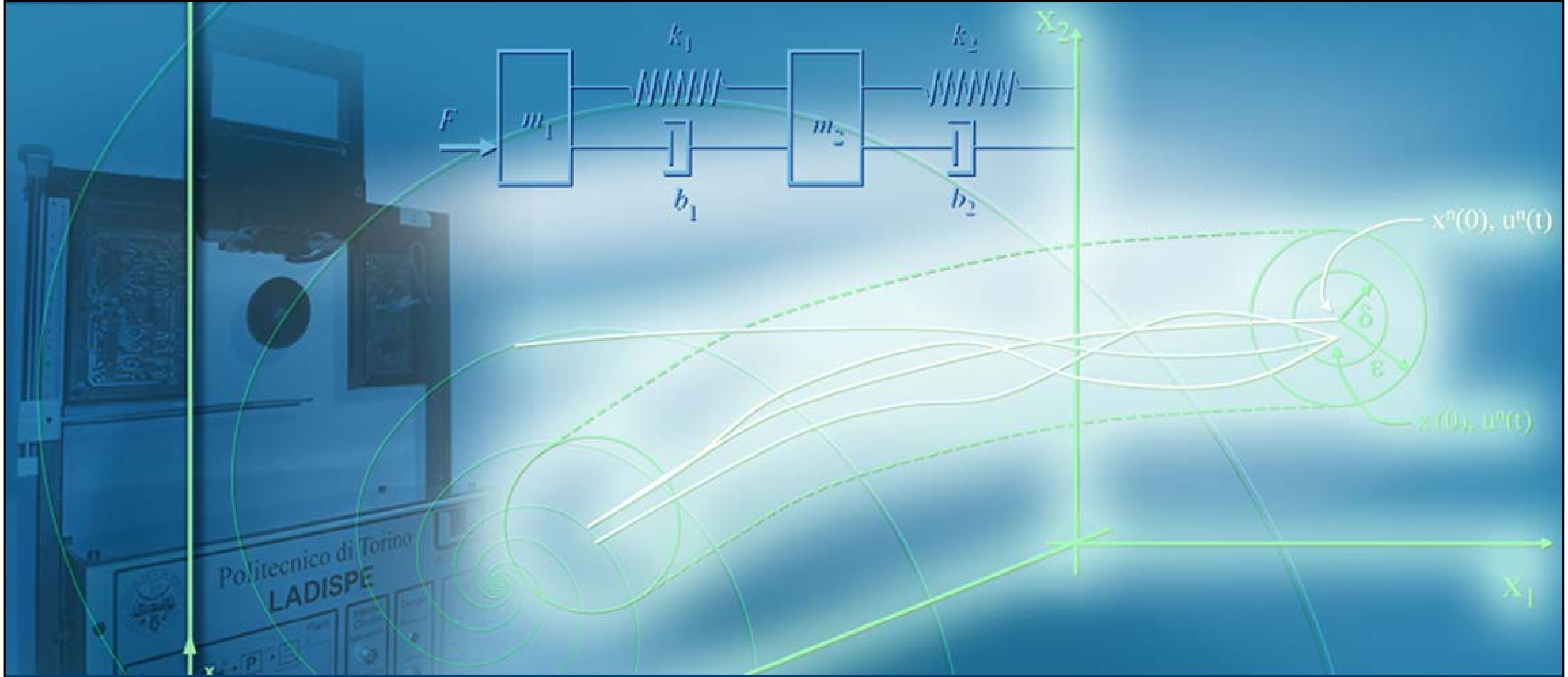
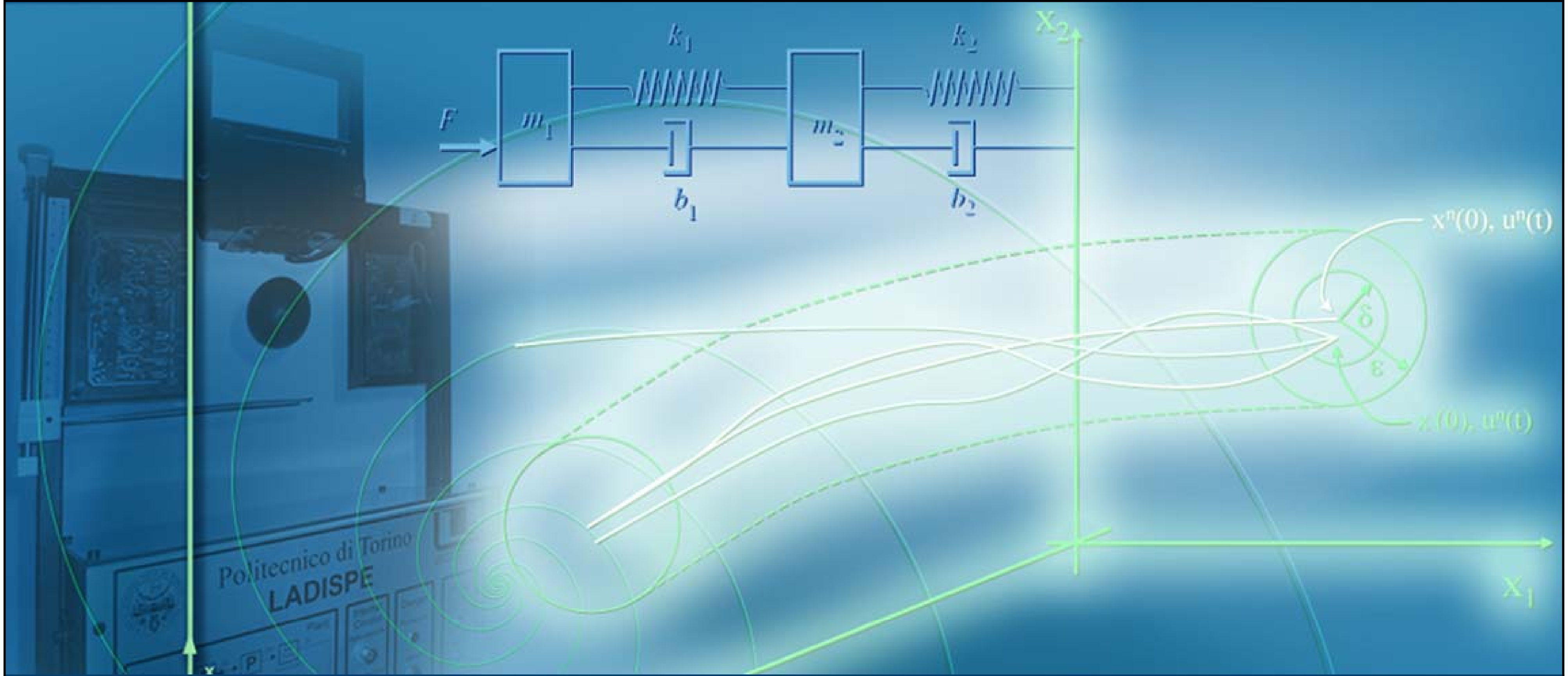


