymbol{o}$ degli n autovalori della matrice A
  - Al **sottospazio di non osservabilità** sono associati $\boldsymbol{n - o}$ degli n autovalori della matrice A

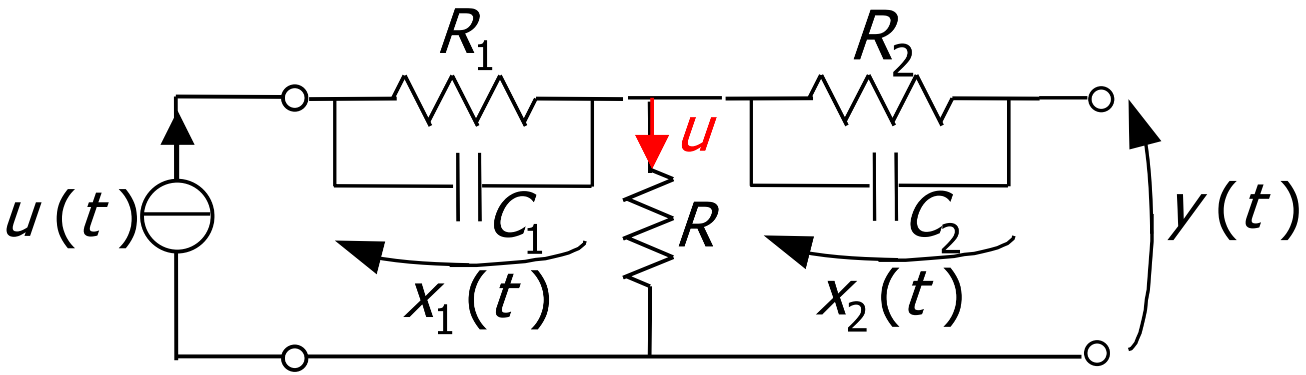
Parte osservabile e non osservabile

- L'uscita è influenzata dalla sola parte osservabile
- Gli stati osservabili possono influenzare la parte non osservabile, ma non il viceversa



Esempio introduttivo 1

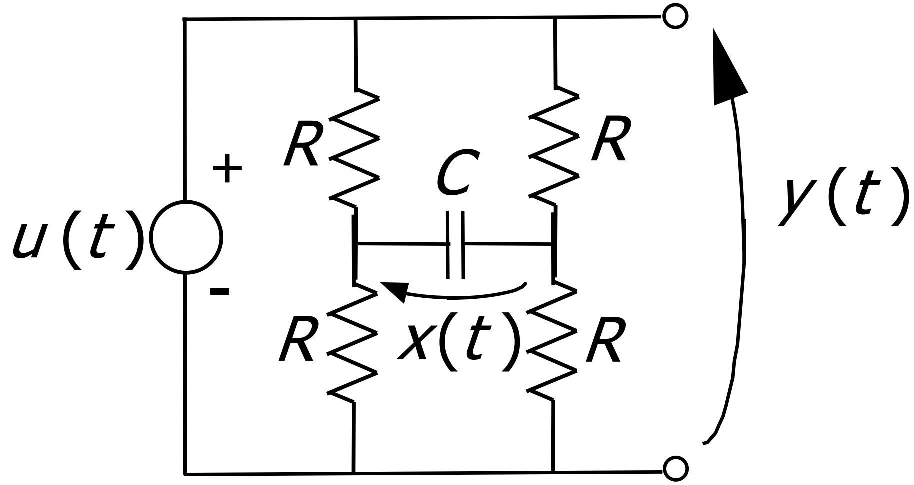
- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



