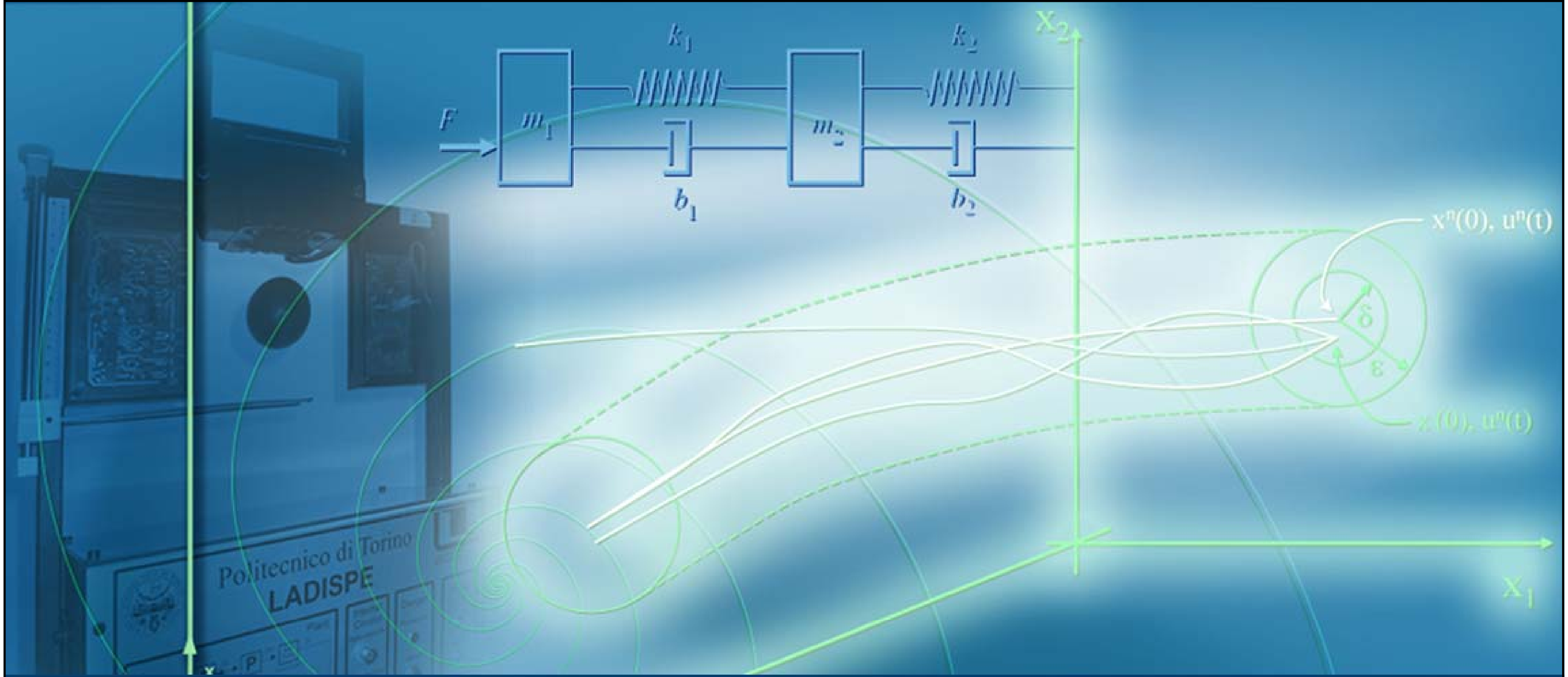
