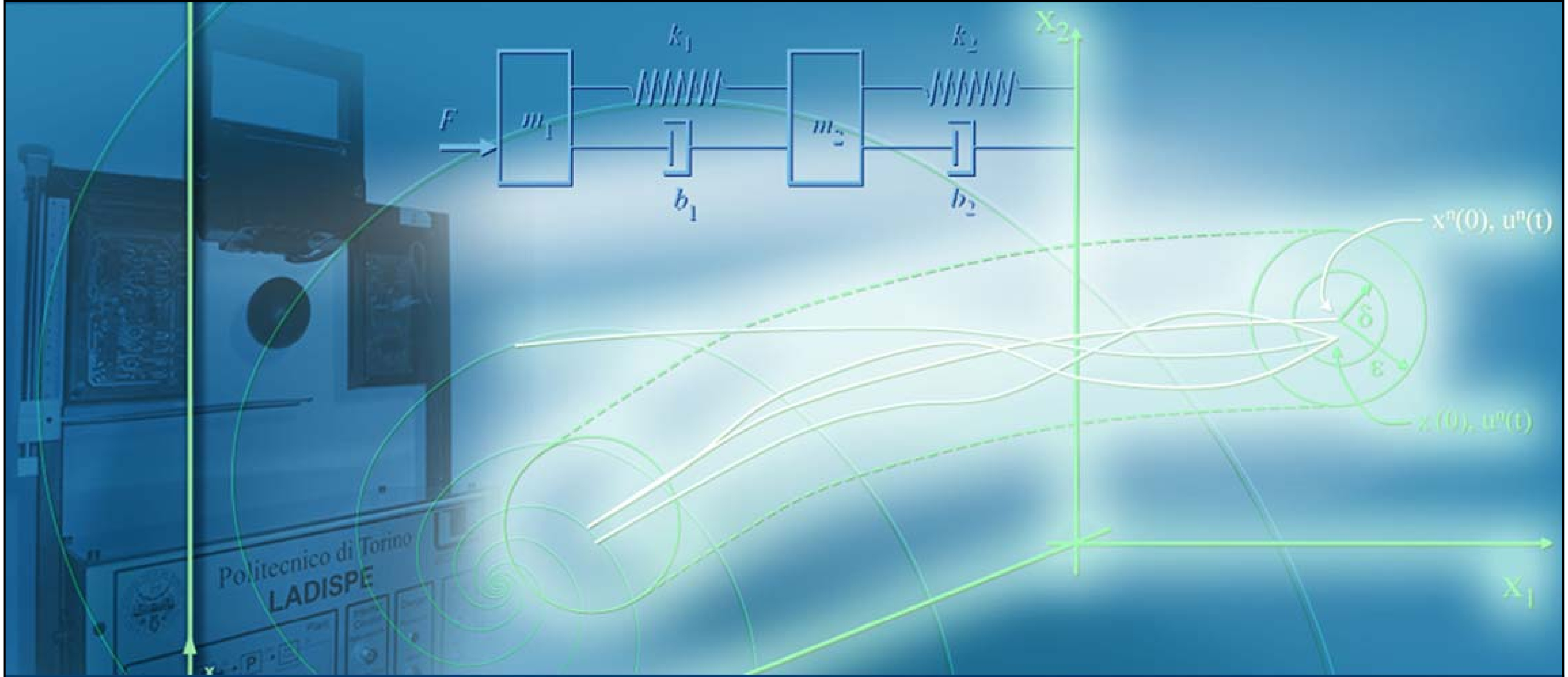
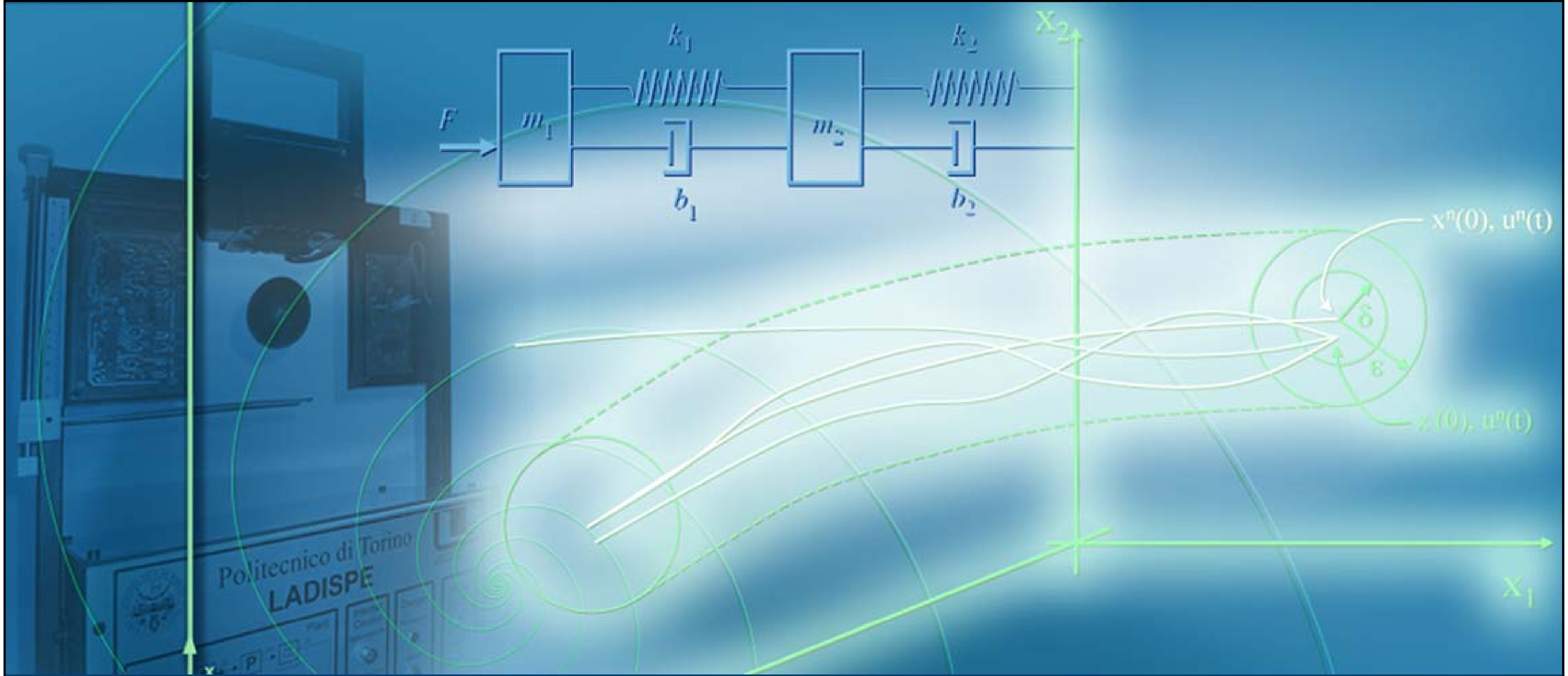


Equilibrio e stabilità di sistemi dinamici

Stabilità dell’equilibrio di sistemi dinamici non lineari per linearizzazione

Stabilità dell’equilibrio di sistemi dinamici non lineari per linearizzazione

- Stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TC
- Criteri di stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TC
- Stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TD
- Criteri di stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TD
- Esempi di analisi della stabilità dell’equilibrio



