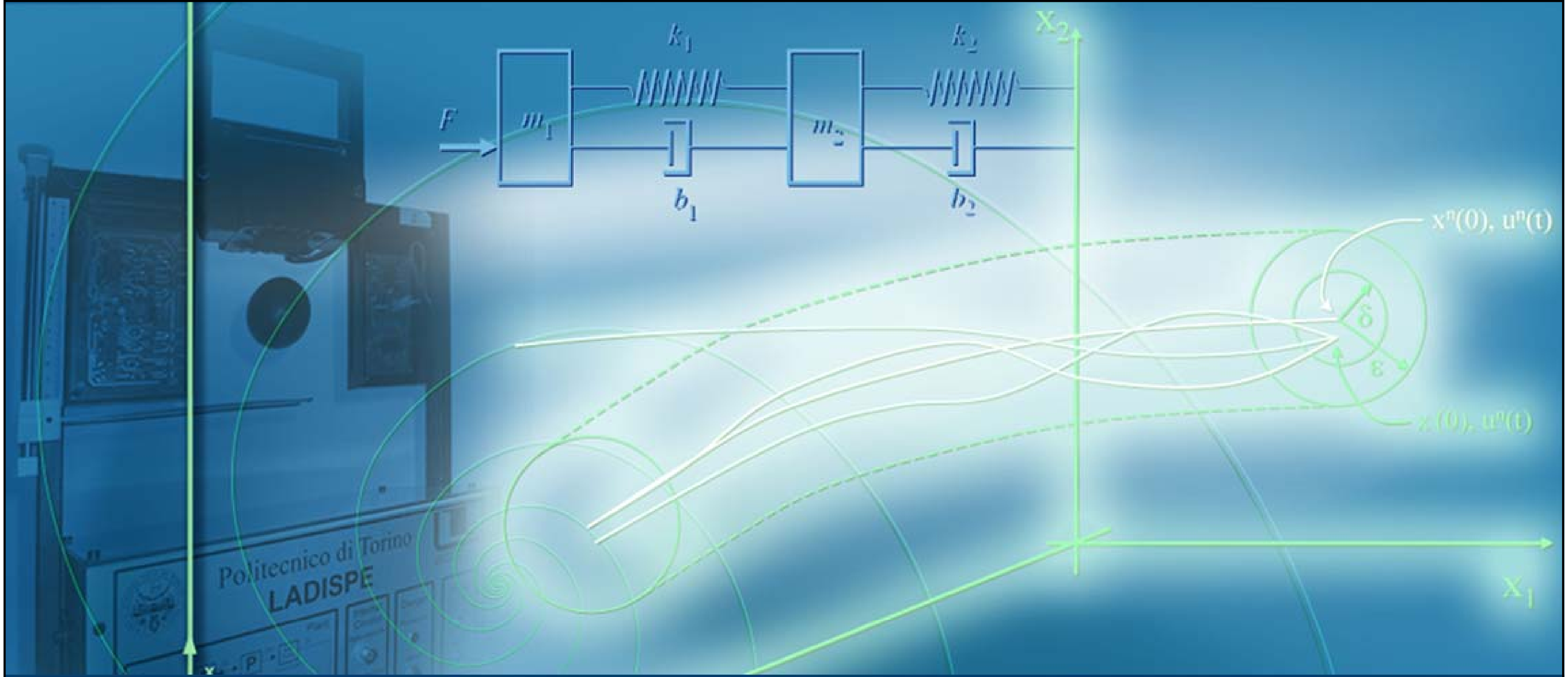