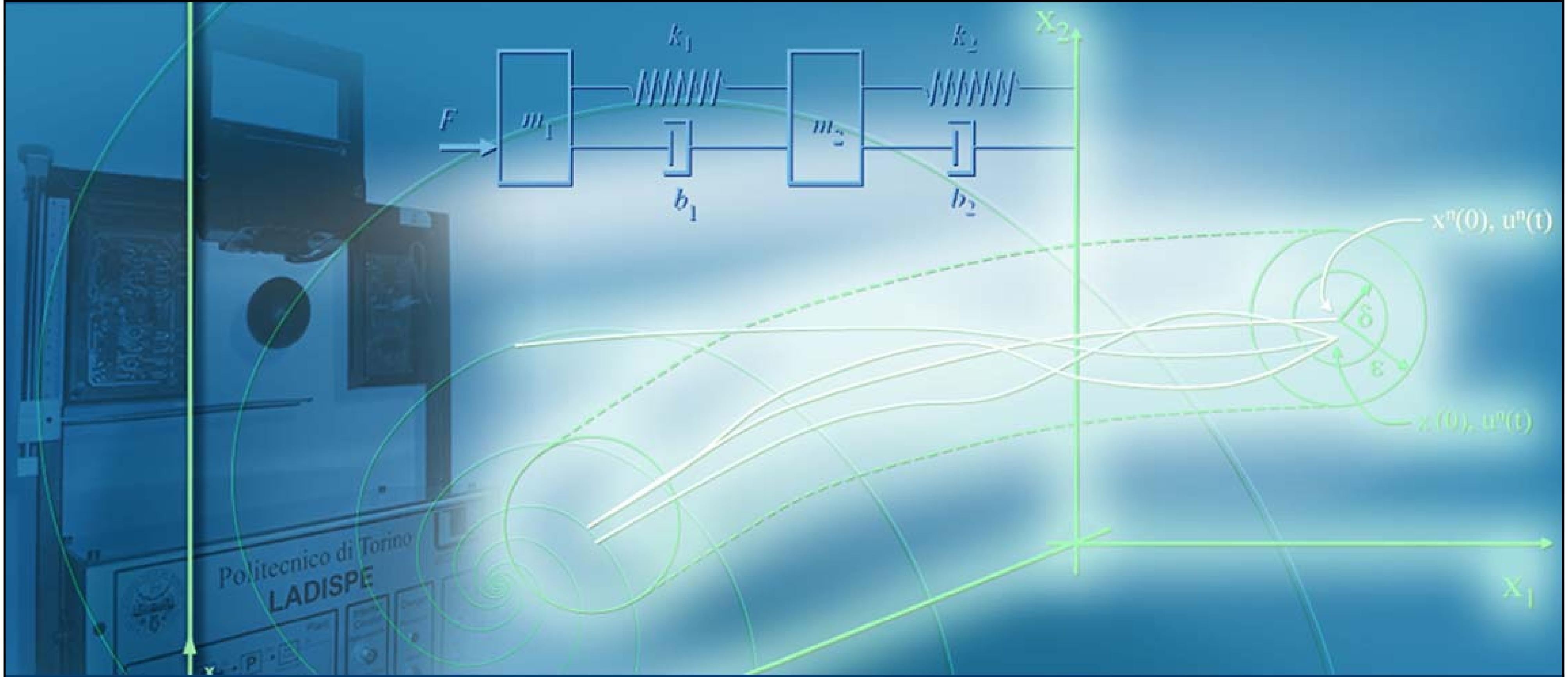


