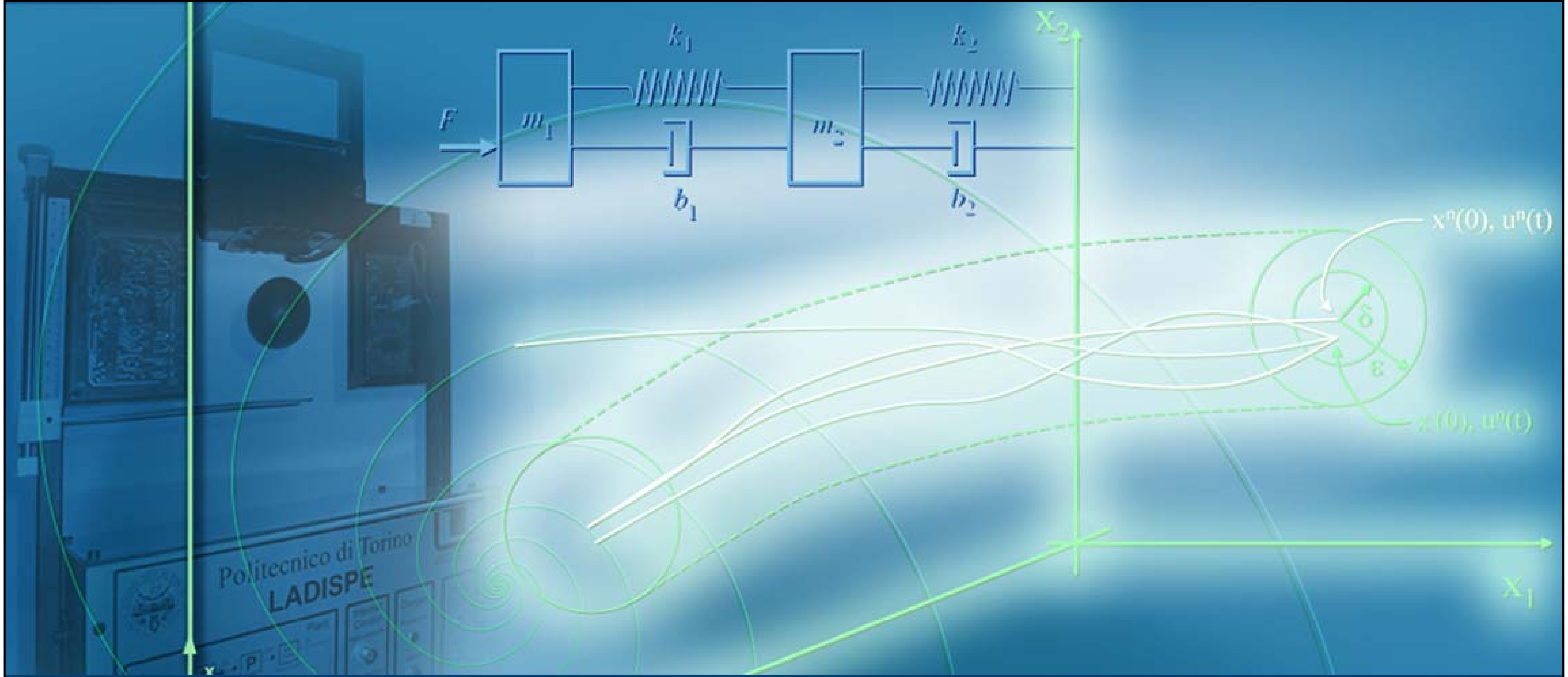