Equilibrio e stabilità di sistemi dinamici

Linearizzazione di sistemi dinamici

Linearizzazione di sistemi dinamici

- Linearizzazione di una funzione reale
- Linearizzazione di un sistema dinamico
- Esempi di linearizzazione di sistemi dinamici



Linearizzazione di sistemi dinamici

Linearizzazione di una funzione reale

Linearizzazione di una funzione reale (1/2)

- Una funzione $f(x):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ può essere sviluppata in serie di Taylor in un intorno di ampiezza $\delta x = x - x_0$ di un qualsiasi valore x_0 della variabile reale x come:

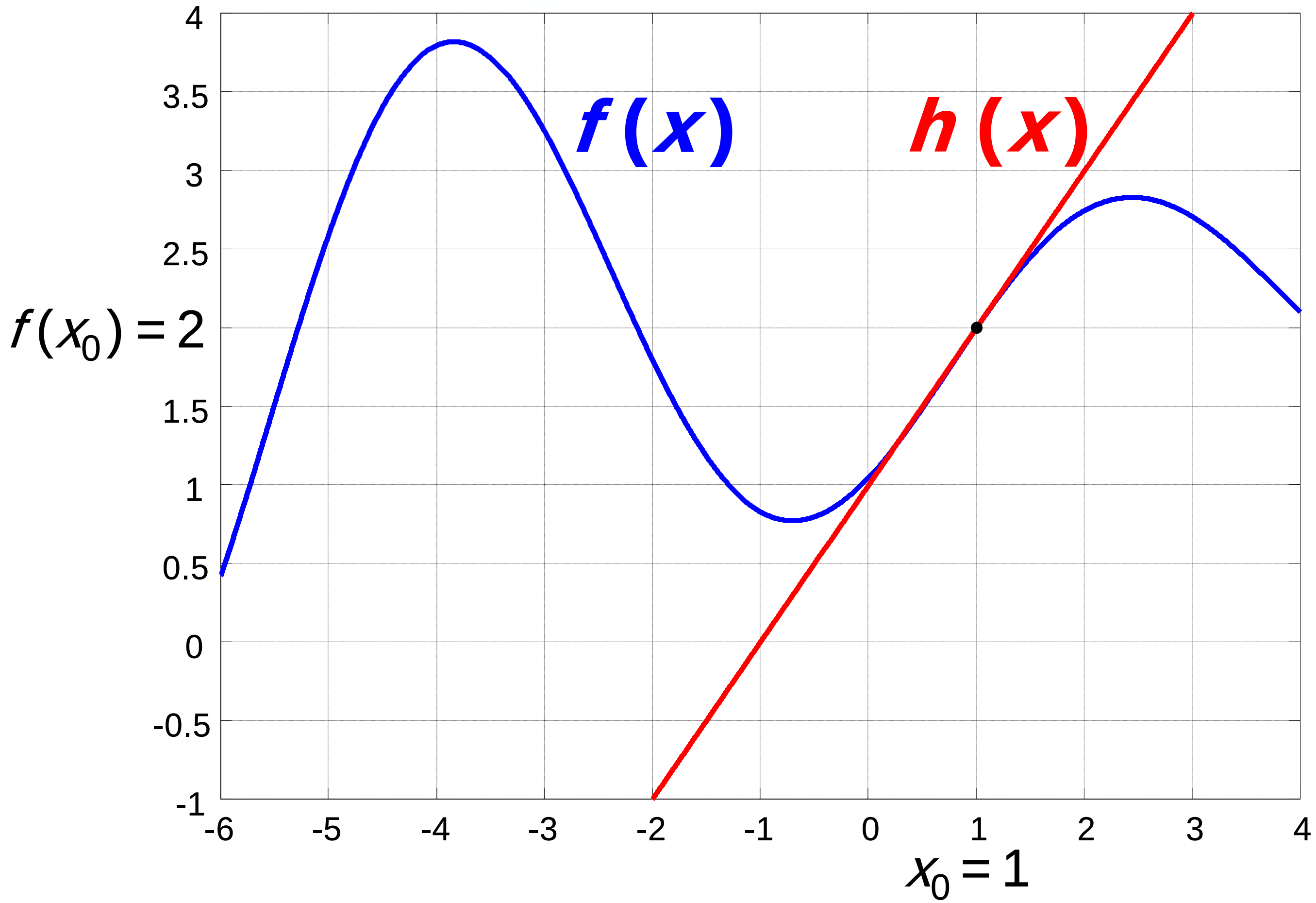
$$f(x) = f(x_0 + \delta x) =$$

$$= f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \delta x + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} \delta x^2 + \ldots$$

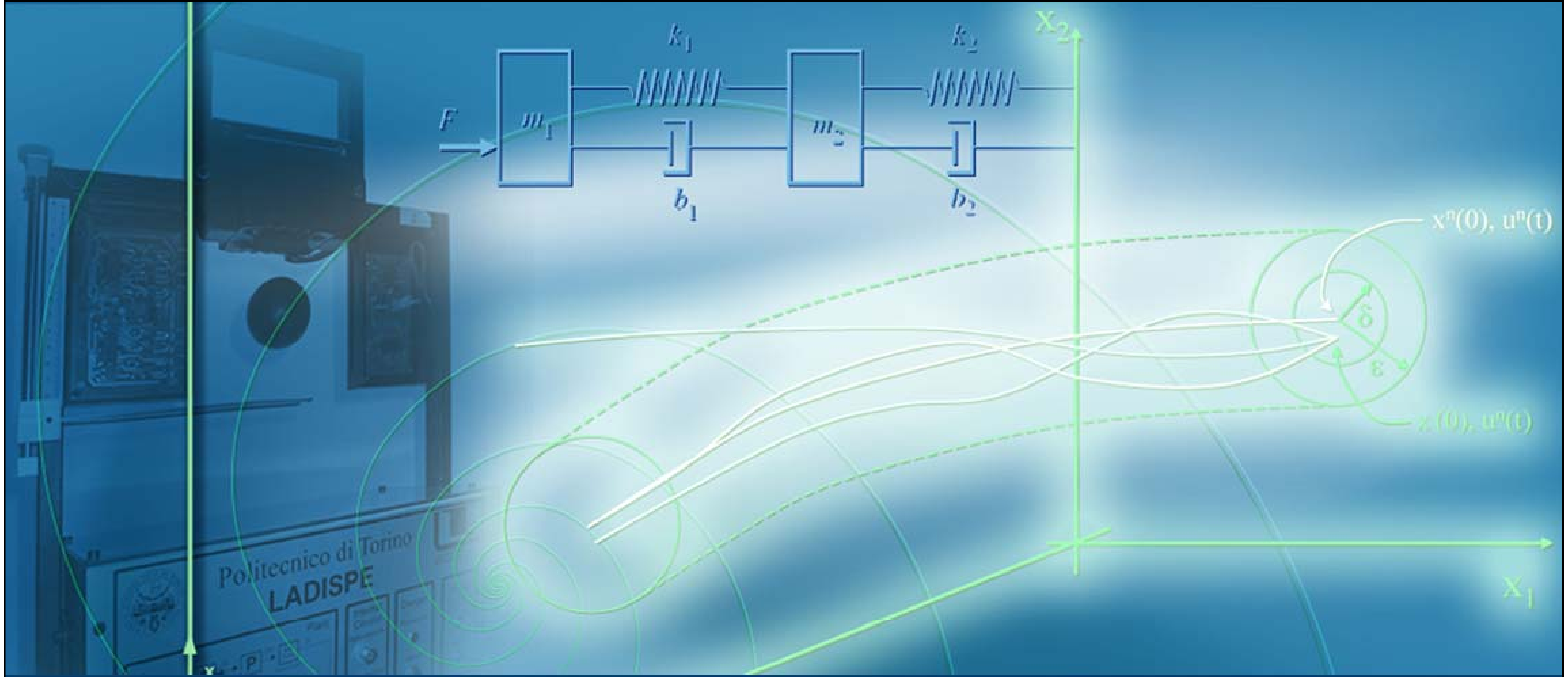
- La funzione $f(x)$ può essere approssimata in tale intorno mediante il troncamento $h(x)$ dello sviluppo in serie di Taylor arrestato al termine di 1º grado:

$$\boxed{f(x) = f(x_0 + \delta x) \cong f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \delta x = h(x)}$$

Linearizzazione di una funzione reale (2/2)



- L'approssimazione $h(x)$ è tanto migliore quanto più piccolo è l'intorno δx del punto di linearizzazione x_0



Linearizzazione di sistemi dinamici

Linearizzazione di un sistema dinamico

Linearizzazione di un sistema dinamico

- I sistemi dinamici reali non sono mai perfettamente lineari, ma possono essere approssimati nell'intorno di ogni prefissato movimento (quale, ad esempio, un punto di equilibrio) mediante opportuni modelli lineari, detti **modelli linearizzati**
- Per l'analisi ed il controllo di sistemi dinamici lineari si hanno a disposizione metodologie più semplici, potenti e numerose rispetto al caso non lineare
- Obiettivo: costruire un modello dinamico lineare che approssimi bene il comportamento del sistema dinamico non lineare nell'intorno di un prefissato movimento "nominale"

Movimento nominale di un sistema dinamico

- Dato un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo continuo, non lineare, stazionario
$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$$
$$y(t) = g\big(x(t), u(t)\big)$$
se ne considerino due diverse evoluzioni temporali:
    - Un movimento “nominale” $\tilde{x}(t)$ ottenuto applicando un ingresso “nominale” $\tilde{u}(t)$ al sistema posto in uno stato iniziale “nominale” $\tilde{x}_0$, cui corrisponde una uscita “nominale” $\tilde{y}(t) \Rightarrow$

      $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ soddisfano il seguente sistema di equazioni
$$\dot{\tilde{x}}(t) = f\big(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\big), \quad \tilde{x}(t=0) = \tilde{x}_0$$
$$\tilde{y}(t) = g\big(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\big)$$

Movimento perturbato di un sistema dinamico

- Dato un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo continuo, non lineare, stazionario

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right)$$
$$y(t) = g\left(x(t), u(t)\right)$$

se ne considerino due diverse evoluzioni temporali:

  - Un movimento "perturbato" $x(t)$ ottenuto applicando un ingresso differente ("perturbato") $u(t)$ al sistema posto in uno stato iniziale differente ("perturbato") x_0 , cui corrisponde una uscita "perturbata" $y(t) \Rightarrow$

    $x(t)$ e $y(t)$ soddisfano il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(x(t), u(t)\right), \quad x(t=0) = x_0 \\ y(t) &= g\left(x(t), u(t)\right) \end{aligned}$$

Perturbazioni di un sistema dinamico

- Le differenze fra le due diverse evoluzioni temporali rappresentano le **perturbazioni** del sistema:
  - $\delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t) =$ **perturbazione sullo stato** $\in \mathbb{R}^n$
    $$\Rightarrow \quad x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$$
  - $\delta u(t) = u(t) - \tilde{u}(t) =$ **perturbazione sull'ingresso** $\in \mathbb{R}^p$
    $$\Rightarrow \quad u(t) = \tilde{u}(t) + \delta u(t)$$
  - $\delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t) =$ **perturbazione sull'uscita** $\in \mathbb{R}^q$
    $$\Rightarrow \quad y(t) = \tilde{y}(t) + \delta y(t)$$
- L'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{d\left(\delta x(t)\right)}{dt} = \frac{d\left(x(t) - \tilde{x}(t)\right)}{dt} = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t)$$

Calcolo delle perturbazioni del sistema (1/3)

- L'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale
  $$\delta\dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = f\big(x(t),u(t)\big) - f\big(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)\big)$$
- La funzione $f(x(t),u(t))$ può essere sviluppata in serie di Taylor in un intorno di $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{u}(t)$ come
  $$f\big(x(t),u(t)\big) = f\big(\tilde{x}(t)+\delta x(t),\tilde{u}(t)+\delta u(t)\big) =$$
  $$= f\big(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)\big) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\u=\tilde{u}}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\u=\tilde{u}}} \delta u(t) + \ldots$$
  e può essere approssimata mediante il troncamento di tale sviluppo in serie arrestato al termine lineare:
  $$f\big(x(t),u(t)\big) \cong f\big(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)\big) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\u=\tilde{u}}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\u=\tilde{u}}} \delta u(t)$$