Stabilità dell’equilibrio di sistemi dinamici non lineari per linearizzazione

Stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TC

Stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TC (1/3)

- Dato un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo continuo, non lineare (NL) e stazionario, descritto dall'equazione di stato $\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right)$, se ne considerino due diverse evoluzioni temporali:
  - Il movimento "nominale" d'equilibrio $\tilde{x}(t) = \bar{x}$ ottenuto applicando l'ingresso "nominale" d'equilibrio $\tilde{u}(t) = \bar{u}$ al sistema posto nello stato iniziale "nominale" $\tilde{x}(t_0 = 0) = \bar{x}$ $\Rightarrow$ $\tilde{x}(t)$ soddisfa il seguente sistema di equazioni
$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{\bar{x}} = 0 = f\left(\bar{x}, \bar{u}\right)$$
  - Un movimento "perturbato" $x(t)$ ottenuto applicando lo stesso ingresso "nominale" $\tilde{u}(t) = \bar{u}$ al sistema posto in uno stato iniziale differente ("perturbato") $x_0 \neq \bar{x}$ $\Rightarrow$ $x(t)$ soddisfa il seguente sistema di equazioni
$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), \bar{u}\right), \quad x(t_0 = 0) = x_0$$

Stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TC (2/3)

- La differenza fra i due diversi movimenti costituisce la perturbazione sullo stato del sistema:

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$$

- L'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$\delta \dot{x}(t) = \frac{d\left(\delta x(t)\right)}{dt} = \frac{d\left(x(t) - \bar{x}\right)}{dt} = \dot{x}(t) - \cancel{\dot{\bar{x}}} =$$

$$= f\left(x(t), \bar{u}\right) = f\left(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u}\right)$$

che risulta quindi non lineare nella variabile $\delta x(t)$ ed ha come condizione iniziale

$$\delta x(t_0 = 0) = x(t_0 = 0) - \bar{x} = x_0 - \bar{x} = \delta x_0 \neq 0$$

Stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TC (3/3)

- La soluzione dell'equazione differenziale non lineare
  $$\delta\dot{x}(t) = f\left(\bar{x}+\delta x(t),\bar{u}\right), \quad \delta x(t_0=0) = x_0 - \bar{x} = \delta x_0$$
  è in generale difficile da trovare ed inoltre dipende sia dallo stato iniziale "nominale" d'equilibrio $\bar{x}$ sia dall'ingresso "nominale" d'equilibrio $\bar{u}$, cioè dipende dal particolare punto di equilibrio $\left(\bar{x},\bar{u}\right)$ considerato $\Rightarrow$ nel caso dei sistemi dinamici non lineari stazionari, la proprietà di stabilità riguarda soltanto un intorno del particolare stato di equilibrio considerato e non l'intero sistema (si parla infatti di studio della stabilità "locale"), a differenza di quanto avviene nel caso dei sistemi dinamici LTI

Metodo di linearizzazione per sistemi NL TC (1/2)

- In molti casi, col **metodo indiretto di Lyapunov** (anche noto come **metodo di linearizzazione**) si può studiare la stabilità locale dell'equilibrio senza dover risolvere l'equazione differenziale non lineare
$$\delta\dot{x}(t) = f\left(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u}\right), \quad \delta x(t_0 = 0) = x_0 - \bar{x} = \delta x_0$$
- La funzione $f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u})$ può essere sviluppata in serie di Taylor in un intorno dell'equilibrio $\bar{x}$ come
$$f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u}) = \cancel{f(\bar{x}, \bar{u})} + \left.\frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \delta x(t) + h(\delta x(t)) =$$
$$= \left.\frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \delta x(t) + h(\delta x(t))$$
in cui $h(\delta x(t))$ è una funzione che contiene potenze di $\delta x(t)$ di grado superiore al primo

Metodo di linearizzazione per sistemi NL TC (2/2)

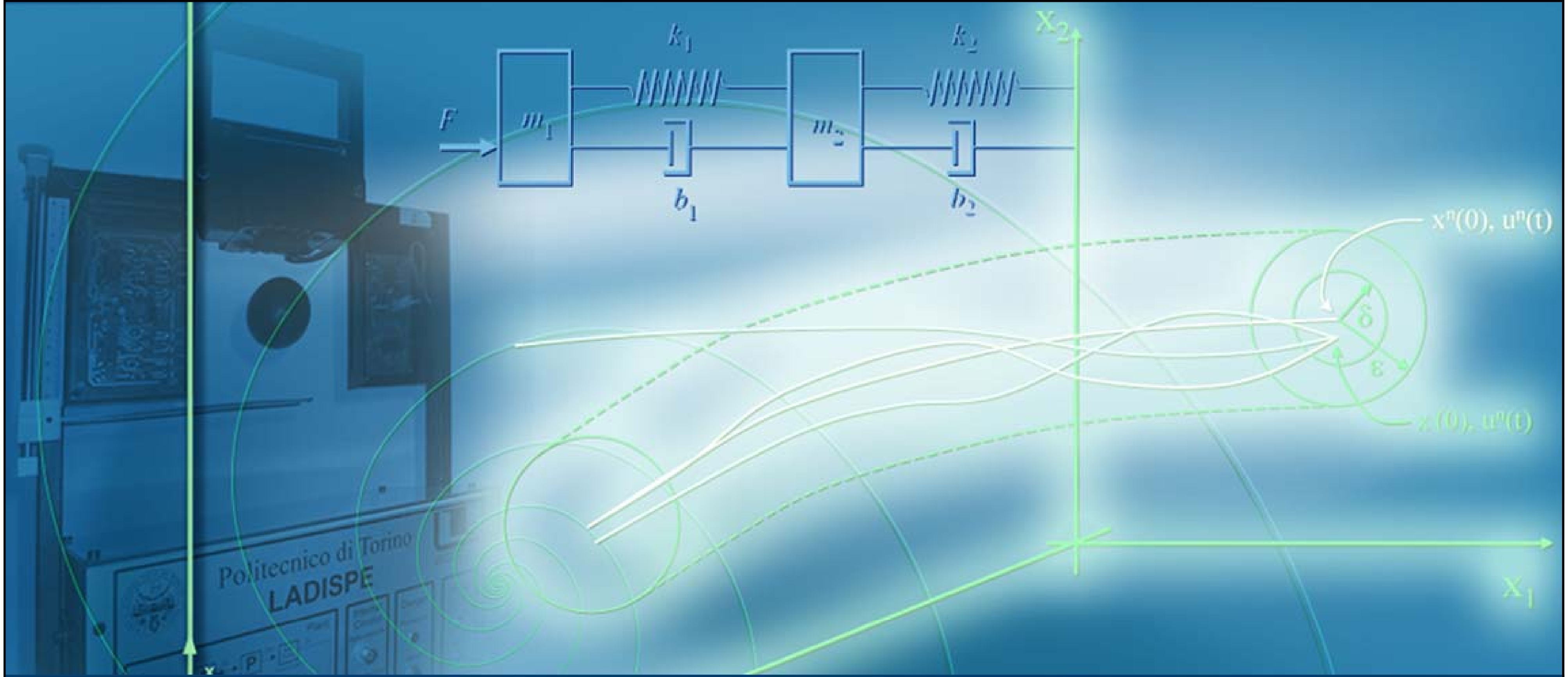
- Secondo il metodo di linearizzazione, nei casi in cui sia possibile trascurare il termine $h(\delta x(t))$, l'analisi della stabilità dell'equilibrio è effettuata mediante lo studio della stabilità interna del sistema dinamico LTI

$$\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t), \quad \delta x(t_0 = 0) = x_0 - \bar{x} = \delta x_0$$

$$A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \text{ Jacobiano di } f \text{ rispetto ad } x$$

approssimando cioè $f(\bar{x}+\delta x(t),\bar{u})$ col troncamento dello sviluppo in serie di Taylor arrestato al termine lineare