Fondamenti di Automatica

Unità 2
Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

- Soluzione delle equazioni di stato per sistemi dinamici LTI a tempo continuo
- Esempi di soluzione delle equazioni di stato per sistemi dinamici LTI a tempo continuo
- Analisi modale per sistemi dinamici LTI a tempo continuo
- Concetti di base sulla trasformata zeta
- Soluzione delle equazioni di stato per sistemi dinamici LTI a tempo discreto
- Analisi modale per sistemi dinamici LTI a tempo discreto

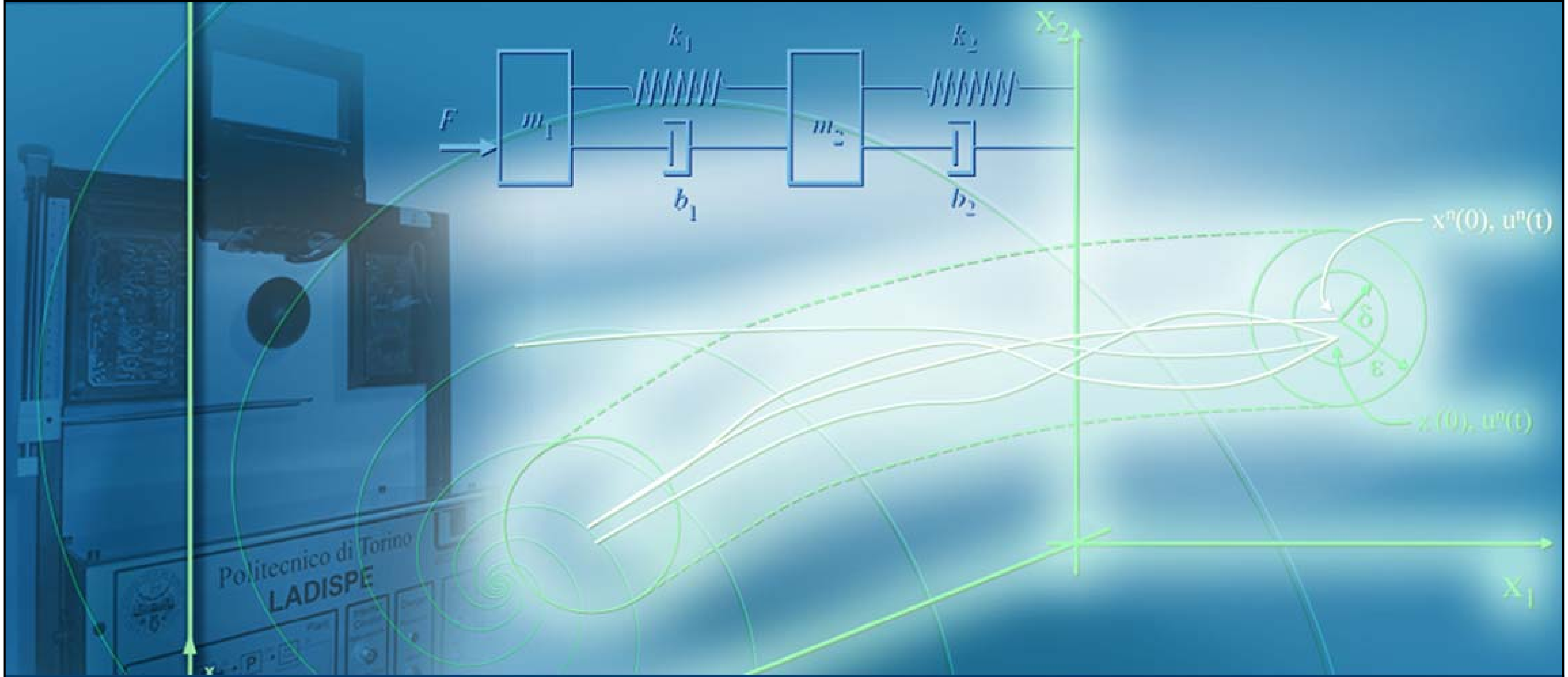


Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Soluzione delle equazioni di stato per sistemi dinamici LTI a tempo continuo

Soluzione delle equazioni di stato per sistemi dinamici LTI a tempo continuo

- Soluzione nel dominio della frequenza “*s*” (trasformata di Laplace)
- Soluzione nel dominio del tempo (formula di Lagrange)



Soluzione nel dominio della frequenza “s”

Richiami sulla trasformata di Laplace

Richiami sulla trasformata di Laplace 1/6

Definizione

- Sia $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- La *trasformata (unilatera) di Laplace* è un operatore dallo spazio delle funzioni reali di variabile reale allo spazio delle funzioni complesse di variabile complessa *s* definita (quando esiste) da:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

Richiami sulla trasformata di Laplace 2/6

Linearità

- Siano $f_1(t)$ ed $f_1(t)$ due funzioni, aventi trasformata di Laplace $F_1(s)$ ed $F_2(s)$ rispettivamente e c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

  Allora:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)}$$

Richiami sulla trasformata di Laplace 3/6

Derivazione

- Sia $f(t)$ una funzione derivabile n volte e avente trasformata di Laplace $F(s)$. Allora:

$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = sF(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{f}(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0_-) - \dot{f}(0_-)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}\dot{f}(0_-) - \ldots - f^{(n-1)}(0_-)$$

Richiami sulla trasformata di Laplace 4/6

Integrazione

- Sia $f(t)$ una funzione integrabile e avente trasformata di Laplace $F(s)$. Allora :

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Ritardo nel tempo

- Sia $f(t)$ una funzione avente trasformata di Laplace $F(s)$. Allora:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = F(s)e^{-\tau s}$$