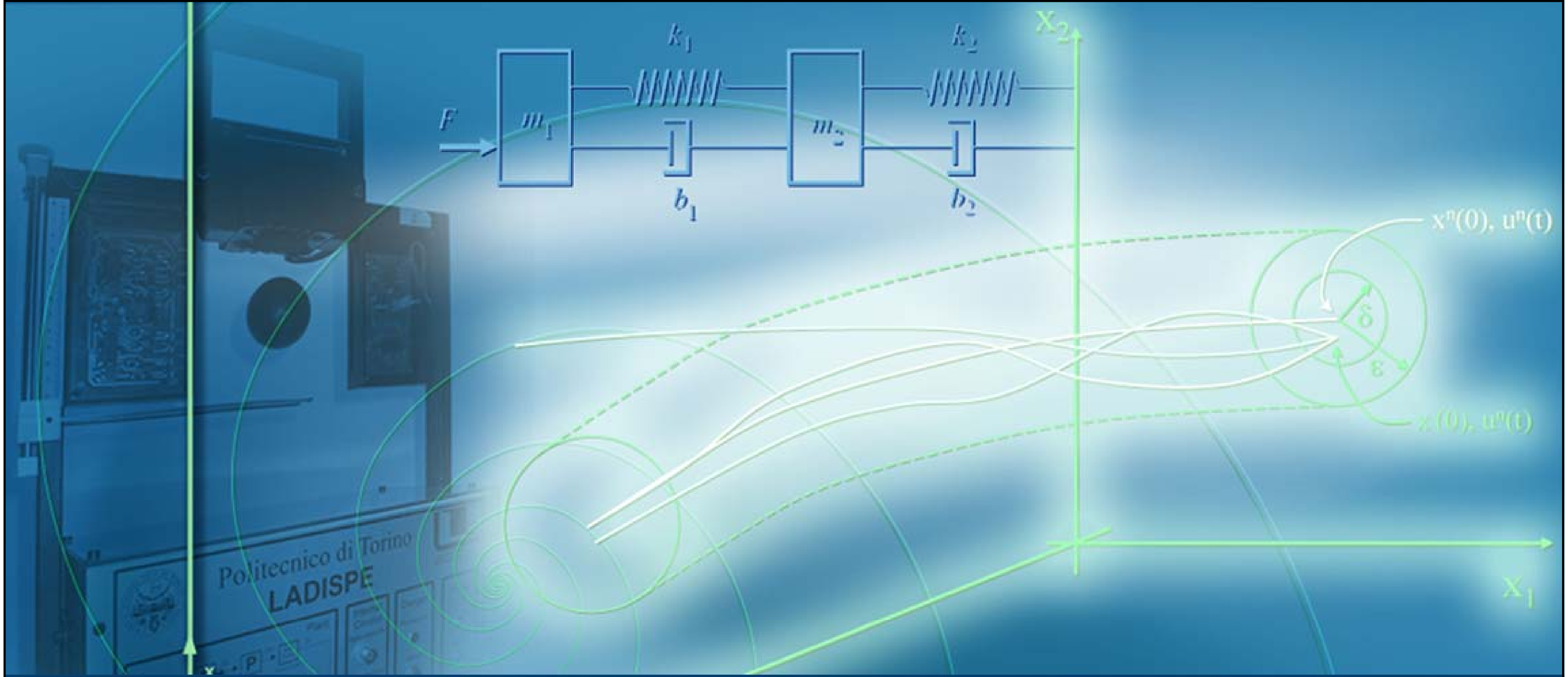
- Supponiamo $x_1(0) \neq 0$, $x_2(0) = 0$
- A causa del circuito aperto su $y(t)$, la corrente nella resistenza R è sempre pari all'ingresso $u(t)$ $\rightarrow$ $y(t) = R\,u(t),\ \forall\ t \geq 0$
- L'effetto di $x_1(0) \neq 0$ non compare su $y(t)$
- Lo stato $x_1(0)$ non è **osservabile** dall'uscita $y(t)$

Esempio introduttivo 2

- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



- Supponiamo $u(t) = 0\ \forall t,\ x(0) \neq 0$
  $y(t) = u(t) = 0,\ \forall\ t \geq 0$
  → $x(0) \neq 0$ non ha nessun effetto su $y(t)$
- Lo stato $x(0)$ non è **osservabile** dall'uscita $y(t)$



Osservabilità e rilevabilità

Analisi dell’osservabilità di sistemi dinamici LTI

Determinazione di X_O per sistemi LTI TD (1/7)

- Consideriamo un sistema dinamico LTI TD descritto dalle equazioni di ingresso – stato – uscita :

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)+Du(k) \end{aligned}}$$

- Vogliamo trovare:
  - L'insieme di non osservabilità $X_{NO}(\ell)$ al tempo ℓ
  - Il sottospazio di non osservabilità X_{NO}
  - Il sottospazio di osservabilità X_O
  - Una condizione necessaria e sufficiente per la completa osservabilità del sistema

Determinazione di X_o per sistemi LTI TD (2/7)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

- Consideriamo, per semplicità, il caso in cui:
  - Il sistema abbia una sola uscita ($q = 1 \rightarrow C \in \mathbb{R}^{1\times n}$)
  - L'ingresso sia nullo: $u(k) = 0, \forall k$
- Si ha:

$$\begin{aligned}
y(0) &= y_\ell(0) = C\,x(0) \\
y(1) &= y_\ell(1) = C\,x(1) = C\,Ax(0) \\
y(2) &= y_\ell(2) = C\,x(2) = C\,Ax(1) = CA^2\,x(0) \\
&\vdots \\
y(\ell) &= y_\ell(\ell) = C\,x(\ell) = C\,Ax(\ell-1) = \ldots = C\,A^\ell\,x(0)
\end{aligned}$$