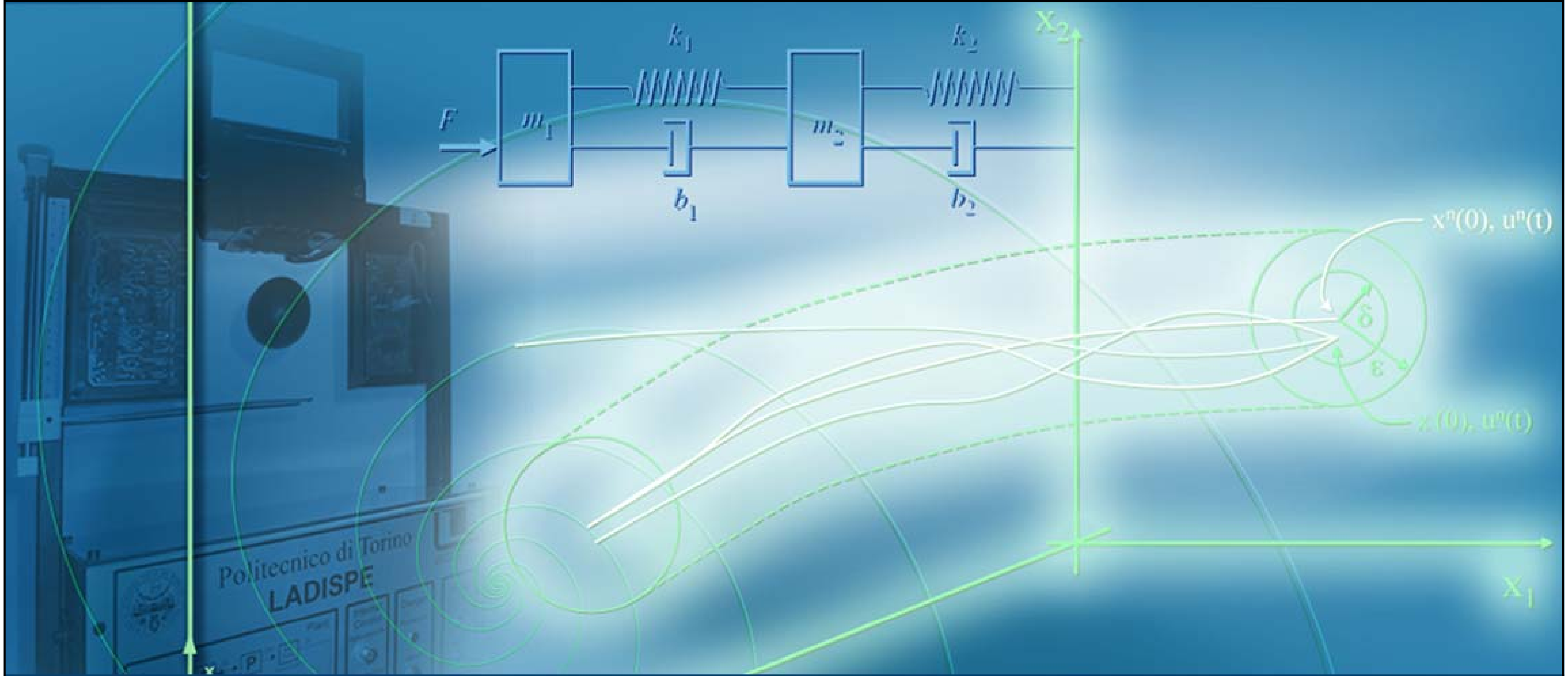