- Si osservi che la matrice A è la matrice di stato del sistema dinamico linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $(\bar{x},\bar{u})$



Stabilità dell’equilibrio di sistemi dinamici non lineari per linearizzazione

Criteri di stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TC

Asintotica stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TC

- Dato lo stato di equilibrio $\bar{x}$ di un sistema dinamico, a tempo continuo, non lineare e stazionario, condizione (soltanto) sufficiente affinché risulti (localmente) **asintoticamente stabile** è che

$$\boxed{\forall i: \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_i(A)\right) < 0} \qquad A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$$

- In tal caso, esiste infatti un intorno dell’equilibrio $I_{\bar{x}}$ tale che, per qualsiasi perturbazione iniziale $\delta x_0 \in I_{\bar{x}}$, la perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ rimanga limitata nel tempo e tenda a zero asintoticamente $\Rightarrow$ poiché il termine $h(\delta x(t))$ contiene potenze di $\delta x(t)$ di ordine superiore al primo, è lecito trascurarlo nella equazione differenziale non lineare

$$\delta\dot{x}(t) = f\left(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u}\right) = A\delta x(t) + h\left(\delta x(t)\right)$$

Instabilità dell'equilibrio di sistemi NL TC

- Dato lo stato di equilibrio $\bar{x}$ di un sistema dinamico, a tempo continuo, non lineare e stazionario, condizione (soltanto) sufficiente affinché risulti (localmente) **instabile** è che

$$\boxed{\exists i: \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\big(\lambda_i(A)\big) > 0} \qquad A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$$

- In tal caso, non esiste alcun intorno dell'equilibrio $I_{\bar{x}}$ tale che, per qualsiasi perturbazione iniziale $\delta x_0 \in I_{\bar{x}}$, la perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ rimanga limitata $\Rightarrow$ anche se non è possibile trascurare il termine $h(\delta x(t))$ nell'equazione differenziale non lineare

$$\delta\dot{x}(t) = f\big(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u}\big) = A\delta x(t) + h\big(\delta x(t)\big)$$

la sua soluzione $\delta x(t)$ non rimane comunque limitata

Caso critico per la stabilità dell'equilibrio

- Dato lo stato di equilibrio $\bar{x}$ di un sistema dinamico, a tempo continuo, non lineare e stazionario, tale che

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall i : \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_i(A)\right) \leq 0 \\ \exists k : \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_k(A)\right) = 0\end{array}} \qquad A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$$

  mediante il metodo di linearizzazione non è possibile concludere nulla sulla stabilità locale di $\bar{x}$, che infatti può risultare **asintoticamente stabile** oppure **semplicemente stabile** oppure **instabile**

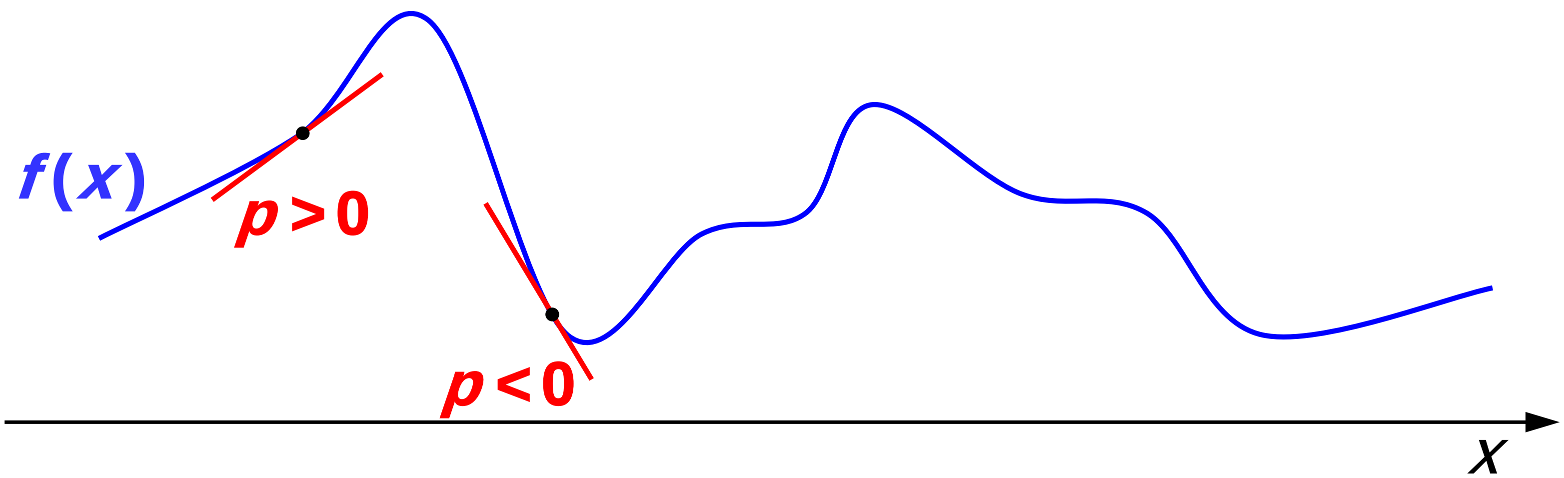
- In tal caso, non è possibile trascurare il termine $h(\delta x(t))$ nell'equazione differenziale non lineare

$$\delta\dot{x}(t) = f\left(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u}\right) = A\delta x(t) + h\left(\delta x(t)\right)$$