Determinazione di X_o per sistemi LTI TD (3/7)

- Si può compattare l'espressione

$$\boxed{\begin{aligned} y(0) &= Cx(0) \\ y(1) &= CAx(0) \\ y(2) &= CA^2x(0) \\ &\vdots \\ y(\ell) &= CA^\ell x(0) \end{aligned}}$$

nella forma matriciale:

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(\ell) \end{bmatrix}}_{Y(\ell)} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^\ell \end{bmatrix}}_{M_o(\ell)} x(0) = M_o(\ell)x(0)}$$

Determinazione di X_o per sistemi LTI TD (4/7)

- La matrice

$$M_o(\ell) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\ell} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$$

rappresenta il legame tra la sequenza $[y(0), y(1), \ldots, y(\ell)]$ e lo stato iniziale $x(0)$

- L'**insieme di non osservabilità** $X_{NO}(\ell)$ al tempo ℓ corrisponde allo **spazio nullo** $\mathcal{N}(\cdot)$ della matrice $M_O(\ell)$, che è proprio l'insieme degli stati iniziali che danno risposta libera nulla

Determinazione di X_O per sistemi LTI TD (5/7)

$$X_{NO}(\ell) = \mathcal{N}\left(M_O(\ell)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\ell} \end{bmatrix}\right)$$

- La dimensione di $\mathcal{N}(M_O(\ell))$ è minima quando il rango di $M_O(\ell)$ è massimo e cioè quando: $\ell = n - 1$

Determinazione di X_O per sistemi LTI TD (6/7)

- Definendo la **matrice di osservabilità** M_O come la matrice $M_O(n-1)$

$$\boxed{M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$$

si ha → $\boxed{X_{NO} = \mathcal{N}\left(M_O\right)}$

- Quindi, essendo $X_O = X_{NO}^{\perp}$, come proprietà dell'algebra lineare, si ottiene:

$$\boxed{X_O = X_{NO}^{\perp} = \left(\mathcal{N}\left(M_O\right)\right)^{\perp} = \mathcal{R}\left(M_O^T\right)}$$

Determinazione di X_o per sistemi LTI TD (7/7)

- Pertanto, la dimensione del **sottospazio di osservabilità** X_O è pari al rango o della **matrice di osservabilità** M_O

$$\boxed{\dim(X_o) = \rho(M_o) = o}$$

- Un sistema dinamico LTI TD è quindi **completamente osservabile** (e anche rilevabile) se e soltanto se il rango della **matrice di osservabilità** M_O è pari alla dimensione n del sistema:

$$\boxed{\rho(M_o) = n}$$

Generalizzazione

- Il risultato appena enunciato vale anche:
  - Nel caso di sistemi dinamici LTI TC del tipo

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}}$$

    per cui la matrice di osservabilità M_O è definita allo stesso modo
  - Per i sistemi LTI TC e TD a più uscite ($q > 1$) nei quali la matrice M_O assume la forma più generale →