Richiami sulla trasformata di Laplace 5/6

Prodotto di convoluzione

- Siano $f_1(t)$ ed $f_1(t)$ due funzioni aventi trasformata di Laplace $F_1(s)$ ed $F_2(s)$ rispettivamente, allora il loro prodotto di convoluzione definito come:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{0_-}^{t} f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau = \int_{0_-}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

ammette trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

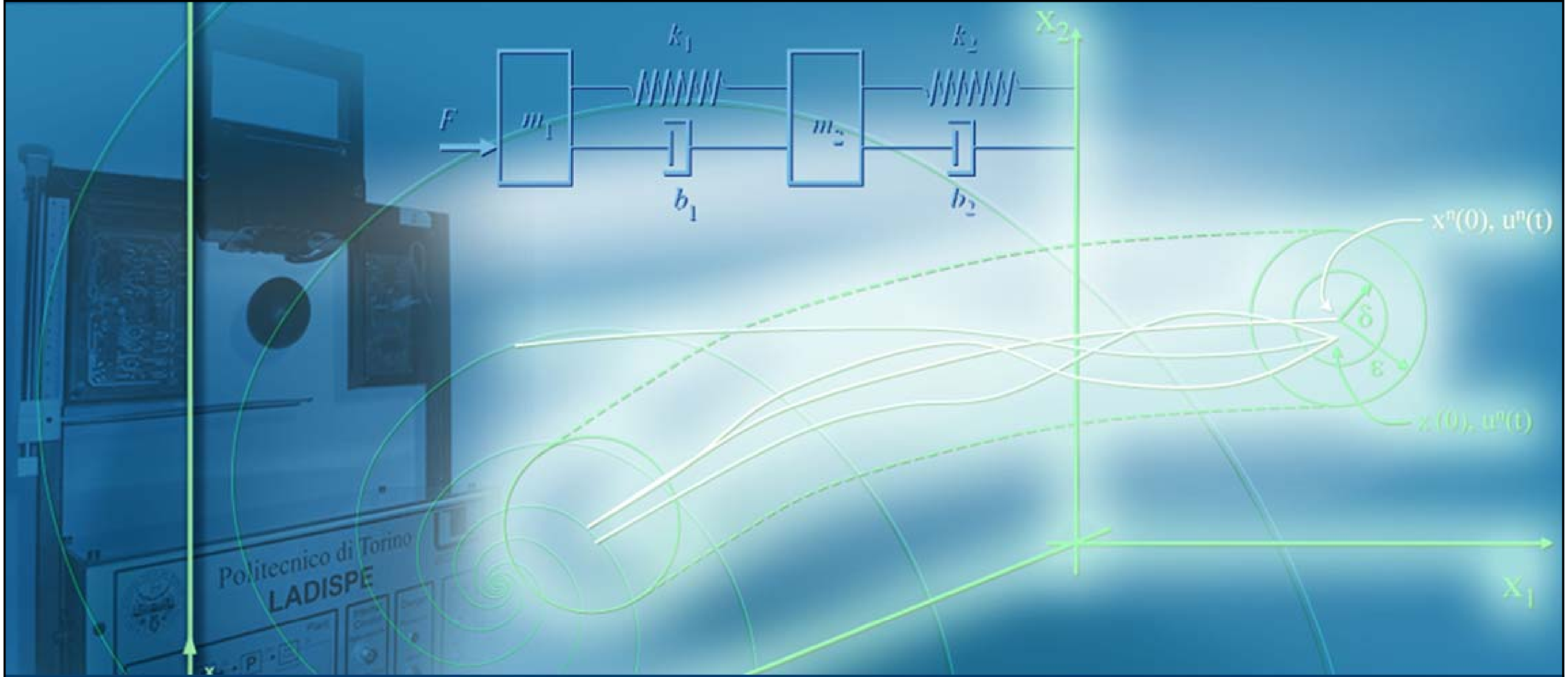
Richiami sulla trasformata di Laplace 6/6

Principali trasformate

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$

$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\dfrac{t^n e^{at}}{n!}$	$\dfrac{1}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$f(t)$	$F(s)$
e^{At}	$(sI-A)^{-1}$