  $\Rightarrow$ lo studio di $\delta x(t)$ va effettuato con altri metodi

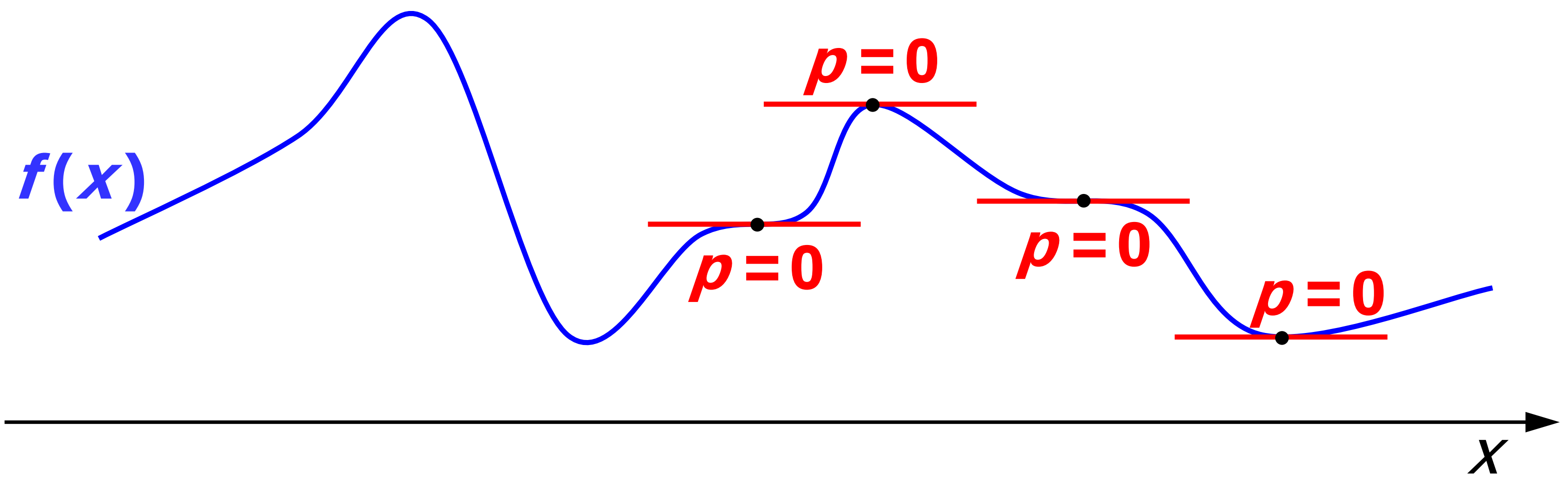
Analogia con l'analisi di monotonicità di funzione

- Nota: analoga criticità sorge nel caso in cui si studi la **monotonicità locale** di una funzione reale $f(x)$ non lineare considerando la pendenza p della retta tangente, ossia del troncamento $h(x)$ dello sviluppo in serie di Taylor arrestato al termine di 1º grado



Analogia con l'analisi di monotonicità di funzione

- Nota: analoga criticità sorge nel caso in cui si studi la **monotonicità locale** di una funzione reale $f(x)$ non lineare considerando la pendenza p della retta tangente, ossia del troncamento $h(x)$ dello sviluppo in serie di Taylor arrestato al termine di 1° grado

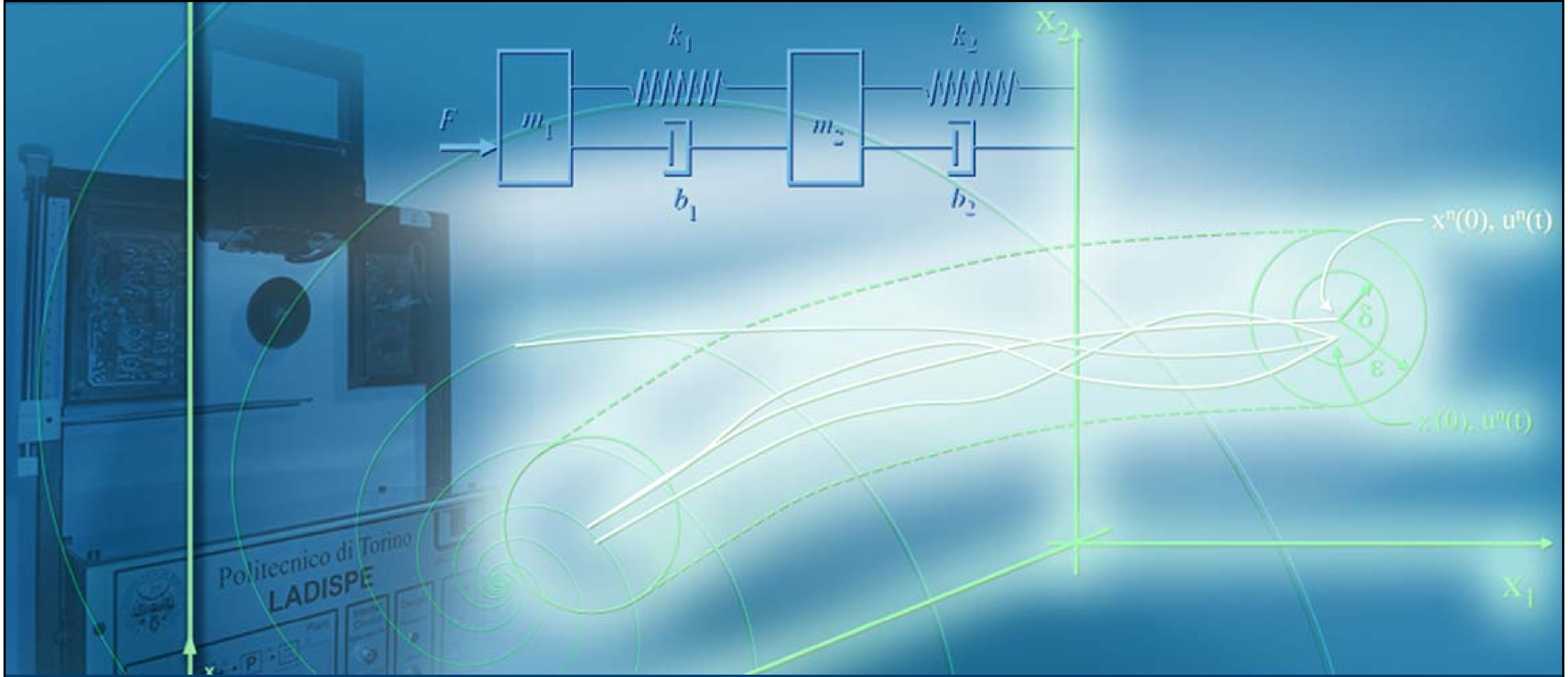


se la pendenza p della retta tangente è nulla $\Rightarrow$ non si può dire nulla sulla monotonicità locale di $f(x)$

Criteri di stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TC

Metodo di linearizzazione

Autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A del sistema dinamico linearizzato	Proprietà di stabilità locale dello stato di equilibrio del sistema dinamico non lineare
$\forall i : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) < 0$	**Asintotica stabilità**
$\exists i : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) > 0$	**Instabilità**
$\forall i : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) \leq 0$ $\exists k : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_k(A)) = 0$	**Asintotica stabilità** oppure **Semplice stabilità** oppure **Instabilità** $\Downarrow$ **NON è possibile concludere nulla**



Stabilità dell’equilibrio di sistemi dinamici non lineari per linearizzazione

Stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TD

Stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TD (1/3)

- Dato un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo discreto, non lineare (NL) e stazionario, descritto dall'equazione di stato $x(k+1)=f\big(x(k),u(k)\big)$ se ne considerino due diverse evoluzioni temporali:
  - Il movimento "nominale" d'equilibrio $\tilde{x}(k)=\bar{x}$ ottenuto applicando l'ingresso "nominale" d'equilibrio $\tilde{u}(k)=\bar{u}$ al sistema posto nello stato iniziale "nominale" $\tilde{x}(k_0=0)=\bar{x}$ $\Rightarrow$ $\tilde{x}(k)$ soddisfa il seguente sistema di equazioni
  $$\tilde{x}(k+1)=\bar{x}=f\big(\bar{x},\bar{u}\big)$$
  - Un movimento "perturbato" $x(k)$ ottenuto applicando lo stesso ingresso "nominale" $\tilde{u}(k)=\bar{u}$ al sistema posto in uno stato iniziale differente ("perturbato") $x_0 \neq \bar{x}$ $\Rightarrow$ $x(k)$ soddisfa il seguente sistema di equazioni
  $$x(k+1)=f\big(x(k),\bar{u}\big), \quad x(k_0=0)=x_0$$

Stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TD (2/3)

- La differenza fra i due diversi movimenti costituisce la perturbazione sullo stato del sistema:

$$\delta x(k) = x(k) - \bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x(k) = \bar{x} + \delta x(k)$$

- L'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta x(k)$ è soluzione dell'equazione alle differenze

$$\delta x(k+1) = x(k+1) - \bar{x} = f\left(x(k), \bar{u}\right) - \bar{x} =$$

$$= f\left(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u}\right) - \bar{x}$$

che risulta quindi non lineare nella variabile $\delta x(k)$ ed ha come condizione iniziale

$$\delta x(k_0 = 0) = x(k_0 = 0) - \bar{x} = x_0 - \bar{x} = \delta x_0 \neq 0$$

Stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TD (3/3)

- La soluzione dell'equazione alle differenze non lineare $\delta x(k+1) = f\left(\bar{x}+\delta x(k),\bar{u}\right)-\bar{x}, \quad \delta x(k_0{=}0) = x_0-\bar{x} = \delta x_0$ è in generale difficile da trovare ed inoltre dipende sia dallo stato iniziale "nominale" d'equilibrio $\bar{x}$ sia dall'ingresso "nominale" d'equilibrio $\bar{u}$, cioè dipende dal particolare punto di equilibrio $\left(\bar{x},\bar{u}\right)$ considerato $\Rightarrow$ nel caso dei sistemi dinamici non lineari stazionari, la proprietà di stabilità riguarda soltanto un intorno del particolare stato di equilibrio considerato e non l'intero sistema (si parla infatti di studio della stabilità "locale"), a differenza di quanto avviene nel caso dei sistemi dinamici LTI

Metodo di linearizzazione per sistemi NL TD (1/2)

- In molti casi, col **metodo indiretto di Lyapunov** (anche noto come **metodo di linearizzazione**) si può studiare la stabilità locale dell'equilibrio senza dover risolvere l'equazione alle differenze non lineare
$\delta x(k+1) = f\left(\bar{x}+\delta x(k),\bar{u}\right)-\bar{x}, \quad \delta x(k_0=0) = x_0-\bar{x} = \delta x_0$
- La funzione $f(\bar{x}+\delta x(k),\bar{u})$ può essere sviluppata in serie di Taylor in un intorno dell'equilibrio $\bar{x}$ come

$$f\left(\bar{x}+\delta x(k),\bar{u}\right) = f\left(\bar{x},\bar{u}\right)+\left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}\delta x(k)+h\left(\delta x(k)\right) =$$

$$= \bar{x}+\left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}\delta x(k)+h\left(\delta x(k)\right)$$

in cui $h(\delta x(k))$ è una funzione che contiene potenze di $\delta x(k)$ di grado superiore al primo

Metodo di linearizzazione per sistemi NL TD (2/2)

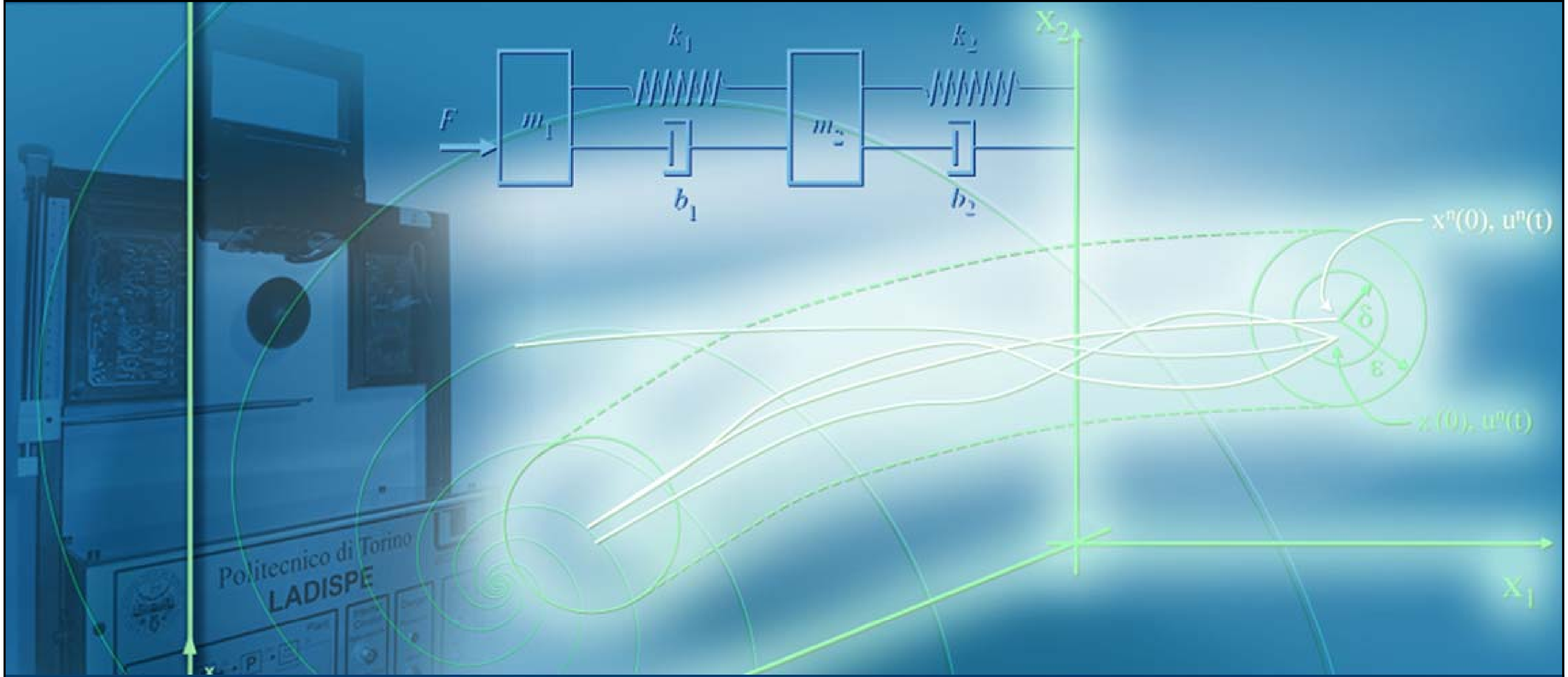
- Secondo il metodo di linearizzazione, nei casi in cui sia possibile trascurare il termine $h(\delta x(k))$, l'analisi della stabilità dell'equilibrio è effettuata mediante lo studio della stabilità interna del sistema dinamico LTI

$$\delta x(k+1) = A\delta x(k), \quad \delta x(k_0=0) = x_0 - \bar{x} = \delta x_0$$

$$A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \text{ Jacobiano di } f \text{ rispetto ad } x$$

  approssimando cioè $f(\bar{x}+\delta x(k),\bar{u})$ col troncamento dello sviluppo in serie di Taylor arrestato al termine lineare

