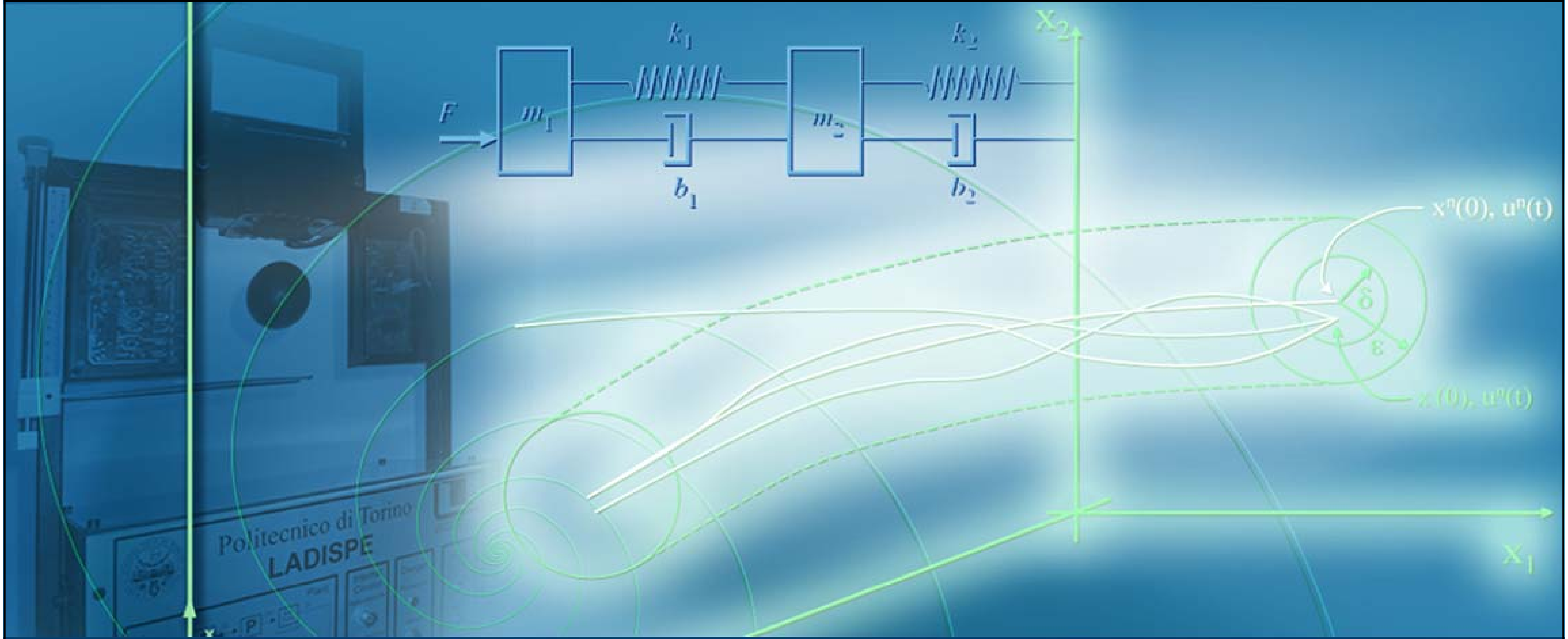


Fondamenti di Automatica

Modellistica dei sistemi dinamici a tempo discreto

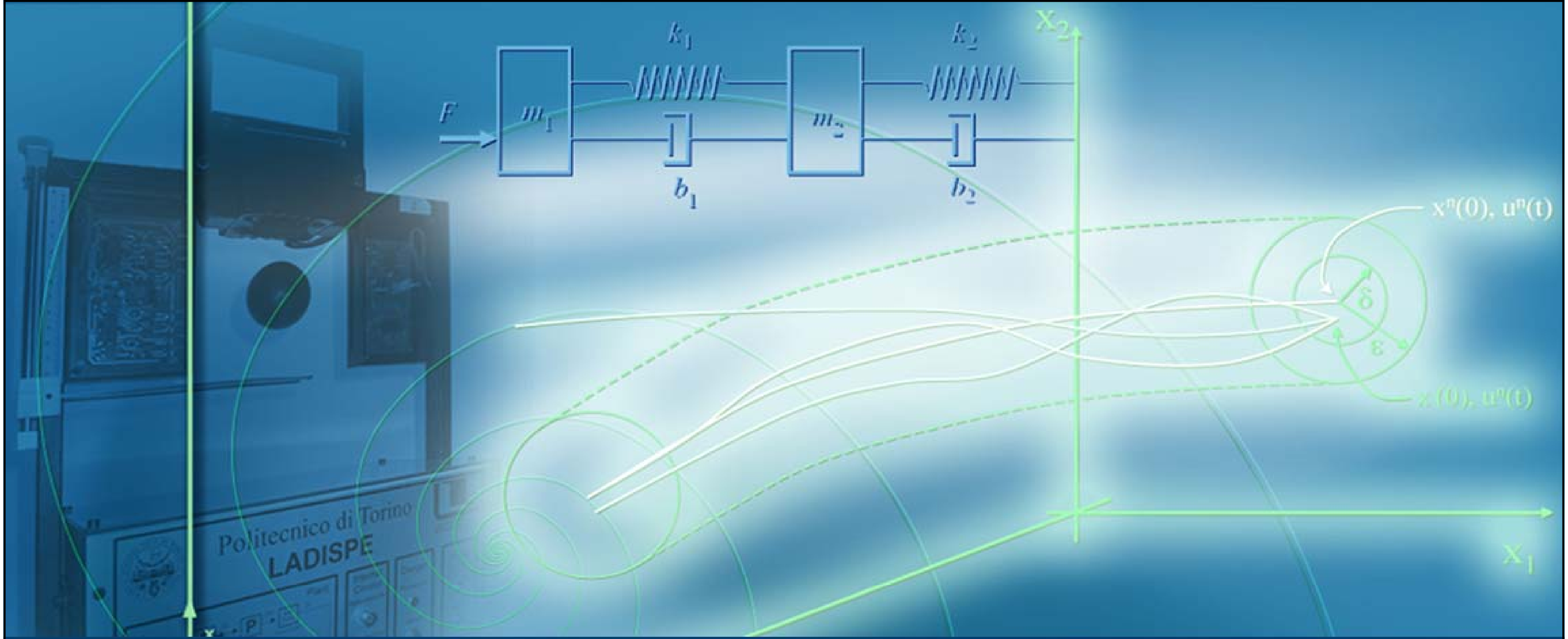
Sistemi dinamici a tempo discreto

- I sistemi dinamici a tempo discreto sono sistemi in cui tutte le grandezze variabili sono funzioni della variabile indipendente temporale *k* che è intera.
- I sistemi dinamici a T.D. sono descritti dalle seguenti *equazioni di stato* ed *equazioni d'uscita*:

$$
\boxed{\begin{aligned} x_i(k+1) &= f_i(k, x(k), u(k)) \\ y_l(k) &= g_l(k, x(k), u(k)) \end{aligned}}
$$

Modellistica di sistemi dinamici a T.D.

- Sistemi dinamici a classi di età
  - Esempio #1: parco macchine
  - Esempio #2: popolazione studentesca
- Sistemi dinamici a dati campionati



Sistemi dinamici a tempo discreto

“Sistemi dinamici a classi di età”

Sistemi dinamici a classi di età

- I **modelli a classi di età** sono utilizzati per studiare l'evoluzione temporale di determinate "classi di popolazione" in periodi di tempo fissati.
- In questi sistemi la componente i-esima dello stato $x_i(k)$ rappresenta la numerosità della popolazione della classe *i* nel periodo *k* considerato.
- L'evoluzione di ogni classe considerata dal periodo *k* al successivo periodo *k+1* avviene tenendo conto:

  - del **tasso di mortalità** ($0 \leq \gamma_i \leq 1$) e

  - del **tasso di sopravvivenza** ($0 \leq 1 - \gamma_i \leq 1$)

Esempio #1: *Parco macchine (1/7)*

- $x_i(k)$ rappresenta il numero di macchine nel parco nell'anno *k* aventi "età *i*", ovvero aventi età compresa fra *i*-1 anni e *i* anni.

$$\boxed{i-1 \le età\{x_i(k)\} \le i}$$

- $u(k)$ rappresenta il numero di macchine nuove che vengono acquistate nell'anno *k*

Esempio #1: *Ipotesi semplificative (2/7)*

- Non vengono acquistate auto usate. Quindi, il sistema ha un unico ingresso, dato dal numero di auto nuove comprate $u(k)$.

- Non si conservano auto più vecchie di 3 anni.

- Il tasso di mortalità γ_i è in generale diverso per le varie classi, ma è costante nel tempo.

Esempio #1: *Eqz di stato (3/7)*

- Primo anno:

$$\boxed{x_1(k+1) = u(k)}$$

- Secondo anno:

$$\boxed{x_2(k+1) = x_1(k) - \gamma_1 x_1(k) = (1-\gamma_1)x_1(k)}$$

- Terzo anno:

$$\boxed{x_3(k+1) = x_2(k) - \gamma_2 x_2(k) = (1-\gamma_2)x_2(k)}$$

Esempio #1: *Eqz di uscita (4/7)*

- Si desidera conoscere:

  1. Il numero totale di auto presenti nel parco nell’anno k

  2. Il costo totale di assicurazione del parco auto

Esempio #1: *Eqz di uscita (5/7)*

- Il numero totale di auto presenti nel parco nell'anno *k* è dato dalla somma delle auto delle tre diverse classi presenti nel parco.

$$\boxed{y_1(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k)}$$

- Il costo totale di assicurazione è dato dalla somma di tutti i costi di assicurazione annuali nel parco.

$$\boxed{y_2(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + c_3 x_3(k)}$$

in cui c_i è il costo di assicurazione di ogni auto delle classi di età *i*.

Esempio #1: *Conclusione (6/7)*

- Si ricava così un sistema dinamico, a tempo discreto, a dimensione finita, lineare, invariante nel tempo, proprio, rappresentabile nella forma delle variabili di stato:

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}}$$

Esempio #1: *Conclusione (7/7)*

Con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad D = [0]$$

Esempio #2: *Popolazione universitaria* (1/7)

- Si vuole ricavare un modello matematico che permetta di descrivere la popolazione universitaria di un corso di laurea di I livello.

- $x_i(k)$ rappresenta il numero di allievi che al tempo *k* (inteso come anno accademico, a.a.) appartengono alla classe *i*-esima (inteso come anno di studio).

Esempio #2: *Ipotesi semplificative (2/7)*

- Gli allievi non abbandonano l'università prima di averla terminata.
- Non esistono allievi provenienti da altre università che si inscrivono direttamente al secondo e al terzo anno. In questo modo l'unico ingresso è rappresentato dalle matricole, che fanno domanda di preimmatricolazione un anno prima.
- La percentuale γ_i di bocciati è in generale diversa per le varie classi, ma è costante nel tempo.

Esempio #2: *Altre considerazioni (3/7)*

- Si indichi con *k* l'anno accademico attuale.

- Per la seconda ipotesi, $u(k)$ rappresenta il numero di allievi che si iscrivono all'università facendo domanda di preimmatricolazione nell' a. a. *k* e che quindi frequenteranno effettivamente il primo anno universitario nell' a. a. *k+1.*

Esempio #2: *Eqz di stato (4/7)*

- Primo anno:

$$x_1(k+1) = \gamma_1 x_1(k) + u(k)$$

- Secondo anno:

$$x_2(k+1) = (1-\gamma_1)x_1(k) + \gamma_2 x_2(k)$$

- Terzo anno:

$$x_3(k+1) = (1-\gamma_2)x_2(k) + \gamma_3 x_3(k)$$

Esempio #2: *Eqz di uscita (5/7)*

- Interessa conoscere il numero degli studenti che si diplomano al termine dei 3 anni di studio.