Introduzione e modellistica dei sistemi

Modellistica dei sistemi dinamici termici

Modellistica dei sistemi dinamici termici

- Elementi fondamentali
- Scrittura delle equazioni dinamiche
- Rappresentazione in variabili di stato
- Esempio di rappresentazione in variabili di stato

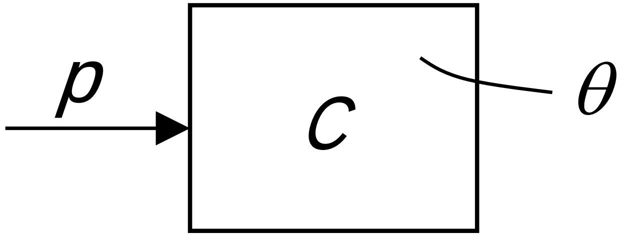


Modellistica dei sistemi dinamici termici

Elementi fondamentali

Corpo omogeneo ideale

- **Corpo omogeneo ideale** di capacità termica C



L'equazione dinamica della sua temperatura è:

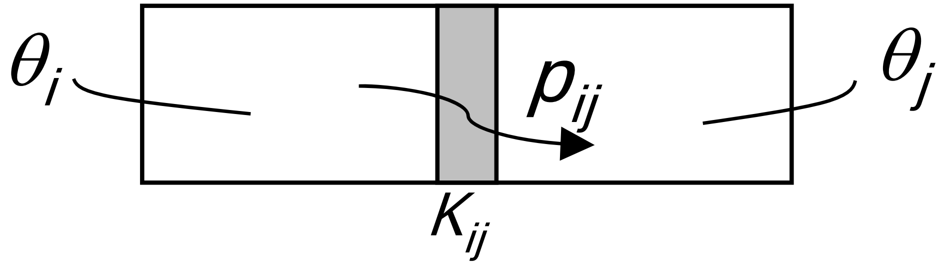
$$\boxed{C\frac{d\theta(t)}{dt} = p(t)}$$

  - C: capacità termica, proporzionale al calore specifico
  - θ: temperatura assoluta del corpo omogeneo
  - p: portata di calore (potenza termica) applicata

- Unità di misura: $[p]$ = W, $[\theta]$ = K, $[C]$ = J/K

Conduttore termico ideale

- **Conduttore termico ideale** di conduttanza term. K_{ij}

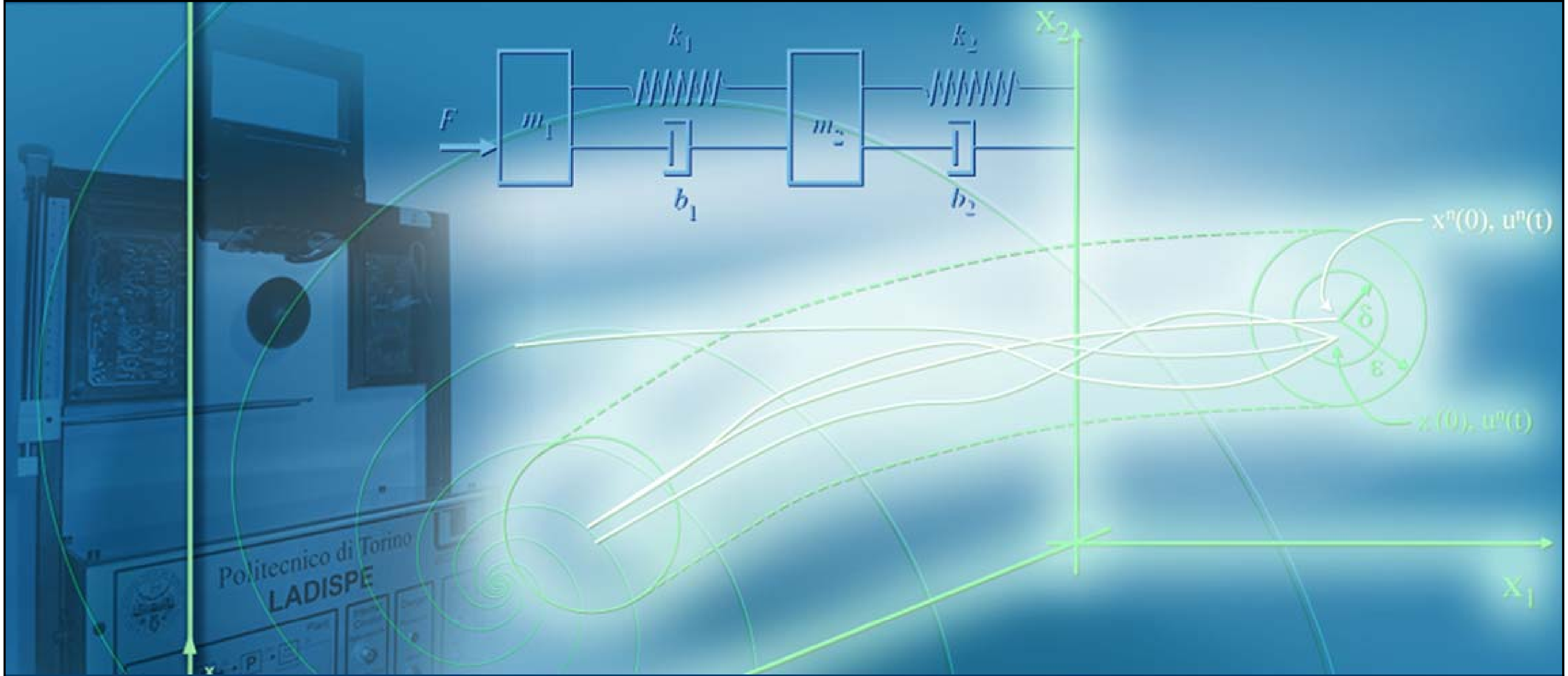


La portata di calore che fluisce dal corpo omogeneo con temperatura assoluta θ_i al corpo omogeneo con temperatura assoluta θ_j in contatto termico è pari a:

$$\boxed{p_{ij}(t) = K_{ij}\left[\theta_i(t) - \theta_j(t)\right]}$$

$\Rightarrow$ è proporzionale alla temperatura relativa dei due diversi corpi omogenei ideali in contatto termico