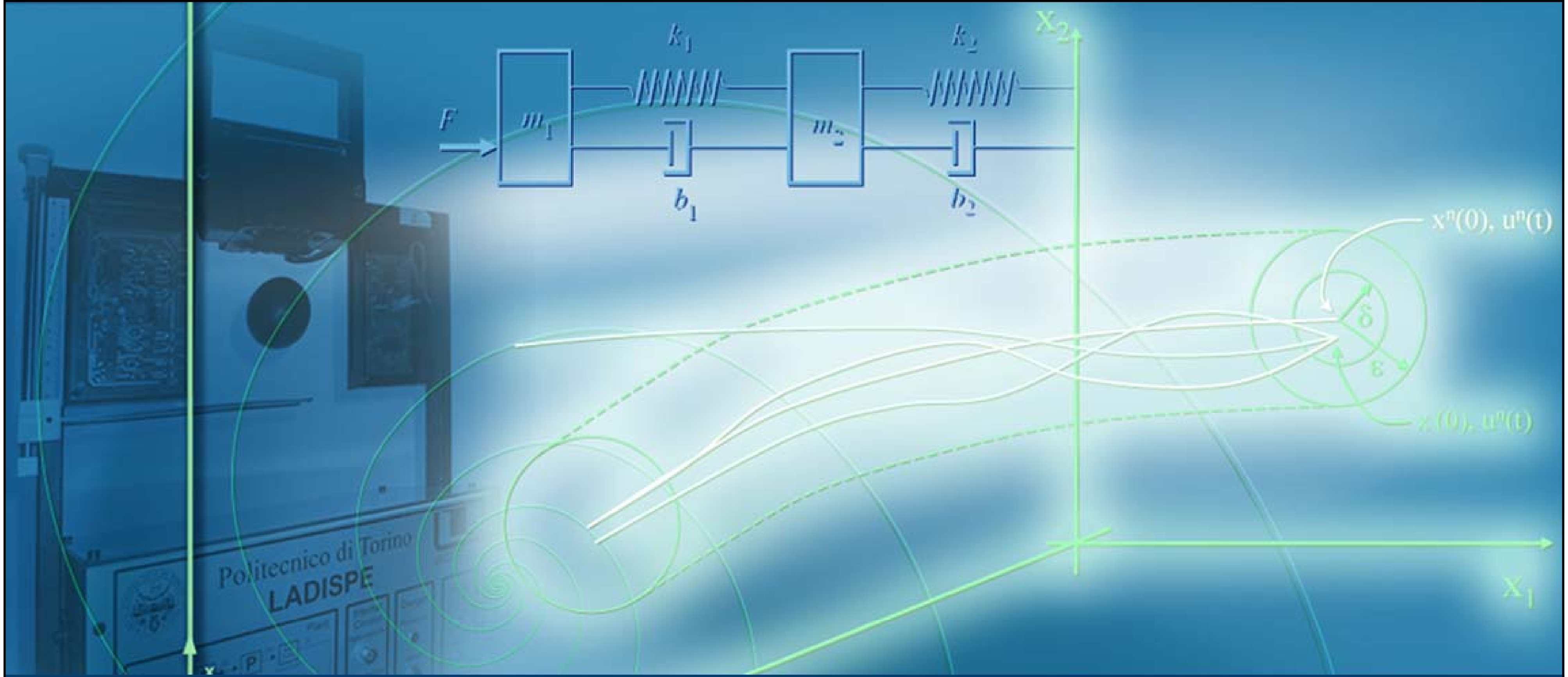
$$\boxed{M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-c} \end{bmatrix}, c = \rho(C)}$$

MatLab

- La matrice di osservabilità M_O di un sistema dinamico LTI può essere calcolata in MatLab mediante l'istruzione: `M_O = obsv(A,C)`
  - `A, C:` matrici della rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

- Il rango o della matrice di osservabilità può essere calcolato con l'istruzione: `o = rank(M_O)`
- Per maggiori dettagli sulle istruzioni, digitare `help obsv, help rank` al prompt di MatLab



Osservabilità e rilevabilità

Esempi di studio dell'osservabilità

Esempio 1: formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

- Studiarne le proprietà di osservabilità

Esempio 1: procedimento di soluzione

- Per analizzare le proprietà di osservabilità occorre:
  - Calcolare la matrice di osservabilità M_O a partire dalle matrici A e C delle equazioni di stato
  - Valutare il rango o di M_O e confrontarlo con la dimensione n del sistema; in particolare
    - Se $o = n$ allora il sistema risulta completamente osservabile
    - Se $o < n$ allora il sistema non è completamente osservabile

Esempio 1: calcolo di M_O

- Le matrici A e C del sistema dato sono:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

- Il sistema è a un'uscita $q = 1$ e di ordine $n = 3$
- La matrice di osservabilità è quindi del tipo:

$$M_O=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}$$

Esempio 1: procedura di calcolo di M_O

- Per calcolare M_O conviene procedere alla sua costruzione "per righe" come segue:
  - Si parte dalla riga C
  - Si calcola la seconda riga eseguendo il prodotto CA
  - Si calcola la terza riga CA^2 eseguendo il prodotto $(CA)A$

$$\boxed{M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}}$$

Esempio 1: calcolo di M_O (1/3)

- Nel primo passaggio riporto la matrice C come prima riga di M_O:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} C \\ CA \\ CA^2 \end{array}$$

Esempio 1: calcolo di M_O (2/3)

- Nel secondo passaggio costruisco la seconda riga di M_O con il prodotto righe per colonne CA :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} C \\ CA \\ CA^2 \end{array}$$

Esempio 1: calcolo di M_O (3/3)

- Nel terzo passaggio costruisco la terza riga di M_O con il prodotto righe per colonne CA^2 eseguito tramite il prodotto $(CA)A$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} C \\ CA \\ CA^2 \end{array} \end{array}$$