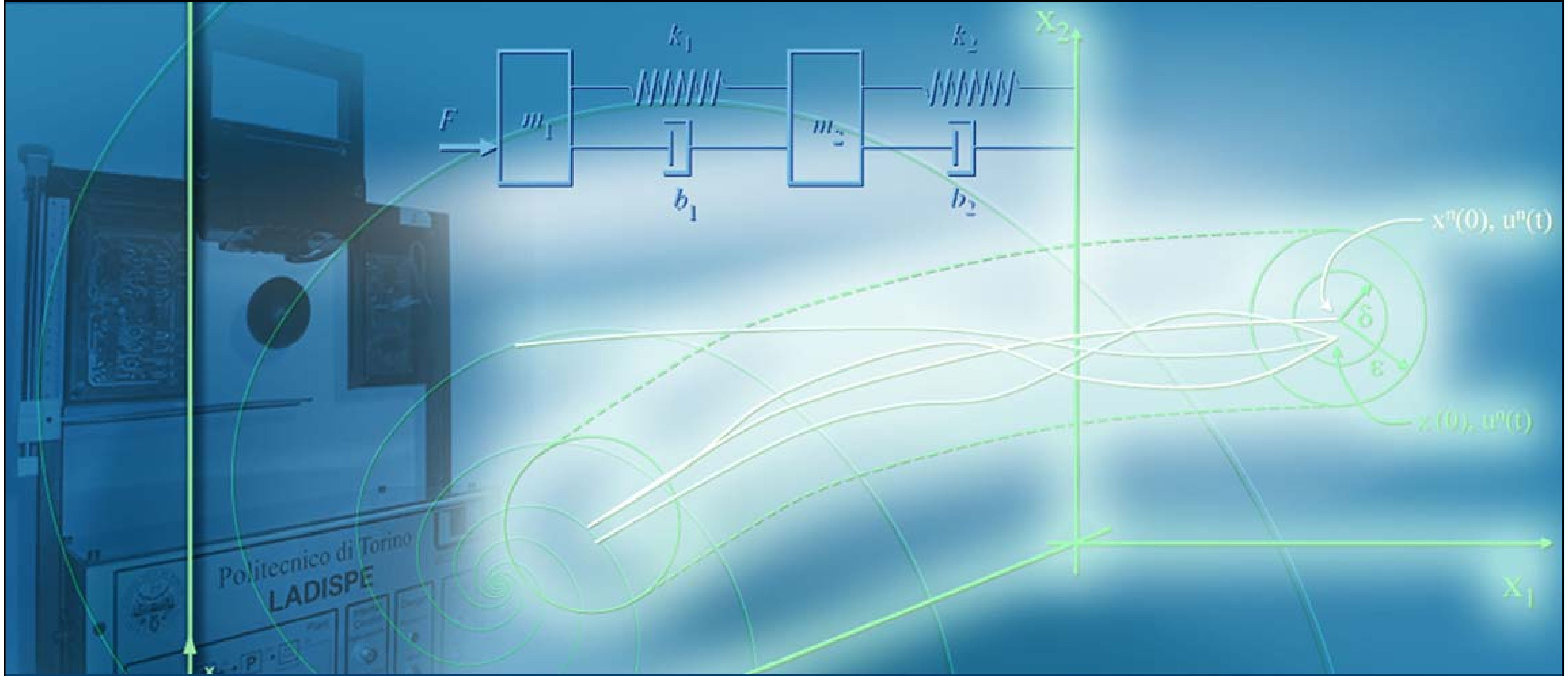


Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

- Richiami sull'analisi modale
- Modi naturali e analisi modale per sistemi LTI TD
- Esercizio 1
- Esercizio 2



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

Richiami sull'analisi modale

Analisi modale: richiami (1/3)

- Ricordiamo che:
  - Con l'**analisi modale** si possono studiare le proprietà del movimento libero di un sistema dinamico LTI
  - Tale studio viene condotto sulla base del comportamento dei **modi naturali** del sistema al tendere del tempo all'infinito
  - La forma dei modi naturali dipende dalle caratteristiche degli autovalori della matrice *A* del sistema dinamico

Analisi modale: richiami (2/3)

- Per condurre l'analisi modale di sistemi LTI occorre:
  - Determinare l'espressione analitica dei modi naturali corrispondenti a diverse caratteristiche degli autovalori del sistema
  - Valutare il comportamento dei modi naturali al tendere del tempo all'infinito

Analisi modale: richiami (3/3)

- Anche per i modi naturali $m(k)$ di sistemi dinamici LTI TD, definiti per $k \geq 0$, valgono le definizioni:
  - **Convergente** se:

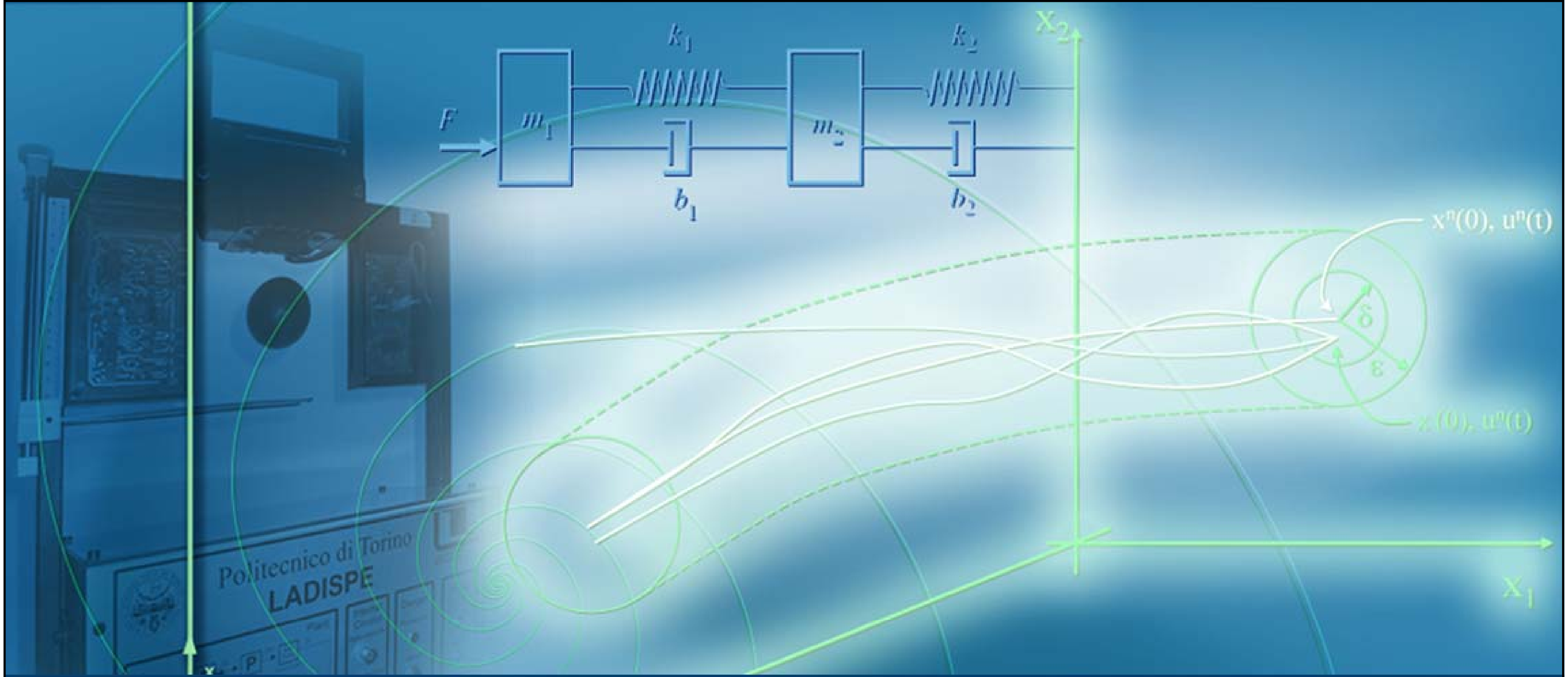
$$\boxed{\lim_{k\to\infty} |m(k)| = 0}$$

  - **Limitato** se $\exists\ M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall k \geq 0$ risulti:

$$\boxed{0 \leq |m(k)| \leq M < \infty}$$

  - **Divergente** se:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} |m(k)| = \infty}$$



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

Modi naturali e analisi modale per sistemi LTI TD

Movimento libero

- Il movimento libero $x_\ell(k)$ di un sistema dinamico LTI TD di ordine n descritto dall'equazione di stato:

$$\boxed{x(k+1) = A\,x(k)}$$

con $x(k) \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

è dato da:

$$\boxed{x_\ell(k) = A^k x(0)}$$

essendo $x(0) \in \mathbb{R}^n$ uno stato iniziale noto

Forma di Jordan (1/2)