Unità di misura: $[p_{ij}] = \mathrm{W}$, $[\theta_i] = [\theta_j] = \mathrm{K}$, $[K_{ij}] = \mathrm{W/K}$



Modellistica dei sistemi dinamici termici

Scrittura delle equazioni dinamiche

Equazioni dinamiche di equilibrio termico

- Per ogni corpo omogeneo ideale non termostatato (la cui temperatura assoluta θ_i non è quindi imposta direttamente dall'esterno) di capacità termica C_i , vale la legge di equilibrio termico delle portate di calore:

$$\boxed{C_i \dot{\theta}_i(t) = \sum_k p_k^{est}(t) - \sum_j^{j \neq i} p_{ij}^{int}(t)}$$

  - Le **portate di calore esterne p_{ij}^{est}** tengono conto dell'azione del mondo esterno e compaiono con
    - Segno positivo se forniscono calore al corpo (nel caso di generatori di calore o per effetto Joule o combustione)
    - Segno negativo altrimenti (ad esempio, nel caso di refrigeratori o pompe di calore)

Equazioni dinamiche di equilibrio termico

- Per ogni corpo omogeneo ideale non termostatato (la cui temperatura assoluta θ_i non è quindi imposta direttamente dall'esterno) di capacità termica C_i , vale la legge di equilibrio termico delle portate di calore:

$$\boxed{C_i \dot{\theta}_i(t) = \sum_k p_k^{est}(t) - \sum_j^{j \neq i} p_{ij}^{int}(t)}$$

  - Le **portate di calore interne** $\boldsymbol{p_{ij}^{int}}$ tengono conto dell'interazione tra il corpo C_i e gli altri corpi C_j in contatto termico tramite conduttori termici ideali di conduttanza termica $K_{ij} \Rightarrow$

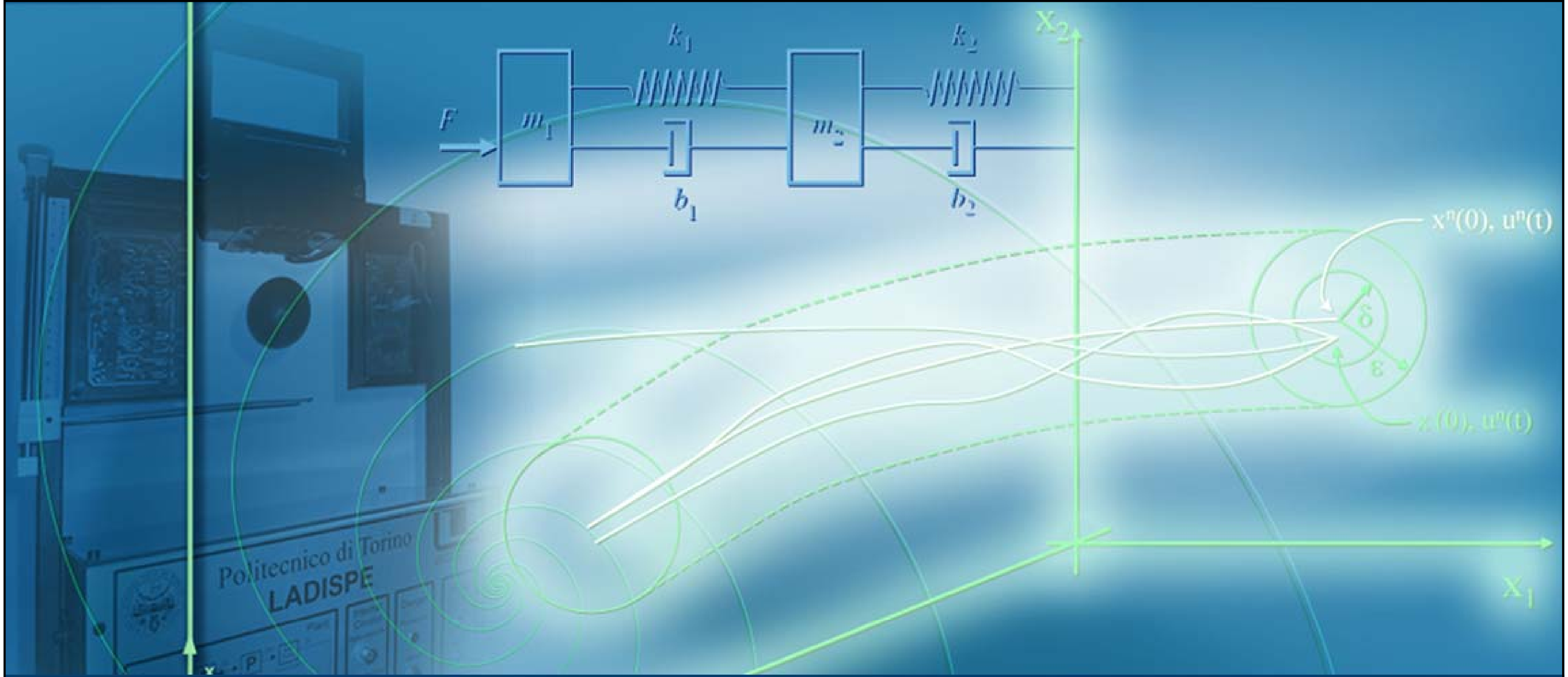
$$p_{ij}^{int}(t) = K_{ij}\left[\theta_i(t) - \theta_j(t)\right]$$