Esempio 1: analisi dell'osservabilità

- Si ottiene la matrice di osservabilità:

$$\boxed{M_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}}$$

- Poiché:

$$\boxed{\det(M_o) = 1 \neq 0}$$

- Si ha:

$$\boxed{\rho(M_o) = 3 = n}$$

- Il sistema risulta **completamente osservabile**

Esempio 2: formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TD:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

- Studiarne le proprietà di osservabilità

Esempio 2: procedimento di soluzione

- Per analizzare le proprietà di osservabilità occorre:
  - Calcolare la matrice di osservabilità M_O a partire dalle matrici A e C delle equazioni di stato
  - Valutare il rango o di M_O e confrontarlo con la dimensione n del sistema; in particolare
    - Se $o = n$ allora il sistema risulta completamente osservabile
    - Se $o < n$ allora il sistema non è completamente osservabile

Esempio 2: calcolo di M_O

- Le matrici A e C del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Il sistema è a un'uscita $q = 1$ e di ordine $n = 3$
- La matrice di osservabilità è quindi del tipo:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

Esempio 2: analisi dell'osservabilità (1/2)

- La matrice di osservabilità è:

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Si ha

$$\det(M_o) = 0 \Rightarrow \rho(M_o) < 3$$

- Notiamo che M_o ha una colonna nulla mentre le altre due sono linearmente indipendenti

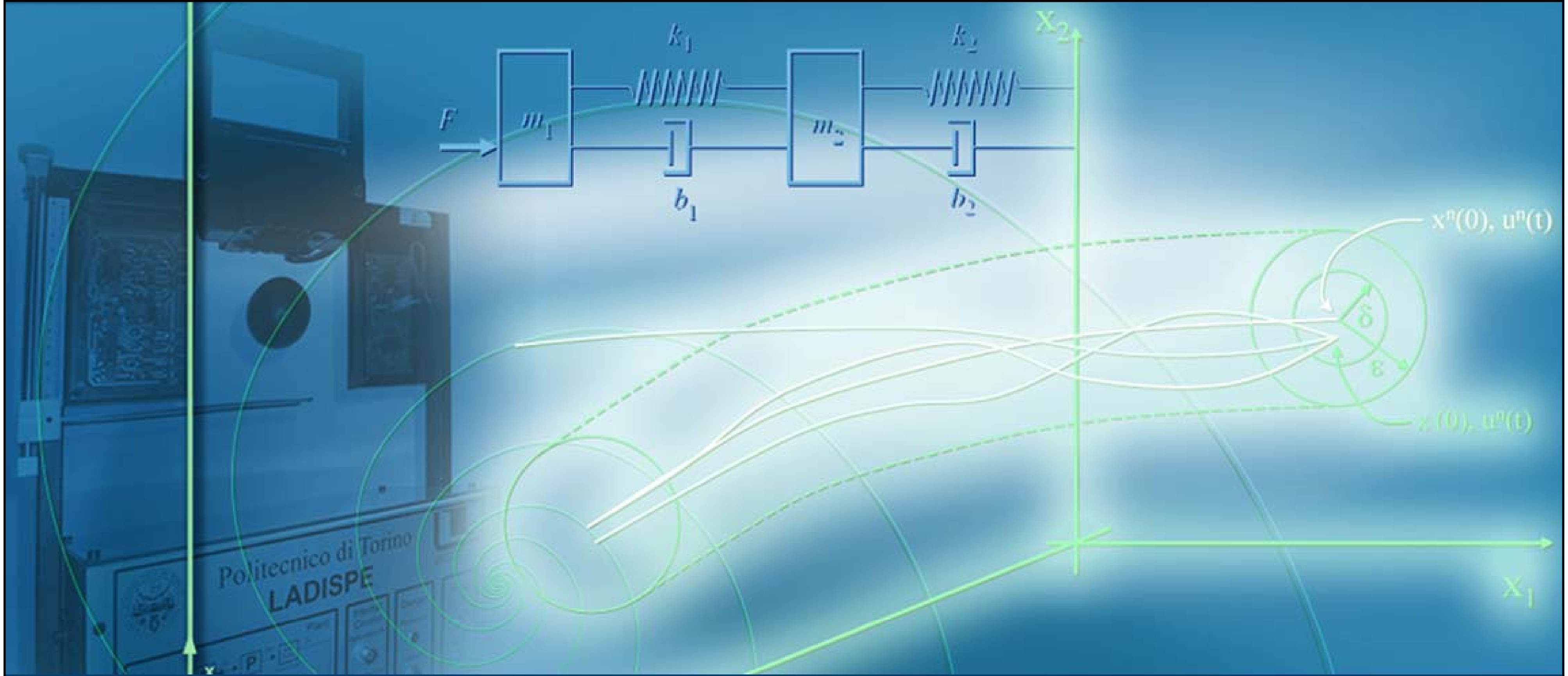
$$\rho(M_o) = 2$$

Esempio 2: analisi dell'osservabilità (2/2)