Calcolo delle perturbazioni del sistema (2/3)

- Quindi $\delta x(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$\delta\dot{x}(t) = f\big(x(t),u(t)\big) - f\big(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)\big) \cong$$

$$\cong \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} \delta u(t) =$$

$$= A(t)\,\delta x(t) + B(t)\,\delta u(t)$$

$$A(t) = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

: Jacobiano di f rispetto ad x

$$B(t) = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial u_1 & \cdots & \partial f_1/\partial u_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/\partial u_1 & \cdots & \partial f_n/\partial u_p \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{n\times p}$$

: Jacobiano di f rispetto ad u

Calcolo delle perturbazioni del sistema (3/3)

- Procedendo in maniera analoga con $\delta y(t)$, si ricava:

$$\delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = g\big(x(t), u(t)\big) - g\big(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\big) \cong$$

$$\cong \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} \delta u(t) =$$

$$= C(t)\,\delta x(t) + D(t)\,\delta u(t)$$

$$C(t) = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial x_1 & \cdots & \partial g_1/\partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial g_q/\partial x_1 & \cdots & \partial g_q/\partial x_n \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{q\times n}$$

: Jacobiano di g rispetto ad x

$$D(t) = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \partial g_1/\partial u_1 & \cdots & \partial g_1/\partial u_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial g_q/\partial u_1 & \cdots & \partial g_q/\partial u_p \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{q\times p}$$

: Jacobiano di g rispetto ad u

Sistema dinamico linearizzato TC

- Quindi l'evoluzione temporale del sistema dinamico
$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$$
$$y(t) = g\big(x(t), u(t)\big)$$
nell'intorno del movimento "nominale" $\big(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{y}(t)\big)$ può essere espressa in forma approssimata come
$x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$, $u(t) = \tilde{u}(t) + \delta u(t)$, $y(t) = \tilde{y}(t) + \delta y(t)$
in funzione delle perturbazioni $\delta x(t)$ e $\delta y(t)$ che sono le soluzioni del **sistema dinamico linearizzato**

$$\delta\dot{x}(t) = A(t)\,\delta x(t) + B(t)\,\delta u(t), \quad \delta x(t=0) = x(t=0) - \tilde{x}_0$$
$$\delta y(t) = C(t)\,\delta x(t) + D(t)\,\delta u(t)$$
$$A(t) = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}}, B(t) = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}}, C(t) = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}}, D(t) = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x}\\ u=\tilde{u}}}$$

Sistema dinamico linearizzato TD

- Analogamente, l'evoluzione temporale del sistema
$$x(k+1) = f\big(x(k), u(k)\big)$$
$$y(k) = g\big(x(k), u(k)\big)$$
nell'intorno del movimento "nominale" $\big(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k), \tilde{y}(k)\big)$ può essere espressa in forma approssimata come
$x(k) = \tilde{x}(k) + \delta x(k)$, $u(k) = \tilde{u}(k) + \delta u(k)$, $y(k) = \tilde{y}(k) + \delta y(k)$
in funzione delle perturbazioni $\delta x(k)$ e $\delta y(k)$ che sono le soluzioni del **sistema dinamico linearizzato**