Interpretazione delle equazioni dinamiche

- Nell'equazione dinamica di equilibrio termico relativa al corpo omogeneo ideale di capacità termica C_i

$$\boxed{C_i \dot{\theta}_i(t) = \sum_k p_k^{est}(t) - \sum_j^{j \neq i} p_{ij}^{int}(t)}$$

  - Le portate esterne p_k^{est} forniscono o prelevano calore direttamente al corpo $C_i \Rightarrow$ incrementano o riducono il termine $C_i \dot{\theta}_i$, che è interpretabile come una portata termica d'inerzia
  - Le portate interne p_{ij}^{int} trasmettono invece il calore agli altri corpi C_j tramite conduttori termici $\Rightarrow$ riducono la portata termica d'inerzia di C_i



Modellistica dei sistemi dinamici termici

Rappresentazione in variabili di stato

Rappresentazione in variabili di stato (1/2)

- Si scrivono le **equazioni dinamiche** di equilibrio termico per ogni corpo omogeneo non termostatato, avente capacità termica C_i e temperatura assoluta θ_i
- S'introduce una **variabile di stato** x_i per ogni corpo omogeneo non termostatato di capacità termica C_i , scegliendo in particolare
  - La temperatura assoluta θ_i
- Si associa una **variabile di ingresso** u_j ad ogni:
  - Portata di calore esterna fornita al o prelevata dal sistema termico
  - Temperatura assoluta di corpo omogeneo ideale termostatato, in quanto imposta dal mondo esterno

Rappresentazione in variabili di stato (2/2)