- La relazione di uscita è così rappresentata dal prodotto del tasso di sopravvivenza al terzo anno per il numero di allievi del terzo anno:

$$\boxed{y(k) = (1-\gamma_3)x_3(k)}$$

Esempio #2: *Conclusione (6/7)*

- Si ricava così un sistema dinamico, a tempo discreto, a dimensione finita, lineare, invariante nel tempo, proprio, rappresentabile nella forma delle variabili di stato:

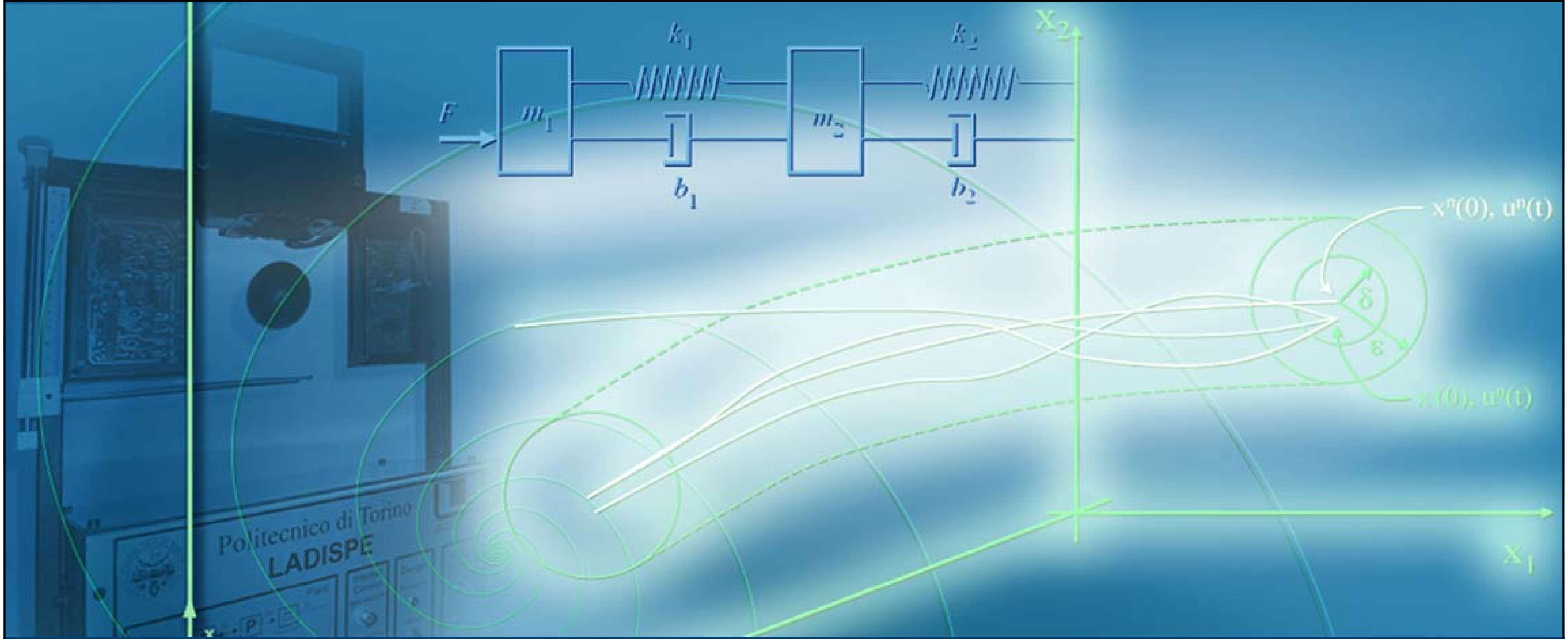
$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}}$$