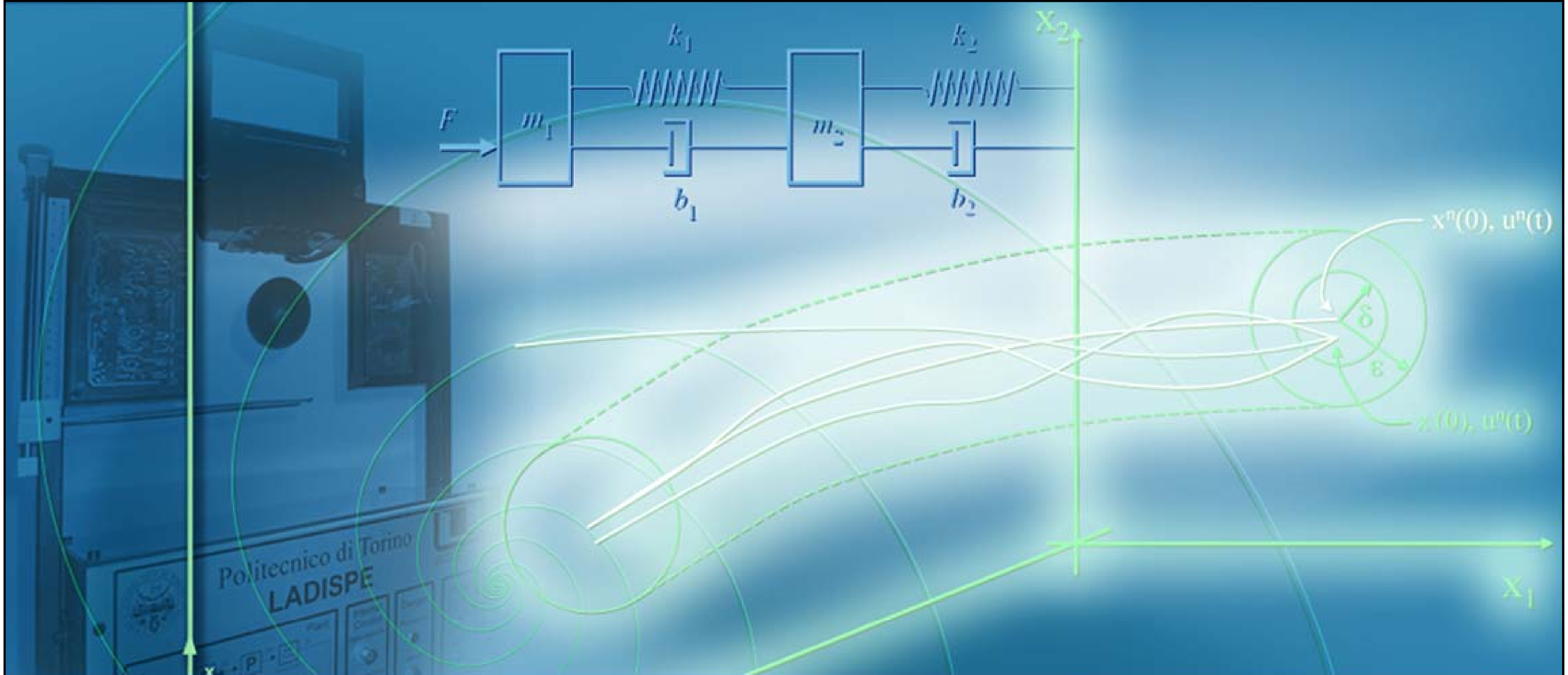
$$\boxed{\begin{gathered}\delta x(k+1) = A(k)\,\delta x(k) + B(k)\,\delta u(k),\ \delta x(k=0) = x(k=0) - \tilde{x}_0 \\ \delta y(k) = C(k)\,\delta x(k) + D(k)\,\delta u(k) \\ A(k) = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}}, B(k) = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}}, C(k) = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}}, D(k) = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}}\end{gathered}}$$

Linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio

- In generale, il sistema dinamico linearizzato può risultare variante nel tempo, anche se il sistema dinamico non lineare da approssimare è stazionario
- Se però il movimento "nominale" considerato è un punto di equilibrio $\left(\bar{x},\bar{u}\right)$, allora le matrici A, B, C e D del sistema dinamico linearizzato risultano costanti e quindi il sistema dinamico linearizzato è LTI:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(t) &= A\delta x(t)+B\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t)+D\delta u(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta x(k+1) &= A\delta x(k)+B\delta u(k) \\ \delta y(k) &= C\delta x(k)+D\delta u(k) \end{aligned}$$

- Quale che sia il movimento "nominale" considerato, la validità dell'approssimazione mediante il sistema linearizzato è tanto maggiore quanto minori sono le perturbazioni rispetto a tale movimento "nominale"



Linearizzazione di sistemi dinamici

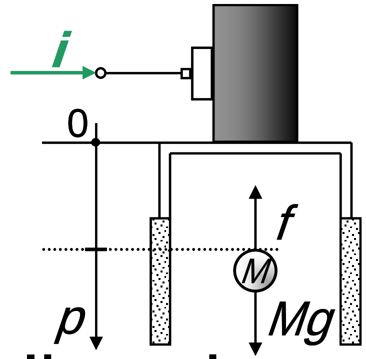
Esempi di linearizzazione di sistemi dinamici

Esempio #1 di linearizzazione (1/4)

- Dato il sistema (levitatore magnetico) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = g - \left(k_i / M\right) u^2 / x_1^2 & = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y = x_1 \qquad\qquad = g(x,u)$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k_i}{Mg}} \left|\bar{u}\right| \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} \neq 0 \right)$

- Nell'equazione $\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ compaiono:

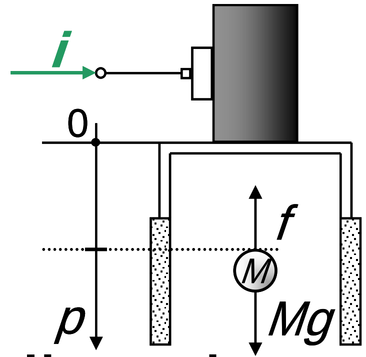
$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k_i\bar{u}^2}{M\bar{x}_1^3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\left|\bar{u}\right|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}} & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio #1 di linearizzazione (2/4)