- Si ricavano le **equazioni di stato** del tipo

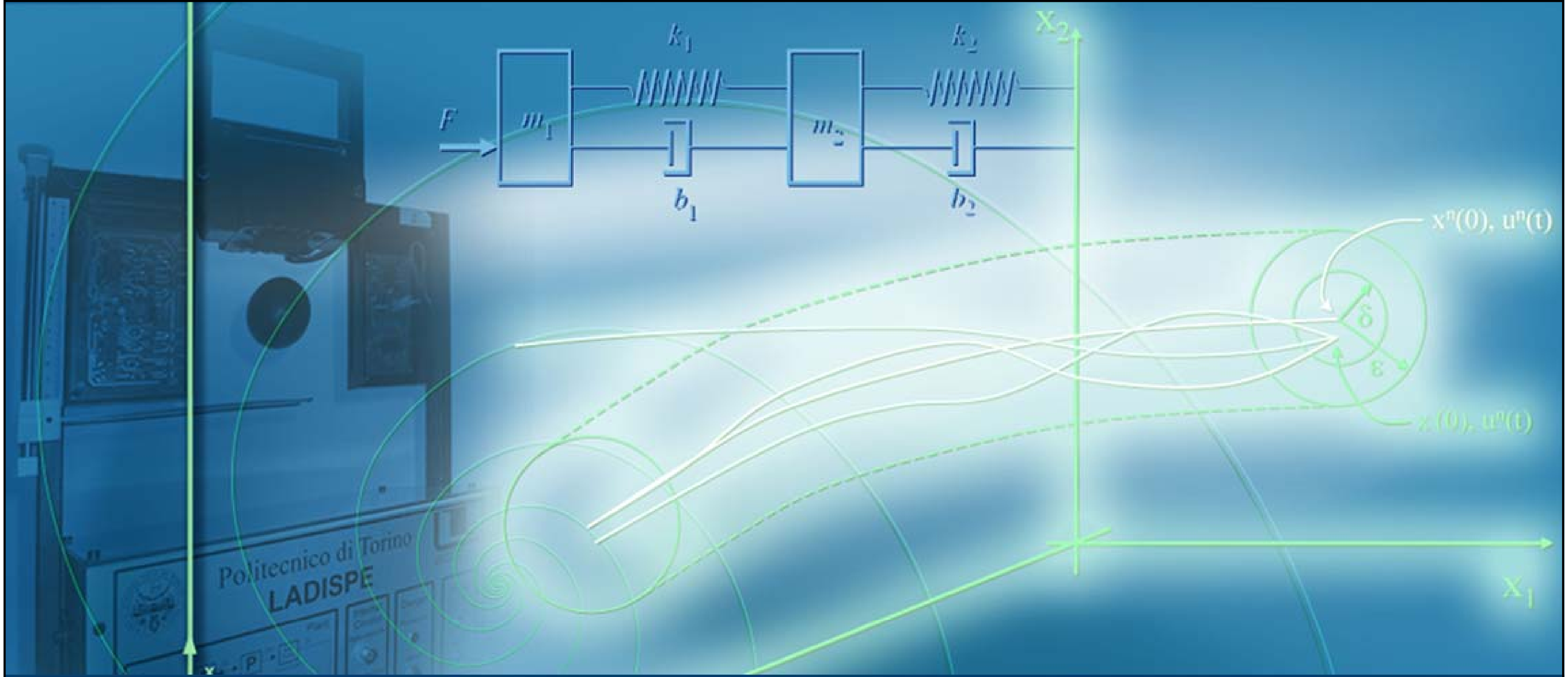
$$\boxed{\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i\left(t, x(t), u(t)\right)}$$

a partire dalle precedenti equazioni dinamiche di equilibrio termico, esprimendo $\dot{x}_i$ solo in funzione di variabili di stato e di ingresso

- Si ricavano le **equazioni di uscita** del tipo

$$\boxed{y_k(t) = g_k\left(t, x(t), u(t)\right)}$$

esprimendo ogni variabile di interesse y_k soltanto in funzione di variabili di stato e di ingresso

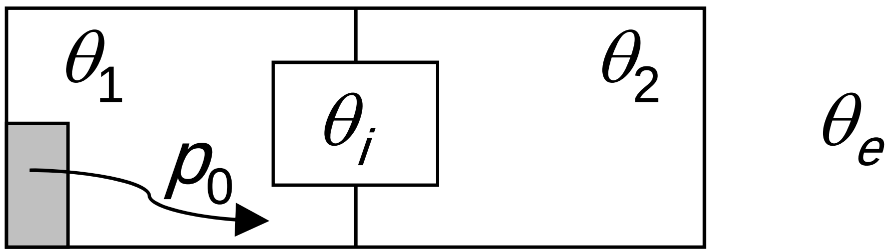


Modellistica dei sistemi dinamici termici

Esempio di rappresentazione
in variabili di stato

Esempio di rappresentazione (1/9)