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \rho(M_o) = 2$$

- Il sistema risulta **non completamente osservabile**
- Inoltre:

$$\dim(X_o) = \rho(M_o) = 2$$



Osservabilità e rilevabilità

Osservabilità e realizzazione

Richiami sul problema della realizzazione

- Ricordiamo che la determinazione di una rappresentazione in variabili di stato a partire dalla funzione di trasferimento di un sistema dinamico SISO LTI va sotto il nome di problema della **realizzazione**
- La soluzione del problema della realizzazione non è unica
- In precedenza è stata introdotta una possibile soluzione tramite la **forma canonica di raggiungibilità**
- Studieremo ora un'altra possibile soluzione

Richiami sul problema della realizzazione

- Ricordiamo che, nel caso in cui la funzione di trasferimento $H(s)$ non sia strettamente propria (cioè $m = n$), prima di procedere alla **realizzazione** occorre compiere la divisione (polinomiale) tra il numeratore e il denominatore:

$$\boxed{\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} = \\ &= \frac{b'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b'_1 s + b'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a'_1 s + a'_0} + b'_n \end{aligned}}$$

La forma canonica di osservabilità

- Data la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{b'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b'_1 s + b'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a'_1 s + a'_0} + b'_n$$

la **forma canonica di osservabilità**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a'_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & -a'_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} b'_n \end{bmatrix}$$

costituisce una sua possibile **realizzazione**

Forma canonica di osservabilità: proprietà

- Nella **forma canonica di osservabilità**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a'_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & -a'_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_{n-1} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b'_n \end{bmatrix}$$

  - La matrice A è in forma compagna destra → il polinomio caratteristico è: $\lambda^n + \ldots + a'_1\lambda + a'_0$
  - Il sistema dinamico individuato dalle matrici *A, B, C, D* è sempre completamente osservabile
- Il medesimo procedimento si applica a sistemi TD

Esempio: formulazione del problema

- Data la seguente funzione di trasferimento:

$$\boxed{H(z) = \frac{z+0.1}{z^2-0.5z+0.06}}$$

- Determinarne la realizzazione secondo la forma canonica di osservabilità

Esempio: realizzazione

- La funzione di trasferimento data è di ordine $n = 2$:

$$H(z) = \frac{z + 0.1}{z^2 - 0.5z + 0.06} = \frac{b_1' z + b_0'}{z^2 + a_1' z + a_0'} + b_2'$$

- La sua realizzazione secondo la forma canonica di osservabilità è quindi della forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_0' \\ 1 & -a_1' \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_0' \\ b_1' \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_2' \end{bmatrix}$$

Esempio: calcolo della realizzazione (1/2)

$$H(z) = \frac{z + 0.1}{z^2 - 0.5z + 0.06} = \frac{b_1' z + b_0'}{z^2 + a_1' z + a_0'} + b_2'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_0' \\ b_1' \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_2' \end{bmatrix}$$

$$a_1' = -0.5$$

$$a_0' = 0.06$$

Esempio: calcolo della realizzazione (2/2)

$$H(z) = \frac{z + 0.1}{z^2 - 0.5z + 0.06} = \frac{b_1' z + b_0'}{z^2 + a_1' z + a_0'} + b_2'$$