Soluzione nel dominio della frequenza “s”

Calcolo della soluzione nel dominio della trasformata di Laplace

Descrizione di sistemi dinamici LTI TC

- Il comportamento dinamico di un sistema LTI TC è descritto dalle equazioni di ingresso – stato – uscita:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}}$$

- Si ricorda che:
  - $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$
  - $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxp}$, $C \in \mathbb{R}^{qxn}$, $D \in \mathbb{R}^{qxp}$

Il movimento di sistemi dinamici LTI TC

- Utilizzando le equazioni di stato:

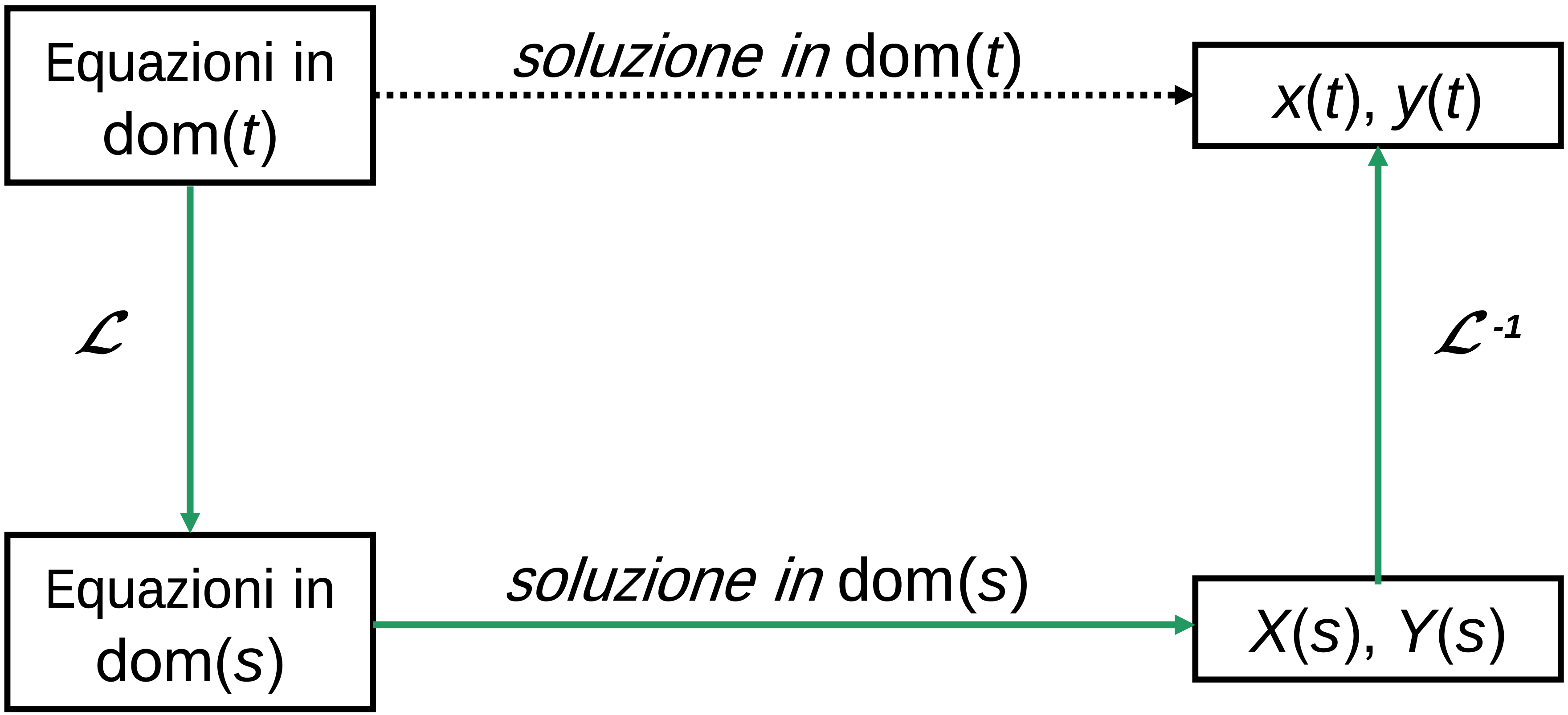
$$\boxed{\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)}$$

si vuole calcolare la soluzione $x(t)$ a partire da uno stato iniziale $x(t = 0_-) = x_0$ noto e a fronte di un andamento dell'ingresso $u(t)$ noto $\forall t \geq 0$.