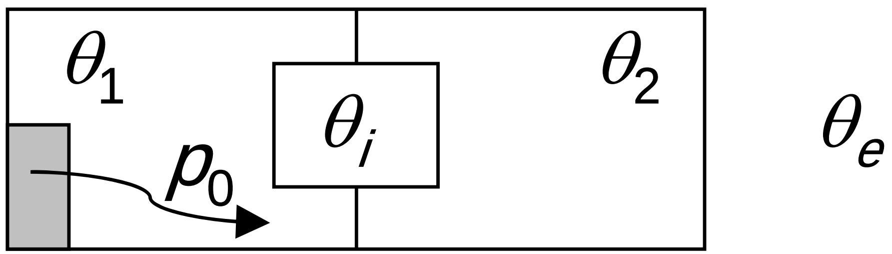
- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema termico, in cui
  θ_1, θ_2 : temperature dei due corpi non termostatati
  θ_e : temperatura (imposta) dell'ambiente esterno
  θ_i : temperatura del corpo termostatato interno
  p_0 : portata di calore immessa solo nel corpo 1
  Assumere θ_1 come variabile d'interesse



- Equazioni dinamiche di equilibrio termico:
  1) $C_1\dot{\theta}_1 = p_0 - \left[K_{1e}(\theta_1 - \theta_e) + K_{1i}(\theta_1 - \theta_i) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2)\right]$

Esempio di rappresentazione (2/9)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema termico, in cui
  θ_1, θ_2 : temperature dei due corpi non termostatati
  θ_e : temperatura (imposta) dell'ambiente esterno
  θ_i : temperatura del corpo termostatato interno
  p_0 : portata di calore immessa solo nel corpo 1
  Assumere θ_1 come variabile d'interesse

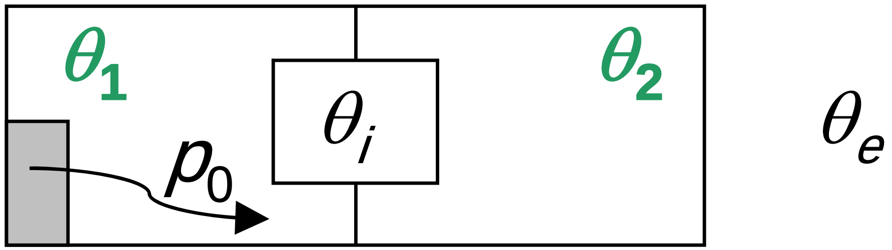


- Equazioni dinamiche di equilibrio termico:

2) $C_2\dot{\theta}_2 = 0 - \left[K_{2e}(\theta_2 - \theta_e) + K_{2i}(\theta_2 - \theta_i) + K_{12}(\theta_2 - \theta_1)\right]$

Esempio di rappresentazione (3/9)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema termico, in cui
  θ_1, θ_2 : temperature dei due corpi non termostatati
  θ_e : temperatura (imposta) dell'ambiente esterno
  θ_i : temperatura del corpo termostatato interno
  p_0 : portata di calore immessa solo nel corpo 1
  Assumere θ_1 come variabile d'interesse

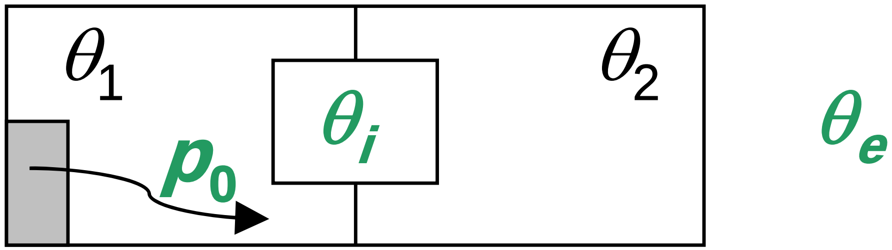


- Variabili di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Esempio di rappresentazione (4/9)

- Ricavare la rappresentazione in variabili di stato del seguente sistema termico, in cui
  θ_1, θ_2 : temperature dei due corpi non termostatati
  θ_e : temperatura (imposta) dell'ambiente esterno
  θ_i : temperatura del corpo termostatato interno
  p_0 : portata di calore immessa solo nel corpo 1
  Assumere θ_1 come variabile d'interesse



- Variabili di ingresso:

$$u(t) = \begin{bmatrix} p_0(t) \\ \theta_e(t) \\ \theta_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

Esempio di rappresentazione (5/9)