- Per evidenziare i modi naturali associati alle varie tipologie di autovalori occorre calcolare A^k
- Il calcolo di A^k è immediato solo se A è diagonale
- In ogni caso, è possibile semplificare la procedura di determinazione dei modi naturali poiché:

$$\boxed{A^k = T\tilde{A}^k T^{-1}}$$

  - T è una matrice costante
  - $\tilde{A}$ è una matrice in forma di Jordan (diagonale oppure diagonale a blocchi)

Forma di Jordan (2/2)

- La forma di Jordan di una matrice quadrata avente q autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ di molteplicità $\mu_1, \ldots, \mu_q$ è una matrice diagonale a blocchi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{A}_q \end{bmatrix}$$

- I **blocchi di Jordan** $\tilde{A}_i$ sono matrici quadrate associate all'i-esimo autovalore λ_i, aventi dimensione μ_i x μ_i

Potenza di matrice

- La potenza di una matrice in forma di Jordan è data da una forma diagonale a blocchi del tipo:

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^{\,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2^{\,k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{A}_q^{\,k} \end{bmatrix}$$

dove i blocchi $\tilde{A}_i^k$ hanno forma diversa a seconda delle caratteristiche degli autovalori di A

Movimento libero e forma di Jordan

- Si ha:

$$\boxed{x_\ell(k) = A^k x(0) = T\tilde{A}^k T^{-1} x(0)}$$

- Poiché T e $x(0)$ sono costituite da numeri reali
  - L'espressione analitica di $x_\ell(k)$ è una combinazione lineare degli elementi della matrice $\tilde{A}^k$
  - La forma semplificata di $\tilde{A}$ (e quindi di $\tilde{A}^k$) permette di mettere immediatamente in evidenza la forma dei modi naturali
  - Si possono così analizzare in modo più immediato le proprietà qualitative del movimento libero $x_\ell(k)$

Calcolo dei modi naturali

- Studieremo ora, come cambia la forma dei blocchi della matrice $\tilde{A}^k$ al variare delle caratteristiche degli autovalori della matrice A
- Questo permetterà di:
  - Definire la forma dei modi naturali in base alle proprietà degli autovalori
  - Eseguire l'analisi modale del sistema
- Studieremo i seguenti casi:
  - Autovalori con molteplicità unitaria
  - Autovalori con molteplicità maggiore di uno

Autovalori $\mathbb{R}$ semplici

- I blocchi di $\tilde{A}^k$ corrispondenti ad autovalori reali e distinti hanno forma diagonale:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

e danno origine a modi naturali del tipo λ_i^k

Autovalori $\mathbb{R}$ semplici: analisi modale

- Il modo naturale λ^k, associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità unitaria, risulta:
  - **Geometricamente convergente** se $|\lambda| < 1$ (Es. 0.5^k, $(-0.5)^k$)
  - **Limitato** se $|\lambda| = 1$
    (Es. $1^k = 1$, $(-1)^k$)
  - **Geometricamente divergente** se $|\lambda| > 1$ (Es. 2^k, $(-2)^k$)
- Si noti che, se $\mathbb{R}e(\lambda) < 0$, il modo corrispondente origina una sequenza di campioni (**modo alternato**) il cui segno cambia ad ogni passo

Autovalori $\mathbb{C}$ semplici

- I blocchi di $\tilde{A}^k$ corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi coniugati con molteplicità unitaria del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega = \nu e^{\pm j\theta}$ hanno la forma:

$$\boxed{\upsilon^k \begin{bmatrix} \cos(\theta k) & \sin(\theta k) \\ -\sin(\theta k) & \cos(\theta k) \end{bmatrix}}$$

e danno origine a modi naturali oscillanti della forma $\nu^k \cos(\theta k)$, $\nu^k \sin(\theta k)$

Autovalori $\mathbb{C}$ semplici: analisi modale

- I modi naturali della forma $\nu^k\cos(\theta k)$, $\nu^k\sin(\theta k)$, associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati di molteplicità unitaria del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega = \nu e^{\pm j\theta}$ sono:
  - **Geometricamente convergenti**
    se $|\lambda| = \nu < 1$ (Es. $0.5^k\sin(k)$)
  - **Limitati (oscillanti)**
    se $|\lambda| = \nu = 1$, $\mathrm{Arg}(\lambda) = \theta \neq 0$ (Es. $\sin(5k)$)
  - **Geometricamente divergenti**
    se $|\lambda| = \nu > 1$ (Es. $1.5^k\sin(k)$)