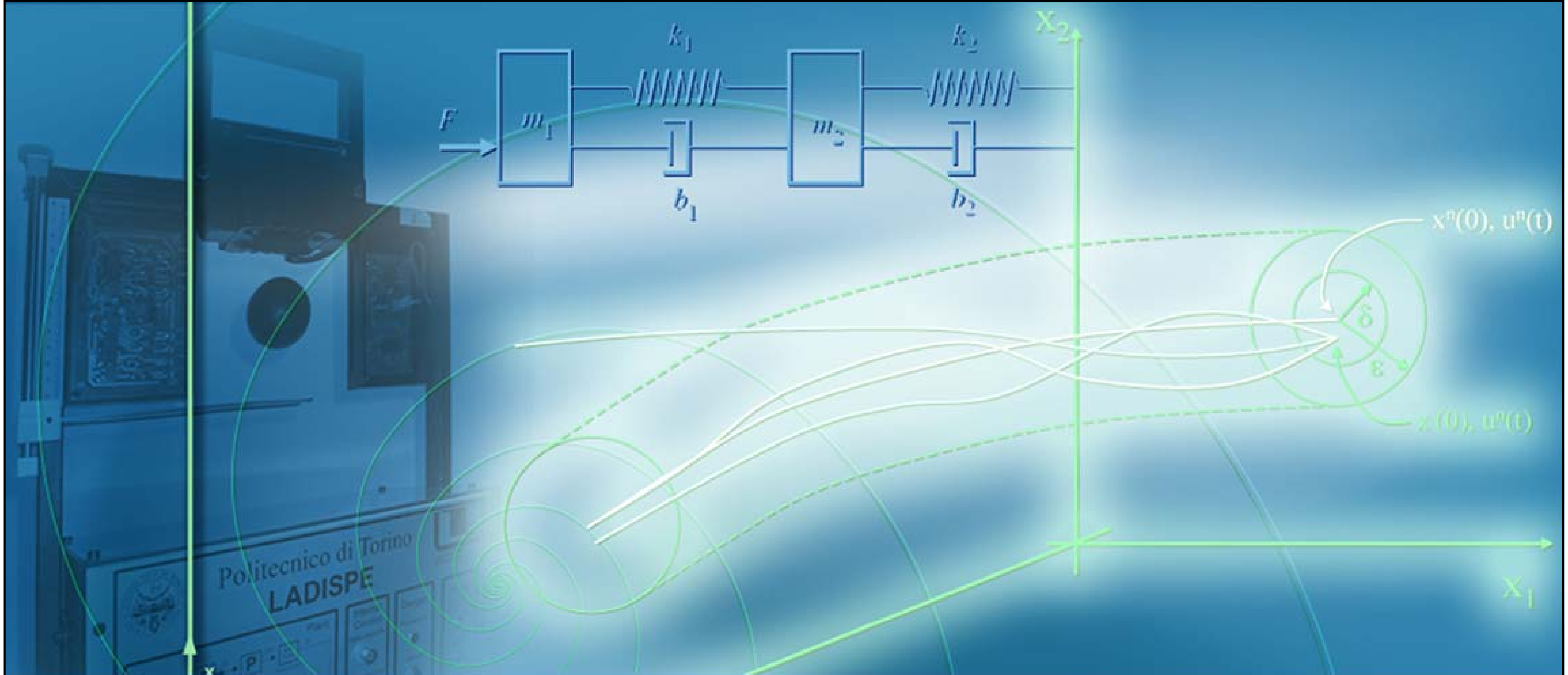
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$b_1' = 1$ $\quad$ $b_0' = 0.1$ $\quad$ $b_2' = 0$

Esempio: risultato

- La realizzazione secondo la forma canonica di osservabilità della funzione di trasferimento data è quindi:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & -0.06\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.1\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$
$$y(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(k)$$



Osservabilità e rilevabilità

Il principio di dualità

Introduzione

- Lo studio delle proprietà di **raggiungibilità** e di **osservabilità** svolto sino ad ora permette di mettere in evidenza una stretta analogia tra queste due proprietà
- Tale analogia va sotto il nome di **principio di dualità**
- Per definire il **principio di dualità** occorre definire il concetto di **sistema duale** di un sistema dinamico LTI

Il sistema duale

- Si consideri il sistema LTI TC (**sistema primale**) → $S^P(A,B,C,D)$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}, x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^p, y(t) \in \mathbb{R}^q$$

- Operando la sostituzione

$$A \leftrightarrow A^T, B \leftrightarrow C^T, C \leftrightarrow B^T, D \leftrightarrow D^T$$

si ottiene il **sistema duale** $S^D(A^T,C^T,B^T,D^T)$ definito come il sistema dinamico LTI TC:

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= A^T w(t) + C^T v(t)\\ z(t) &= B^T w(t) + D^T v(t)\end{aligned}, w(t) \in \mathbb{R}^n, v(t) \in \mathbb{R}^q, z(t) \in \mathbb{R}^p$$

Sistema duale e spazi X_R e X_O

- Consideriamo il **sottospazio di raggiungibilità** X_R^P del sistema **primale** $S^P(A,B,C,D)$ definito come:

$$\boxed{X_R^P = \mathcal{R}\left(M_R^P\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right)}$$