- Equazioni dinamiche di equilibrio termico:
  1) $C_1\dot{\theta}_1 = p_0 - \left[K_{1e}(\theta_1 - \theta_e) + K_{1i}(\theta_1 - \theta_i) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2)\right]$
  2) $C_2\dot{\theta}_2 = 0 - \left[K_{2e}(\theta_2 - \theta_e) + K_{2i}(\theta_2 - \theta_i) + K_{12}(\theta_2 - \theta_1)\right]$
- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} p_0(t) \\ \theta_e(t) \\ \theta_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \dot{\theta}_1 = \frac{p_0}{C_1} - \frac{1}{C_1}\left[K_{1e}(\theta_1 - \theta_e) + K_{1i}(\theta_1 - \theta_i) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2)\right] =$$

$$= -\frac{K_{1e} + K_{1i} + K_{12}}{C_1}x_1 + \frac{K_{12}}{C_1}x_2 + \frac{1}{C_1}u_1 + \frac{K_{1e}}{C_1}u_2 + \frac{K_{1i}}{C_1}u_3 = f_1(t, x, u)$$

Esempio di rappresentazione (6/9)

- Equazioni dinamiche di equilibrio termico:

1) $C_1\dot{\theta}_1 = p_0 - \left[K_{1e}(\theta_1-\theta_e)+K_{1i}(\theta_1-\theta_i)+K_{12}(\theta_1-\theta_2)\right]$

2) $C_2\dot{\theta}_2 = 0 - \left[K_{2e}(\theta_2-\theta_e)+K_{2i}(\theta_2-\theta_i)+K_{12}(\theta_2-\theta_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix}p_0(t)\\ \theta_e(t)\\ \theta_i(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\end{bmatrix}$$

- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = \dot{\theta}_2 = -\frac{1}{C_2}\left[K_{2e}(\theta_2-\theta_e)+K_{2i}(\theta_2-\theta_i)+K_{12}(\theta_2-\theta_1)\right] =$$

$$= \frac{K_{12}}{C_2}x_1 - \frac{K_{2e}+K_{2i}+K_{12}}{C_2}x_2 + \frac{K_{2e}}{C_2}u_2 + \frac{K_{2i}}{C_2}u_3 = f_2(t,x,u)$$

Esempio di rappresentazione (7/9)

- Equazioni dinamiche di equilibrio termico:

  1) $C_1\dot{\theta}_1 = p_0 - \left[K_{1e}(\theta_1 - \theta_e) + K_{1i}(\theta_1 - \theta_i) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2)\right]$

  2) $C_2\dot{\theta}_2 = 0 - \left[K_{2e}(\theta_2 - \theta_e) + K_{2i}(\theta_2 - \theta_i) + K_{12}(\theta_2 - \theta_1)\right]$

- Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} p_0(t) \\ \theta_e(t) \\ \theta_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

- Equazione di uscita:

$$y = \theta_1 = x_1 = g(t, x, u)$$

Esempio di rappresentazione (8/9)

- Equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{K_{1e}+K_{1i}+K_{12}}{C_1}x_1 + \dfrac{K_{12}}{C_1}x_2 + \dfrac{1}{C_1}u_1 + \dfrac{K_{1e}}{C_1}u_2 + \dfrac{K_{1i}}{C_1}u_3 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{K_{12}}{C_2}x_1 - \dfrac{K_{2e}+K_{2i}+K_{12}}{C_2}x_2 + \dfrac{K_{2e}}{C_2}u_2 + \dfrac{K_{2i}}{C_2}u_3 \end{cases}$$

- Equazione di uscita:

$$y = x_1$$

- Il sistema è dinamico, a tempo continuo, a dimensione finita (n=2), MIMO (p=3, q=1), proprio

Esempio di rappresentazione (9/9)

- Se $C_1, C_2, K_{1e}, K_{2e}, K_{1i}, K_{2i}$ e K_{12} sono costanti $\Rightarrow$ il sistema è anche LTI con rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{K_{1e} + K_{1i} + K_{12}}{C_1} & \dfrac{K_{12}}{C_1} \\ \dfrac{K_{12}}{C_2} & -\dfrac{K_{2e} + K_{2i} + K_{12}}{C_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} & \dfrac{K_{1e}}{C_1} & \dfrac{K_{1i}}{C_1} \\ 0 & \dfrac{K_{2e}}{C_2} & \dfrac{K_{2i}}{C_2} \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0], D = [0 \quad 0 \quad 0]$$