- Si osservi che la matrice A è la matrice di stato del sistema dinamico linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $(\bar{x},\bar{u})$



Stabilità dell’equilibrio di sistemi dinamici non lineari per linearizzazione

Criteri di stabilità dell’equilibrio di sistemi NL TD

Asintotica stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TD

- Dato lo stato di equilibrio $\bar{x}$ di un sistema dinamico, a tempo discreto, non lineare e stazionario, condizione (soltanto) sufficiente affinché risulti (localmente) **asintoticamente stabile** è che

$$\boxed{\forall i: \quad |\lambda_i(A)| < 1} \qquad A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$$

- In tal caso, esiste infatti un intorno dell'equilibrio $I_{\bar{x}}$ tale che, per qualsiasi perturbazione iniziale $\delta x_0 \in I_{\bar{x}}$, la perturbazione sullo stato $\delta x(k)$ rimanga limitata nel tempo e tenda a zero asintoticamente $\Rightarrow$ poiché il termine $h(\delta x(k))$ contiene potenze di $\delta x(k)$ di ordine superiore al primo, è lecito trascurarlo nella equazione alle differenze non lineare

$$\delta x(k+1) = f\left(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u}\right) = A\delta x(k) + h\left(\delta x(k)\right)$$

Instabilità dell'equilibrio di sistemi NL TD

- Dato lo stato di equilibrio $\bar{x}$ di un sistema dinamico, a tempo discreto, non lineare e stazionario, condizione (soltanto) sufficiente affinché risulti (localmente) **instabile** è che

$$\boxed{\exists i : \quad \left|\lambda_i(A)\right| > 1} \qquad A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$$

- In tal caso, non esiste alcun intorno dell'equilibrio $I_{\bar{x}}$ tale che, per qualsiasi perturbazione iniziale $\delta x_0 \in I_{\bar{x}}$, la perturbazione sullo stato $\delta x(k)$ rimanga limitata $\Rightarrow$ anche se non è possibile trascurare il termine $h(\delta x(k))$ nell'equazione alle differenze non lineare

$$\delta x(k+1) = f\left(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u}\right) = A\delta x(k) + h\left(\delta x(k)\right)$$

la sua soluzione $\delta x(k)$ non rimane comunque limitata

Caso critico per la stabilità dell'equilibrio

- Dato lo stato di equilibrio $\bar{x}$ di un sistema dinamico, a tempo discreto, non lineare e stazionario, tale che

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall i : \left|\lambda_i(A)\right| \leq 1 \\ \exists k : \left|\lambda_k(A)\right| = 1 \end{array}} \qquad A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$$

mediante il metodo di linearizzazione non è possibile concludere nulla sulla stabilità locale di $\bar{x}$, che infatti può risultare **asintoticamente stabile** oppure **semplicemente stabile** oppure **instabile**

- In tal caso, non è possibile trascurare il termine $h(\delta x(k))$ nell'equazione differenziale non lineare

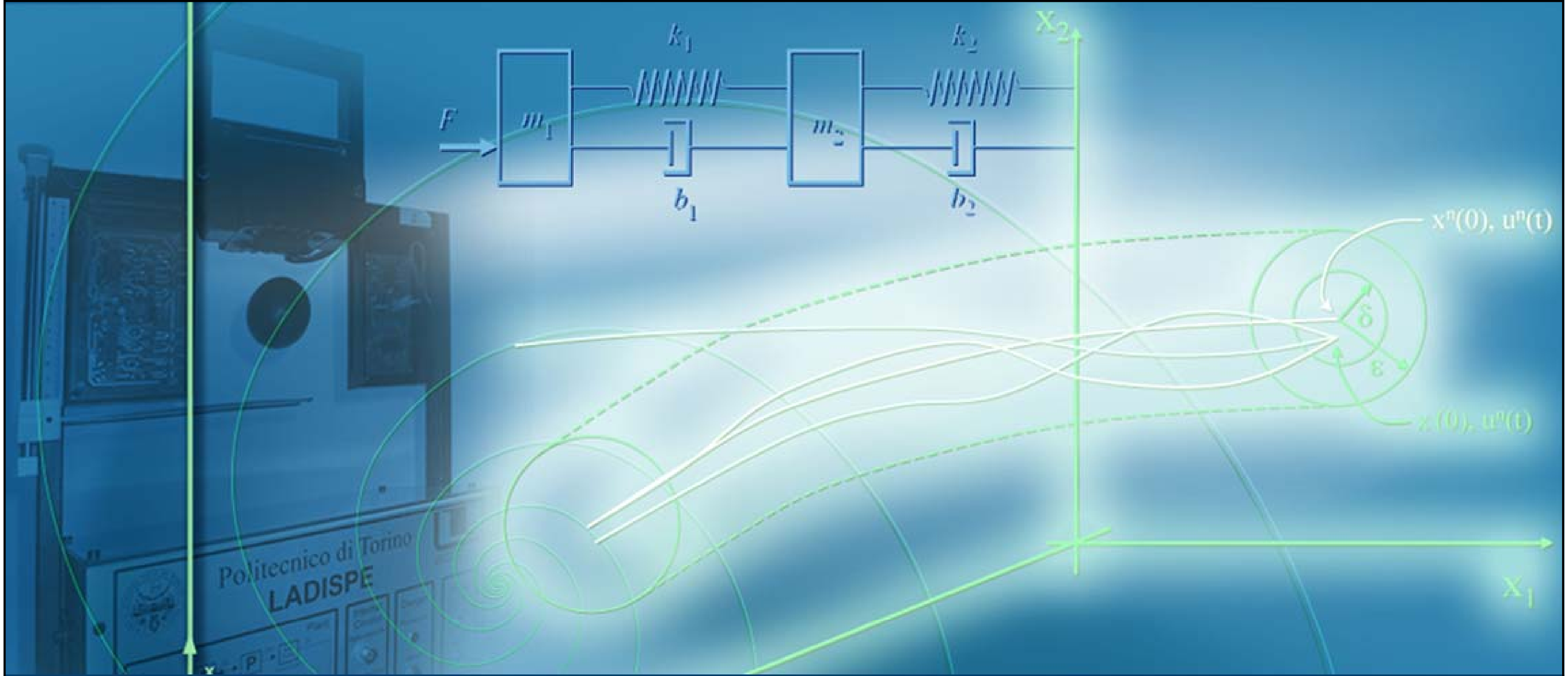
$$\delta x(k+1) = f\left(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u}\right) = A\delta x(k) + h\left(\delta x(k)\right)$$

$\Rightarrow$ lo studio di $\delta x(k)$ va effettuato con altri metodi

Criteri di stabilità dell'equilibrio di sistemi NL TD

Metodo di linearizzazione

Autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A del sistema dinamico linearizzato	Proprietà di stabilità locale dello stato di equilibrio del sistema dinamico non lineare
$\forall i: \ \lvert\lambda_i(A)\rvert < 1$	**Asintotica stabilità**
$\exists i: \ \lvert\lambda_i(A)\rvert > 1$	**Instabilità**
$\forall i: \ \lvert\lambda_i(A)\rvert \leq 1$ $\exists k: \ \lvert\lambda_k(A)\rvert = 1$	**Asintotica stabilità** oppure **Semplice stabilità** oppure **Instabilità** $\Downarrow$ **NON è possibile concludere nulla**