- La soluzione $x(t)$ si indica con il termine **movimento dello stato**.

La soluzione nel dominio della frequenza “s” 1/5

- Il calcolo di $x(t)$ e $y(t)$ con la trasformata di Laplace avviene secondo lo schema:



La soluzione nel dominio della frequenza "s" 2/5

- La soluzione nel dominio della frequenza si ottiene trasformando le equazioni di ingresso - stato - uscita:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$\begin{cases} sX(s) - x(0_-) = AX(s) + B\,U(s) \\ Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) \end{cases}$$

e calcolando esplicitamente $X(s)$ e $Y(s)$.

La soluzione nel dominio della frequenza “s” 3/5

- Per il movimento dello stato si ottiene:

$$X(s) = \underbrace{\overbrace{(sI - A)^{-1}}^{H_0^x(s)} x(0\_)}_{\substack{MOVIMENTO\ LIBERO \\ = \mathcal{L}(x_\ell(t))}} + \underbrace{\overbrace{(sI - A)^{-1} B}^{H_f^x(s)} U(s)}_{\substack{MOVIMENTO\ FORZATO \\ = \mathcal{L}(x_f(t))}} =$$

$$= H_0^x(s) x(0\_) + H_f^x(s) U(s)$$

- Antitrasformando, $x(t)$ risulta pari alla somma di:

$$\boxed{x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)}$$

  - $x_\ell(t)$ **movimento libero** → dipende solo da $x(0\_)$
  - $x_f(t)$ **movimento forzato** → dipende solo da $u(t)$

La soluzione nel dominio della frequenza "s" 4/5

- L'andamento di $y(t)$, detto **movimento dell'uscita** o **risposta del sistema**, si ottiene trasformando l'equazione statica di uscita $y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$:

$$Y(s) = \underbrace{\overbrace{C\left(sI - A\right)^{-1}}^{H_0(s)} x(0\_)}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA} \\ =\mathcal{L}(y_\ell(t))}} + \underbrace{\overbrace{\left[C\left(sI - A\right)^{-1} B + D\right]}^{\substack{H(s)\rightarrow \text{ MATRICE DI} \\ \text{TRASFERIMENTO}}} U(s)}_{\substack{\text{RISPOSTA FORZATA} \\ =\mathcal{L}(y_f(t))}}$$