Autovalori $\mathbb{R}$ multipli

- I blocchi di $\tilde{A}^k$ corrispondenti ad un autovalore reale λ con molteplicità μ sono matrici diagonali a blocchi contenenti sottomatrici triangolari del tipo:

$$\begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^k & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu'-2)}{(\mu'-1)!}\lambda^{k-\mu'-1} \\ 0 & \lambda^k & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu'-3)}{(\mu'-2)!}\lambda^{k-\mu'-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

e danno origine a $\mu' \leq \mu$ modi naturali contenenti termini del tipo $k^{\mu'}\lambda^k$, …, $k\lambda^k$, λ^k

Autovalori $\mathbb{R}$ multipli: analisi modale

- I μ' modi naturali contenenti termini del tipo $k^{\mu'}\lambda^k$, …, $k\lambda^k$, λ^k, associati ad un autovalore reale λ con molteplicità μ sono:
  - **Geometricamente convergenti** se $|\lambda| < 1$ (Es. $k\cdot 0.5^k$, $k\cdot(-0.5)^k$)
  - **Polinomialmente divergenti** se $|\lambda| = 1$ (Es. $k\,1^k = k$)
  - **Geometricamente divergenti** se $|\lambda| > 1$ (Es. $k\cdot 1.5^k$, $k\cdot(-1.5)^k$)
- Anche in questo caso se $\mathbb{R}e(\lambda) < 0$ si hanno dei modi alternati

Autovalori $\mathbb{C}$ multipli

- I blocchi di $\tilde{A}^k$ corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi $\lambda = \sigma \pm j\omega = \nu e^{\pm j\theta}$ con molteplicità μ hanno una forma analoga al caso reale e danno origine, in generale, a $\mu' \leq \mu$ modi naturali oscillanti contenenti termini del tipo:

$$k^{\mu'}\nu^k\cos(\theta k),\ \ldots,\ k\nu^k\cos(\theta k)\,,\ \nu^k\cos(\theta k)$$
$$k^{\mu'}\nu^k\sin(\theta k),\ \ldots,\ k\nu^k\sin(\theta k)\,,\ \nu^k\sin(\theta k)$$

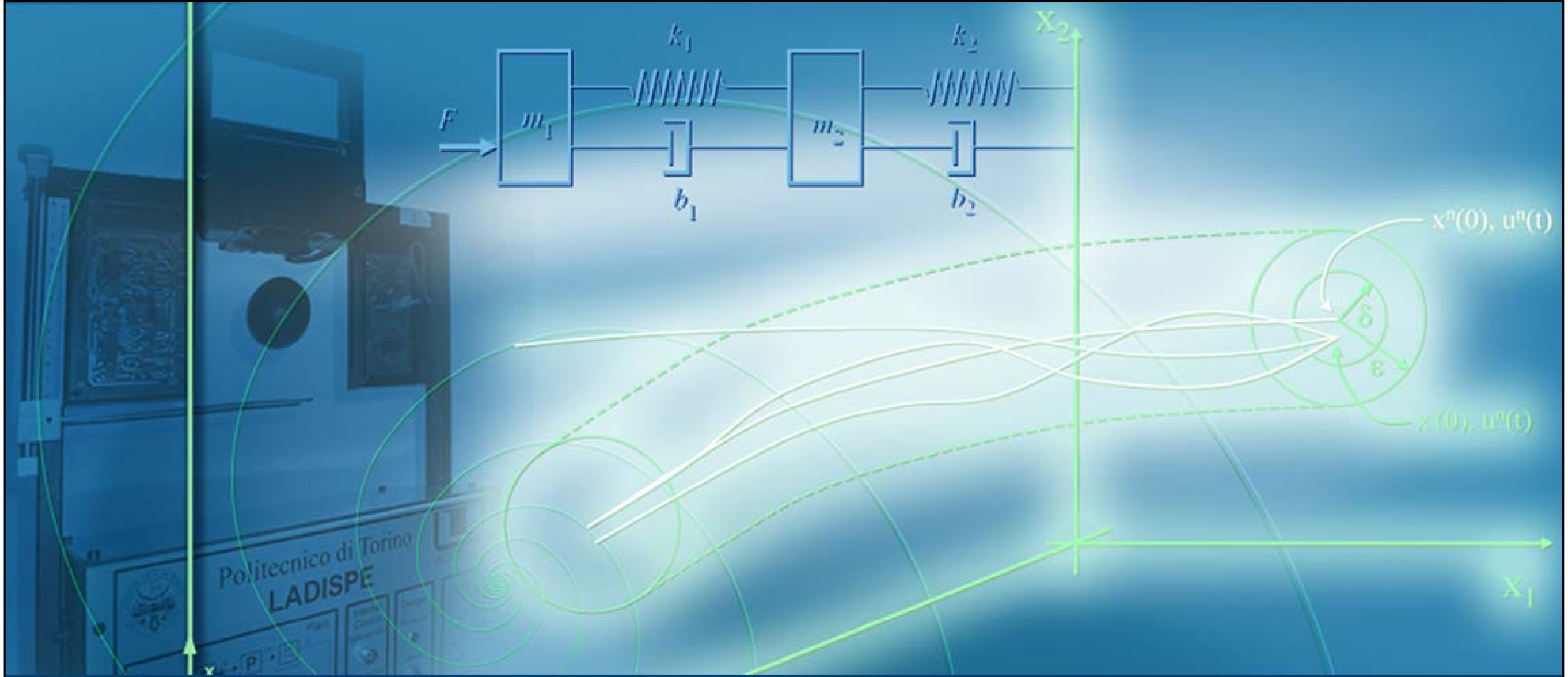
Autovalori $\mathbb{C}$ multipli: analisi modale