- Dato il sistema (levitatore magnetico) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = g - (k_i/M)\, u^2 / x_1^2 & = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y = x_1 \qquad = g(x,u)$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k_i}{Mg}}\,|\bar{u}| \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} \neq 0 \right)$

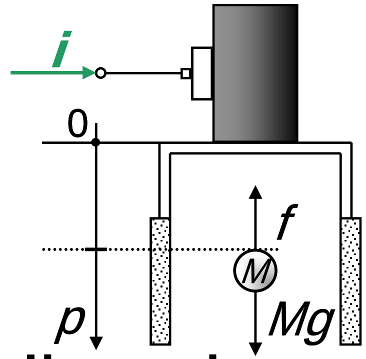
- Nell'equazione $\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ compaiono:

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2k_i\bar{u}}{M\bar{x}_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{\bar{u}} \end{bmatrix}$$

Esempio #1 di linearizzazione (3/4)

- Dato il sistema (levitatore magnetico) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = g - \left(k_i/M\right) u^2 \big/ x_1^2 & = f_2(x,u) \end{cases}$$
$$y = x_1 \qquad = g(x,u)$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k_i}{Mg}} \, |\bar{u}| \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} \neq 0 \right)$

- Nell'equazione $\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t)$ compaiono:

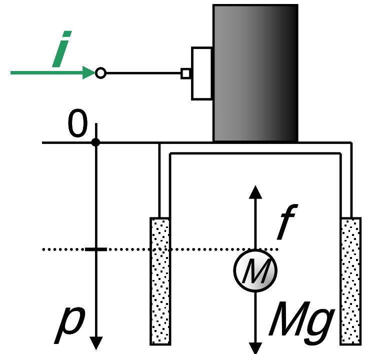
$$C = \left. \frac{\partial g(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio #1 di linearizzazione (4/4)

- Dato il sistema (levitatore magnetico) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = g - \left(k_i/M\right) u^2 \big/ x_1^2 & = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y = x_1 \qquad = g(x,u)$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k_i}{Mg}} |\bar{u}| \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} \neq 0 \right)$

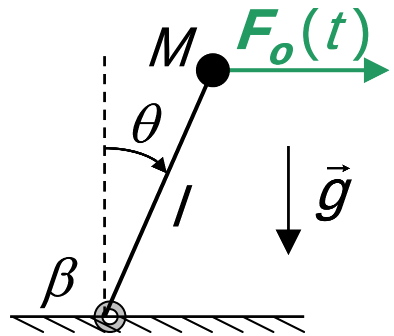
- Nell'equazione $\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t)$ compaiono:

$$D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [0]$$

Esempio #2 di linearizzazione (1/6)

- Dato il sistema (pendolo inverso) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} & = f_2(x,u) \\ y = x_1 & = g(x,u) \end{cases}$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0\right)$

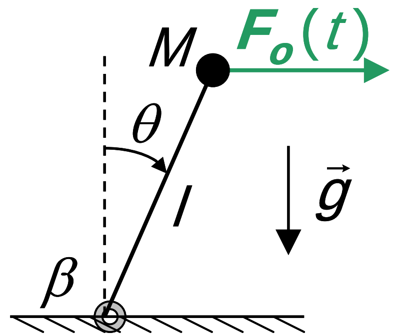
- Nell'equazione $\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ compaiono:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l}\cos\bar{x}_1 - \dfrac{\bar{u}\sin\bar{x}_1}{Ml} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Esempio #2 di linearizzazione (2/6)

- Dato il sistema (pendolo inverso) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} & = f_2(x,u) \\ y = x_1 & = g(x,u) \end{cases}$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0\right)$

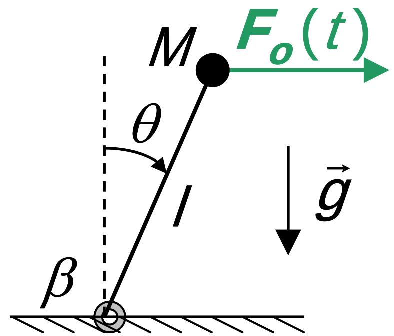
- Nell'equazione $\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ compaiono:

$$k \text{ pari} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\dfrac{g}{l} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix}, \quad k \text{ dispari} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Esempio #2 di linearizzazione (3/6)

- Dato il sistema (pendolo inverso) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} & = f_2(x,u) \\ y = x_1 & = g(x,u) \end{cases}$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0\right)$