Stabilità dell’equilibrio di sistemi dinamici non lineari per linearizzazione

Esempi di analisi della stabilità dell’equilibrio

Esempio #1 di analisi della stabilità (1/4)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - u(t) \quad = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2(t) = x_1^2(t) - x_2(t) = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(t) = -x_1(t)x_2(t) \quad = g(x,u)$$

determinare gli stati d'equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti agli ingressi d'equilibrio $\bar{u} = 1$ e $\bar{u} = 0$, analizzandone le rispettive proprietà di stabilità locale

- All'equilibrio, $\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}} = 0 = f(\bar{x},\bar{u}), \forall t \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1^2 - \bar{u} \\ 0 = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1^2 = \bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 = \bar{u} \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\bar{u}} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$$

Esempio #1 di analisi della stabilità (2/4)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - u(t) \;\; = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2(t) = x_1^2(t) - x_2(t) = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(t) = -x_1(t)x_2(t) \;\; = g(x,u)$$

determinare gli stati d'equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti agli ingressi d'equilibrio $\bar{u} = 1$ e $\bar{u} = 0$, analizzandone le rispettive proprietà di stabilità locale

- La matrice di stato del sistema linearizzato vale:

$$A = \frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\bigg|_{x=\bar{x}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 0 \\ 2\bar{x}_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esempio #1 di analisi della stabilità (3 / 4)

- Se $\bar{u} = 1 \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ oppure $\bar{x} = \bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

  Nel caso di $\bar{x} = \bar{x}^{(a)}$, risulta $A = A^{(a)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow \{ \lambda_i(A) \} = \{ 2, -1 \} = \{ \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) \}$

  $\Rightarrow$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ ha $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_1) = 2 > 0$

  $\Rightarrow$ lo stato di equilibrio $\bar{x}^{(a)}$ è instabile

  Nel caso di $\bar{x} = \bar{x}^{(b)}$, risulta $A = A^{(b)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow \{ \lambda_i(A) \} = \{ -2, -1 \} = \{ \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) \}$

  $\Rightarrow$ entrambi gli autovalori di A hanno $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i) < 0$

  $\Rightarrow$ lo stato di equilibrio $\bar{x}^{(b)}$ è asintoticamente stabile

Esempio #1 di analisi della stabilità (4 / 4)

- Se $\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}^{(c)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e risulta $A = A^{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow \{ \lambda_i(A) \} = \{ 0, -1 \} = \{ \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) \}$

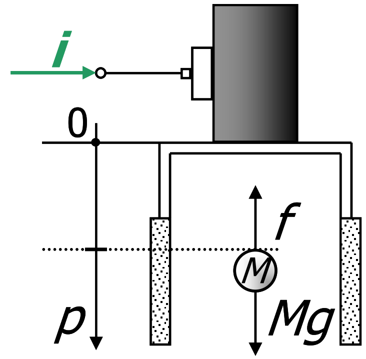
  $\Rightarrow$ l'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_1) = 0$, mentre l'altro autovalore $\lambda_2 = -1$ ha $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_2) = -1 < 0$

  $\Rightarrow$ con il metodo di linearizzazione, non si può dire nulla sulla stabilità locale dello stato di equilibrio $\bar{x}^{(c)}$ (con altri metodi, se ne può dimostrare l'instabilità)
- Si parla di studio della stabilità "locale" perché tale proprietà riguarda solo un intorno del particolare stato d'equilibrio considerato e non l'intero sistema

Esempio #2 di analisi della stabilità (1/2)

- Dato il sistema (levitatore magnetico) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = g - (k_i/M)\,u^2/x_1^2 & = f_2(x,u) \end{cases}$$
$$y = x_1 \qquad = g(x,u)$$



analizzarne le proprietà di stabilità locale

nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k_i}{Mg}}\,|\bar{u}| \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} \neq 0\right)$

- La matrice di stato del sistema linearizzato vale:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k_i\bar{u}^2}{M\bar{x}_1^3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{|\bar{u}|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}} & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio #2 di analisi della stabilità (2/2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{|\bar{u}|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p.c.(A) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{2g}{|\bar{u}|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{2g}{|\bar{u}|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}}$$

$$\Rightarrow \{\lambda_i(A)\} = \left\{ \sqrt{\frac{2g}{|\bar{u}|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}}}, -\sqrt{\frac{2g}{|\bar{u}|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}}} \right\} = \{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A))\}$$

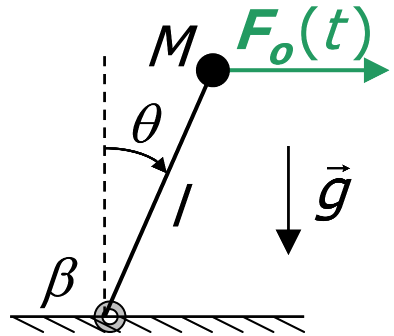
- L'autovalore $\lambda_1 = \sqrt{\frac{2g}{|\bar{u}|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}}}$ ha $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_1) = \sqrt{\frac{2g}{|\bar{u}|}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}}} > 0$

  $\Rightarrow$ gli stati di equilibrio $\bar{x}$ sono tutti instabili, $\forall \bar{u} \neq 0$

Esempio #3 di analisi della stabilità (1/6)

- Dato il sistema (pendolo inverso) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} & = f_2(x,u) \\ y = x_1 & = g(x,u) \end{cases}$$



analizzarne le proprietà di stabilità locale nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0\right)$

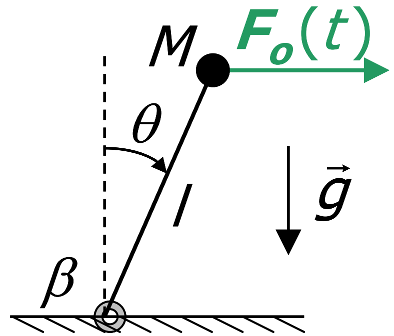
- La matrice di stato del sistema linearizzato vale:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l}\cos\bar{x}_1 - \dfrac{\bar{u}\sin\bar{x}_1}{Ml} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Esempio #3 di analisi della stabilità (2/6)

- Dato il sistema (pendolo inverso) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} & = f_2(x,u) \\ y = x_1 & = g(x,u) \end{cases}$$



analizzarne le proprietà di stabilità locale

nell'intorno dei punti di equilibrio $\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0\right)$

- La matrice di stato del sistema linearizzato vale:

$$k \text{ pari} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\dfrac{g}{l} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix},\ k \text{ dispari} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Esempio #3 di analisi della stabilità (3/6)

- Per k pari e $\beta \neq 0$ (pendolo verticale verso l'alto, in presenza di attrito):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\dfrac{g}{l} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$p.c.(A) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\dfrac{g}{l} & \lambda + \dfrac{\beta}{Ml^2} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda \frac{\beta}{Ml^2} - \frac{g}{l}$$

Poiché $\dfrac{\beta}{Ml^2} > 0$ e $\dfrac{g}{l} > 0$, c'e una variazione di segno nei coefficienti di $p.c.(A) \Rightarrow$ per la regola di Cartesio, uno dei due autovalori della matrice A ha $\mathbb{R}e(\lambda_i) > 0$ $\Rightarrow$ gli stati di equilibrio $\bar{x}$ sono instabili