Esempio #2: *Conclusione (7/7)*

Con le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 1-\gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 1-\gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-\gamma_3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

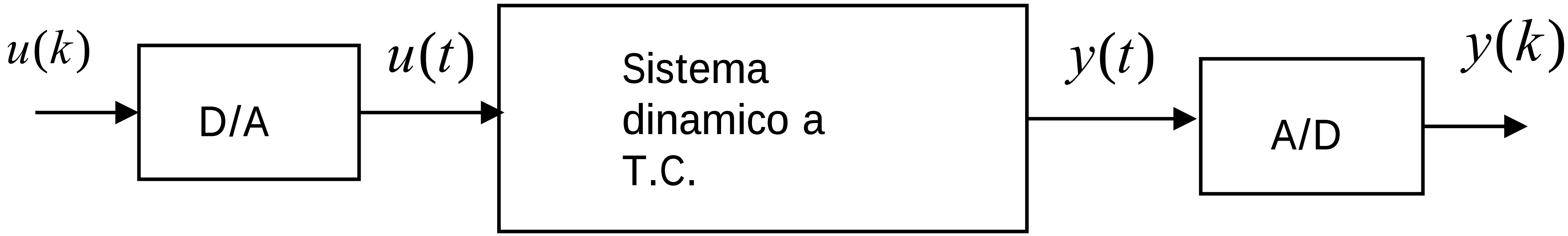


Sistemi dinamici a tempo discreto

“Sistemi dinamici a dati campionati”

Sistemi dinamici a dati campionati

- Per i **sistemi dinamici a dati campionati** l'ingresso discreto $u(k)$ viene ricostruito attraverso un convertitore D/A. Successivamente il segnale $u(t)$ viene elaborato dal sistema dinamico a T.C. che fornisce l'uscita $y(t)$. Infine, quest'ultima viene discretizzata nel segnale $y(k)$.



Discretizzazione(1/4)

- Per i sistemi a dati campionati è importante capire come avviene il processo di discretizzazione di un sistema a tempo continuo.
- Discretizzare vuol dire convertire un modello a tempo continuo in un modello a tempo discreto.
- Il processo di discretizzazione avviene attraverso un convertitore A/D che fa da campionatore con un passo di campionamento T_s .

Discretizzazione(2/4)

- La discretizzazione di un sistema a tempo continuo corrisponde a studiare l'evoluzione degli stati valutati negli istanti di campionamento.
- Quindi, nel processo di discretizzazione partiamo dalle matrici A,B,C,D del sistema a tempo continuo per arrivare a trovare le matrici A_d, B_d, C_d, D_d di un sistema a tempo discreto.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

con $k = i \cdot T_s$

Discretizzazione (3/4)

- Si ipotizza che l'ingresso $u(t)$ sia costante tra un istante di campionamento e l'altro.

$$u(\tau) = \text{costante} = u(i \cdot T_s) \quad \text{per} \quad i \cdot T_s \le \tau \le (i+1) \cdot T_s$$

- Si consideri la formula di Lagrange:

$$\boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_0^t e^{A(t-t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

$$t_0 = i \cdot T_s = k$$

$$t = (i+1) \cdot T_s = k+1$$

$$x(t_0) = x(i \cdot T_s) = x(k)$$

Discretizzazione (4/4)

- Si ottiene:

$$x(k+1) = e^{AT_s}x(k) + \left(\int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)}d\tau\right)Bu(k)$$

- quindi:

$$A_d = e^{AT_s}$$

$$B_d = B \cdot \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)}d\tau$$

- Poiché il legame con l'uscita dello stato e dell'ingresso è di tipo statico, si ha:

$$C_d = C$$

$$D_d = D$$

Conclusione

- L’analisi del processo di discretizzazione verrà ripreso e approfondito nel corso di ‘Controlli Automatici’ attraverso lo studio di alcune tecniche per la discretizzazione del controllore.