- I μ' modi naturali contenenti termini del tipo

  $k^{\mu'}\nu^k\cos(\theta k)$, …, $k\nu^k\cos(\theta k)$, $\nu^k\cos(\theta k)$

  $k^{\mu'}\nu^k\sin(\theta k)$, …, $k\nu^k\sin(\theta k)$, $\nu^k\sin(\theta k)$

  associati ad una coppia di autovalori complessi del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega = \nu e^{\pm j\theta}$ con molteplicità μ sono:
  - **Geometricamente convergenti**
    se $|\lambda| = \nu < 1$ (Es. $k\,0.5^k\sin(k)$)
  - **Polinomialmente divergenti**
    se $|\lambda| = \nu = 1$, $\mathrm{Arg}(\lambda) = \theta \neq 0$ (Es. $k\sin(5k)$)
  - **Geometricamente divergenti**
    se $|\lambda| = \nu > 1$ (Es. $k\,1.5^k\sin(k)$)



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

Esercizio 1

Formulazione del problema

- Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice *A*:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determinare le caratteristiche dei modi naturali

Soluzione: calcolo dei modi naturali

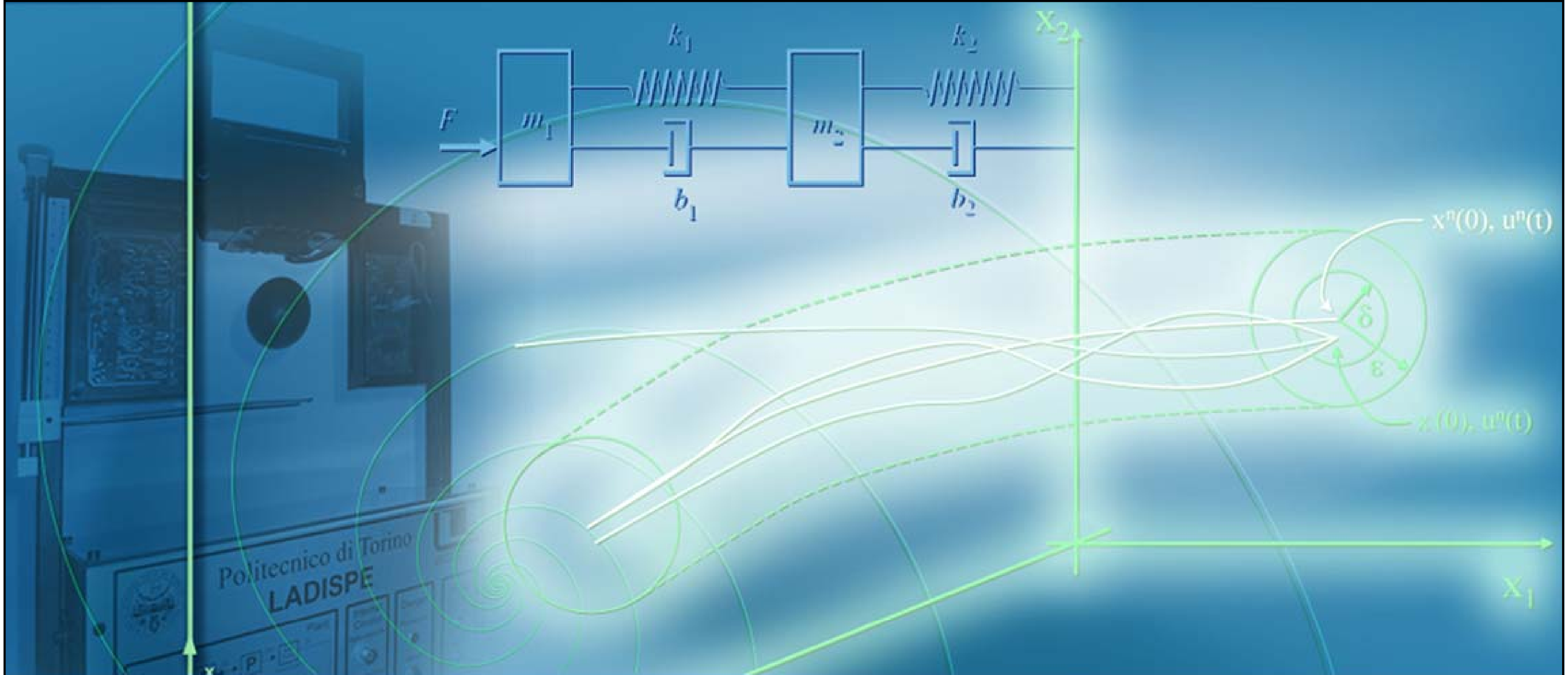
$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Poiché la matrice A risulta diagonale, gli autovalori si leggono direttamente sulla diagonale e sono: $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -0.4$, $\lambda_4 = 0$.
- Gli autovalori sono reali e distinti pertanto i corrispondenti modi naturali sono del tipo $\lambda_i{}^k$:

$\lambda_1 \rightarrow 0.1^k$, $\lambda_2 \rightarrow (-2)^k$, $\lambda_3 \rightarrow (-0.4)^k$, $\lambda_4 \rightarrow 0^k = \delta(k)$

Soluzione: analisi modale

- $0.1^k \rightarrow$ modo geometricamente convergente