Esempio #3 di analisi della stabilità (4/6)

- Per k pari e $\beta = 0$ (pendolo verticale verso l'alto, in assenza di attrito):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p.c.(A) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\dfrac{g}{l} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \{\lambda_i(A)\} = \left\{ \sqrt{\frac{g}{l}}, -\sqrt{\frac{g}{l}} \right\} = \{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A))\}$$

L'autovalore $\lambda_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ ha $\mathbb{R}\mathrm{e}\,(\lambda_1) = \sqrt{\dfrac{g}{l}} > 0$

$\Rightarrow$ gli stati di equilibrio $\bar{x}$ sono instabili

Esempio #3 di analisi della stabilità (5/6)

- Per k dispari e $\beta \neq 0$ (pendolo verticale verso il basso, in presenza di attrito):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$p.c.(A) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \dfrac{g}{l} & \lambda + \dfrac{\beta}{Ml^2} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda \frac{\beta}{Ml^2} + \frac{g}{l}$$

Poiché $\dfrac{\beta}{Ml^2} > 0$ e $\dfrac{g}{l} > 0$, non ci sono variazioni di segno nei coefficienti di $p.c.(A)$ $\Rightarrow$ per la regola di Cartesio, i due autovalori di A hanno $\mathbb{R}e(\lambda_i) < 0$ $\Rightarrow$ gli stati di equilibrio $\bar{x}$ sono asintoticamente stabili

Esempio #3 di analisi della stabilità (6/6)

- Per k dispari e $\beta = 0$ (pendolo verticale verso il basso, in assenza di attrito):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p.c.(A) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{g}{l} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \{\, \lambda_i(A) \,\} = \left\{ \sqrt{\frac{g}{l}}\, j, -\sqrt{\frac{g}{l}}\, j \right\} \Rightarrow \{\, \mathbb{R}\mathrm{e}\big(\lambda_i(A)\big) \,\} = \{\, 0, 0 \,\}$$

$\Rightarrow$ con il metodo di linearizzazione, non si può dire nulla sulla stabilità locale degli stati di equilibrio $\bar{x}$ (con altri metodi se ne dimostra la semplice stabilità)

Esempio #4 di analisi della stabilità (1/4)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.5x_1^2(k) + 0.5u(k) & = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = 0.5x_1^2(k) + 0.5x_2(k) & = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = 0.5x_1(k)x_2(k) \qquad = g(x,u)$$

  determinare gli stati d'equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti agli ingressi d'equilibrio $\bar{u} = 1$ e $\bar{u} = 0$, analizzandone le rispettive proprietà di stabilità locale

- All'equilibrio, $x(k+1) = x(k) = \bar{x} = f(\bar{x},\bar{u}),\ \forall k \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0.5\bar{x}_1^2 + 0.5\bar{u} \\ \bar{x}_2 = 0.5\bar{x}_1^2 + 0.5\bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_1 + \bar{u} = 0 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 \end{cases}$$

Esempio #4 di analisi della stabilità (2/4)

- Nel caso $\bar{u} = 0$, all'equilibrio risulta

$$\begin{cases} \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_1 + \bar{u} = \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_1 = \bar{x}_1(\bar{x}_1 - 2) = 0 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ gli stati d'equilibrio corrispondenti sono

$$\bar{x} = \bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \bar{x} = \bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Nel caso $\bar{u} = 1$, all'equilibrio risulta

$$\begin{cases} \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_1 + \bar{u} = \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_1 + 1 = (\bar{x}_1 - 1)^2 = 0 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ lo stato d'equilibrio corrispondente è $\bar{x} = \bar{x}^{(c)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esempio #4 di analisi della stabilità (3/4)

- La matrice di stato del sistema linearizzato vale:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & 0 \\ \bar{x}_1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Nel caso di $\bar{x} = \bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, risulta $A = A^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \{ \lambda_i(A) \} = \{ 0, 0.5 \} = \{ |\lambda_i(A)| \}$

$\Rightarrow$ entrambi gli autovalori di A hanno $|\lambda_i| < 1$

$\Rightarrow$ lo stato di equilibrio $\bar{x}^{(a)}$ è asintoticamente stabile

Esempio #4 di analisi della stabilità (4/4)

- Nel caso di $\bar{x} = \bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, risulta $A = A^{(b)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow \{ \lambda_i(A) \} = \{ 2, 0.5 \} = \{ |\lambda_i(A)| \}$

  $\Rightarrow$ l'autovalore $\lambda_1 = 2$ ha $|\lambda_1| = 2 > 1$

  $\Rightarrow$ lo stato di equilibrio $\bar{x}^{(b)}$ è instabile

- Nel caso di $\bar{x} = \bar{x}^{(c)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, risulta $A = A^{(c)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow \{ \lambda_i(A) \} = \{ 1, 0.5 \} = \{ |\lambda_i(A)| \}$

  $\Rightarrow$ l'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha $|\lambda_1| = 1$, mentre l'altro autovalore $\lambda_2 = 0.5$ ha $|\lambda_2| = 0.5 < 1$

  $\Rightarrow$ con il metodo di linearizzazione, non si può dire nulla sulla stabilità locale dello stato di equilibrio $\bar{x}^{(c)}$

Esempio #5 di analisi della stabilità (1/3)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \quad = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k) \quad = g(x,u)$$

analizzarne le proprietà di stabilità locale nell'intorno di $\left(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right)$ e $\left(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right), c \in \mathbb{R}$

- La matrice di stato del sistema linearizzato vale:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,\bar{u})}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{u}+\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ 0 & -\bar{u}+6\bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

Esempio #5 di analisi della stabilità (2/3)

- Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x,u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \quad = f_2(x,u) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k) \quad = g(x,u)$$

analizzarne le proprietà di stabilità locale nell'intorno di $\left(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right)$ e $\left(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5\right), c \in \mathbb{R}$

- La matrice di stato del sistema linearizzato vale:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{u}+\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ 0 & -\bar{u}+6\bar{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(a)} \Rightarrow A = A^{(a)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \\ \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(b)} \Rightarrow A = A^{(b)} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Esempio #5 di analisi della stabilità (3/3)

- Nel caso di $\bar{x} = \bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, risulta $A = A^{(a)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow \{\, \lambda_i(A) \,\} = \{\, 0.5, -0.5 \,\} \quad \Rightarrow \{\, |\lambda_i(A)| \,\} = \{\, 0.5, 0.5 \,\}$

  $\Rightarrow$ entrambi gli autovalori di A hanno $|\lambda_i| < 1$

  $\Rightarrow$ lo stato di equilibrio $\bar{x}^{(a)}$ è asintoticamente stabile

- Nel caso di $\bar{x} = \bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}$, risulta $A = A^{(b)} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow \{\, \lambda_i(A) \,\} = \{\, 1, 2.5 \,\} = \{\, |\lambda_i(A)| \,\}$

  $\Rightarrow$ l'autovalore $\lambda_2 = 2.5$ ha $|\lambda_2| = 2.5 > 1$

  $\Rightarrow$ lo stato di equilibrio $\bar{x}^{(b)}$ è instabile