- Applichiamo quindi la definizione del **sottospazio di osservabilità** X_O

$$\boxed{X_O = \mathcal{R}\left(M_O^T\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}\right)}$$

al sistema **duale** $S^D(A^T,C^T,B^T,D^T)\rightarrow A^T\leftrightarrow A,\ C^T\leftrightarrow B$

$$\boxed{X_O^D = \mathcal{R}\left(\left(M_O^D\right)^T\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = X_R^P}$$

Il principio di dualità

- Possiamo quindi concludere che:
  Il sottospazio di raggiungibilità X_R^P del sistema **primale** $S^P(A,B,C,D)$ coincide con il sottospazio di osservabilità X_O^D del sistema **duale** $S^D(A^T,C^T,B^T,D^T)$

$$\boxed{X_R^P = X_O^D}$$

- In modo analogo si può dimostrare che:
  Il sottospazio di osservabilità X_O^P del sistema **primale** $S^P(A,B,C,D)$ coincide con il sottospazio di raggiungibilità X_R^D del sistema **duale** $S^D(A^T,C^T,B^T,D^T)$

$$\boxed{X_O^P = X_R^D}$$

Il principio di dualità: enunciato

- Possiamo quindi enunciare il **Principio di dualità**

Il sistema **primale** $S^P(A,B,C,D)$ è completamente raggiungibile (osservabile) se e soltanto se il sistema **duale** $S^D(A^T,C^T,B^T,D^T)$ è completamente osservabile (raggiungibile)

Schema riassuntivo

- Il principio di dualità può essere schematicamente riassunto:

Sistema primale $S^P(A,B,C,D)$		Sistema duale $S^D(A^T,C^T,B^T,D^T)$
(A,B) raggiungibile	$\Leftrightarrow$	(A^T,B^T) osservabile
(A,C) osservabile	$\Leftrightarrow$	(A^T,C^T) raggiungibile

Osservazione finale

- Grazie al principio è possibile trattare problematiche legate all’osservabilità (raggiungibilità) con tecniche simili (duali) viste per la raggiungibilità (osservabilità)

Esempio: formulazione del problema

- Dato il seguente sistema dinamico LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

- Studiarne le caratteristiche di osservabilità applicando il principio di dualità e non il metodo diretto visto negli Esempi 1 e 2 visti in questa lezione

Esempio: procedimento di soluzione

- Per lo studio della proprietà di osservabilità tramite il principio di dualità ricordiamo che:
  "Il sistema **primale** $S^P(A,B,C,D)$ è completamente osservabile se e soltanto se il sistema **duale** $S^D(A^T,C^T,B^T,D^T)$ è completamente raggiungibile"
- Possiamo quindi procedere come segue:
  - Determinazione del sistema duale
  - Studio della raggiungibilità del sistema duale

Esempio: determinazione del sistema duale

- A partire dal sistema primale:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

effettuando la sostituzione:

$$A \leftrightarrow A^T, B \leftrightarrow C^T, C \leftrightarrow B^T, D \leftrightarrow D^T$$

si ottiene il sistema duale

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= A^T w(t) + C^T v(t)\\ z(t) &= B^T w(t) + D^T v(t)\end{aligned}$$

Esempio: calcolo del sistema duale

- Poiché le matrici del sistema primale dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, D = 0$$

- Le matrici del sistema duale sono quindi:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, D^T = 0$$

Esempio: raggiungibilità del sistema duale

$$\dot{w}(t) = A^T w(t) + C^T v(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\Rightarrow w(t) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow n = 2$$

- Si può procedere utilizzando la seguente matrice di raggiungibilità del sistema duale:

$$M_R^D = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ n=2}}{=} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix}$$

- Con i dati del problema si ha:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow M_R^D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Esempio: conclusioni

$$\boxed{M_R^D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho\left(M_R^D\right) = 2 = n}$$

- Il sistema **duale** è **completamente raggiungibile** e quindi, per il principio di dualità, il **sistema di partenza** (sistema **primale**) risulta **completamente osservabile**

Esempio: nota finale

- Questo esempio ha solo lo scopo di illustrare, in un caso numerico, le reazioni tra sistema primale e sistema duale
- Lo studio dell'osservabilità condotto con l'applicazione del principio di dualità costituiva solo lo spunto per effettuare i calcoli
- È bene ricordare che **per lo studio delle proprietà di raggiungibilità ed osservabilità di sistemi LTI bisogna sempre seguire i metodi diretti** introdotti in questa e nella lezione precedente nei rispettivi Esempi 1 e 2