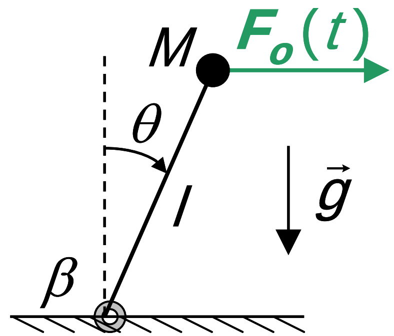
- Nell'equazione $\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ compaiono:

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\cos \bar{x}_1}{Ml} \end{bmatrix}$$

Esempio #2 di linearizzazione (4/6)

- Dato il sistema (pendolo inverso) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} & = f_2(x,u) \\ y = x_1 & = g(x,u) \end{cases}$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0\right)$

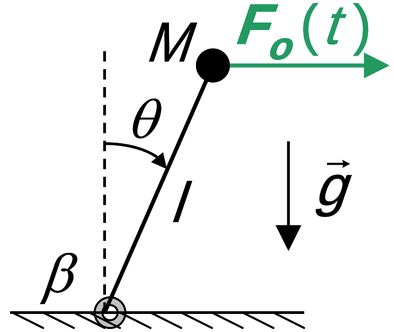
- Nell'equazione $\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ compaiono:

$$k \text{ pari} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 \\ +\dfrac{1}{Ml} \end{bmatrix}, \; k \text{ dispari} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \end{bmatrix}$$

Esempio #2 di linearizzazione (5/6)

- Dato il sistema (pendolo inverso) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} & = f_2(x,u) \\ y = x_1 & = g(x,u) \end{cases}$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0\right)$

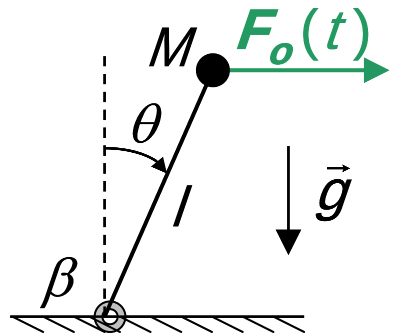
- Nell'equazione $\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t)$ compaiono:

$$C = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio #2 di linearizzazione (6/6)

- Dato il sistema (pendolo inverso) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} & = f_2(x,u) \\ y = x_1 & = g(x,u) \end{cases}$$



calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0\right)$

- Nell'equazione $\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t)$ compaiono:

$$D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [0]$$

Esempio #3 di linearizzazione (1/6)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \quad = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k) \quad = g(x,u)$$

calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato

in $\left(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right)$ e $\left(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right), c \in \mathbb{R}$

- Nell'equazione $\delta x(k+1) = A\delta x(k) + B\delta u(k)$,

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{u}+\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ 0 & -\bar{u}+6\bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

Esempio #3 di linearizzazione (2/6)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \qquad = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k) \qquad = g(x,u)$$

calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato in $\left(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right)$ e $\left(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right), c \in \mathbb{R}$

- Nell'equazione $\delta x(k+1) = A\delta x(k) + B\delta u(k)$,

$$A = \begin{bmatrix} \bar{u}+\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ 0 & -\bar{u}+6\bar{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(a)} \Rightarrow A = A^{(a)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \\ \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(b)} \Rightarrow A = A^{(b)} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Esempio #3 di linearizzazione (3/6)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \qquad = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k) \qquad = g(x,u)$$

calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato in $\left(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right)$ e $\left(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right), c \in \mathbb{R}$

- Nell'equazione $\delta x(k+1) = A\delta x(k) + B\delta u(k)$,

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

Esempio #3 di linearizzazione (4/6)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \qquad = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k) \qquad\qquad = g(x,u)$$

calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato

in $\left(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5 \right)$ e $\left(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5 \right), c \in \mathbb{R}$

- Nell'equazione $\delta x(k+1) = A\delta x(k) + B\delta u(k)$,

$$B = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(a)} \Rightarrow B = B^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(b)} \Rightarrow B = B^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ -0.5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Esempio #3 di linearizzazione (5/6)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \qquad = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k) \qquad = g(x,u)$$

calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato in $\left(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right)$ e $\left(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right), c \in \mathbb{R}$

- Nell'equazione $\delta y(k) = C\delta x(k) + D\delta u(k)$,

$$C = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

se $\bar{x} = \bar{x}^{(a)} \Rightarrow C = C^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, se $\bar{x} = \bar{x}^{(b)} \Rightarrow C = C^{(b)} = \begin{bmatrix} 0.5 & c \end{bmatrix}$

Esempio #3 di linearizzazione (6/6)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \qquad = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k) \qquad = g(x,u)$$

calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato in $\left(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right)$ e $\left(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right), c \in \mathbb{R}$

- Nell'equazione $\delta y(k) = C\delta x(k) + D\delta u(k)$,

$$D = \frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]\Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [0]$$