- $(-2)^k \rightarrow$ modo geometricamente divergente (alternato)
- $(-0.4)^k \rightarrow$ modo geometricamente convergente (alternato)
- $0^k = \delta(k) \rightarrow$ modo geometricamente convergente (impulsivo $\rightarrow$ converge a zero in un passo)



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

Esercizio 2

Formulazione del problema

- Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice *A*:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Determinare le caratteristiche dei modi naturali

Soluzione: calcolo degli autovalori

A_{11}

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A_{22}

- Poiché la matrice A risulta diagonale a blocchi gli autovalori sono quelli delle sottomatrici A_{11} e A_{22}
- Per la sottomatrice A_{11} si ha $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.5j =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pm j \frac{5}{4}\pi}$$
- Per la sottomatrice A_{22} si ha $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 3$

Soluzione: analisi modale

- Il sistema presenta quattro autovalori distinti di cui due reali e due complessi coniugati
- I modi naturali corrispondenti sono:
  - $\lambda_{1,2} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \cos\left(\frac{5}{4}\pi k\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \sin\left(\frac{5}{4}\pi k\right)$

    $\rightarrow |\lambda_{1,2}| < 1$
    modi oscillanti geometricamente convergenti
  - $\lambda_3 \rightarrow (-1)^k \rightarrow |\lambda_3| = 1 \rightarrow$ modo limitato (alternato)
  - $\lambda_4 \rightarrow 3^k \rightarrow |\lambda_4| > 1 \rightarrow$ modo geometricamente divergente