$$= H_0(s)x(0\_) + H(s)U(s)$$

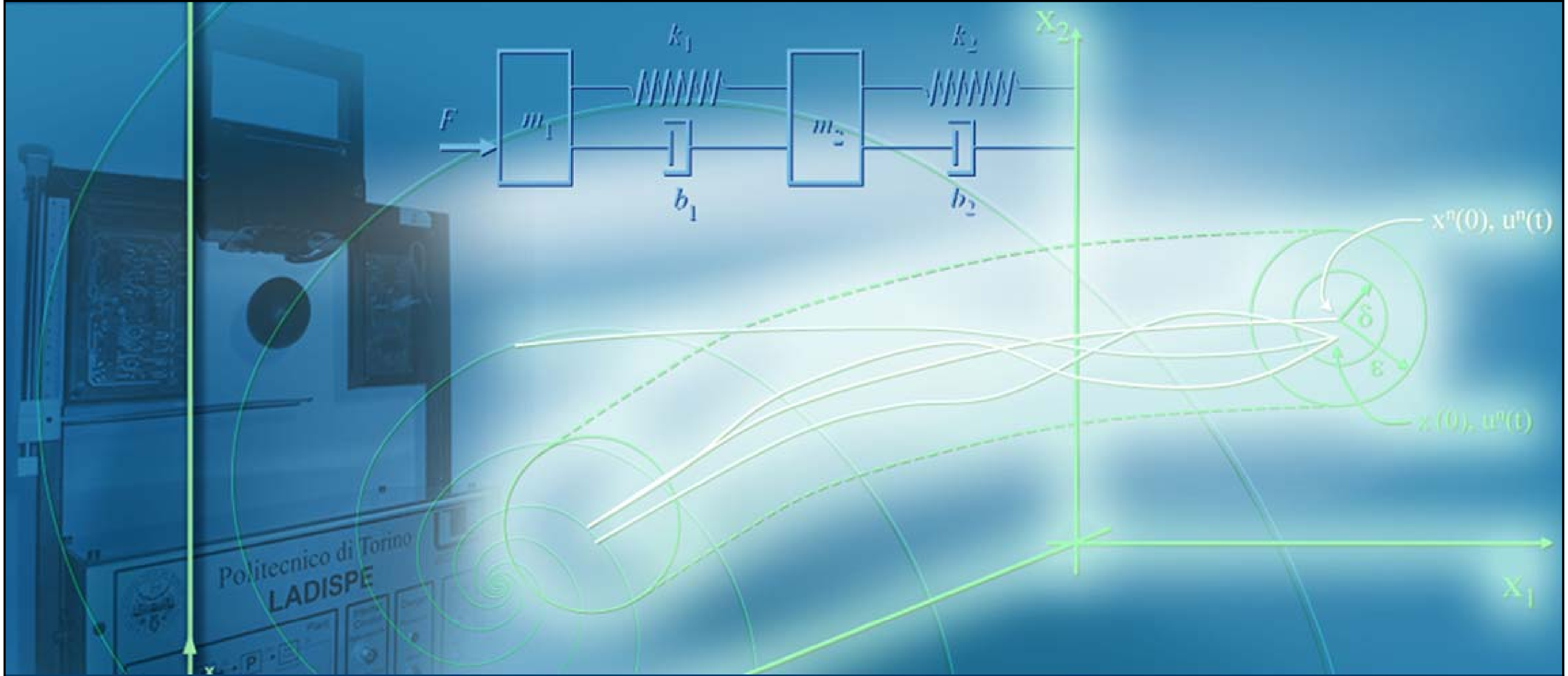
- Antitrasformando, $y(t)$ risulta pari alla somma di:
  - $y_\ell(t)$ **risposta libera** → dipende solo da $x(0_-)$
  - $y_f(t)$ **risposta forzata** → dipende solo da $u(t)$

La soluzione nel dominio della frequenza "*s*" 5/5

- $H(s) \rightarrow$ matrice di trasferimento del sistema (legame ingresso uscita).
- $H^{x}_{0}(s)$, $H^{x}_{f}(s)$, $H_{0}(s)$, $H(s)$ sono in generale matrici complesse i cui elementi sono funzioni razionali fratte (rapporto di polinomi) nella variabile complessa s.
- Le matrici $H^{x}_{0}(s)$, $H_{0}(s)$ rappresentano il legame fra le condizioni iniziali e, rispettivamente, lo stato e l'uscita.
- Le matrici $H^{x}_{f}(s)$, $H(s)$ rappresentano il legame tra l'ingresso e, rispettivamente, lo stato e l'uscita.

La matrice di trasferimento

- La matrice $H(s)$ è detta *matrice di trasferimento* e rappresenta il legame tra l'ingresso e l'uscita, nel dominio della trasformata di Laplace.
- Per un sistema a p ingressi e q uscite la matrice di trasferimento è costituita da una matrice a q righe e p colonne di funzioni razionali della variabile s.



Soluzione nel dominio della frequenza “s”

La funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento

- Se il sistema è a un ingresso ($p = 1$) e un'uscita ($q = 1$) (SISO) allora la matrice di trasferimento si dice **funzione di trasferimento (fdt).**

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad m \leq n$$

- $m < n$ → fdt *strettamente propria* (il sistema è proprio $b_m = D = 0$).
- $m = n$ → fdt non *strettamente propria (bipropria)* (il sistema è improprio $b_m = D \neq 0$).
- radici di $N_H(s)$ → *zeri* della fdt del sistema.
- radici di $D_H(s)$ → *poli* della fdt del sistema.

Forme fattorizzate della funzione di trasferimento 1/2

Forma “zeri e poli”

$$H(s) = K_{\infty} \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

- $z_1, \ldots , z_m$ → zeri della fdt
- $p_1, \ldots , p_n$ → poli della fdt
- K_{∞} → “guadagno infinito”

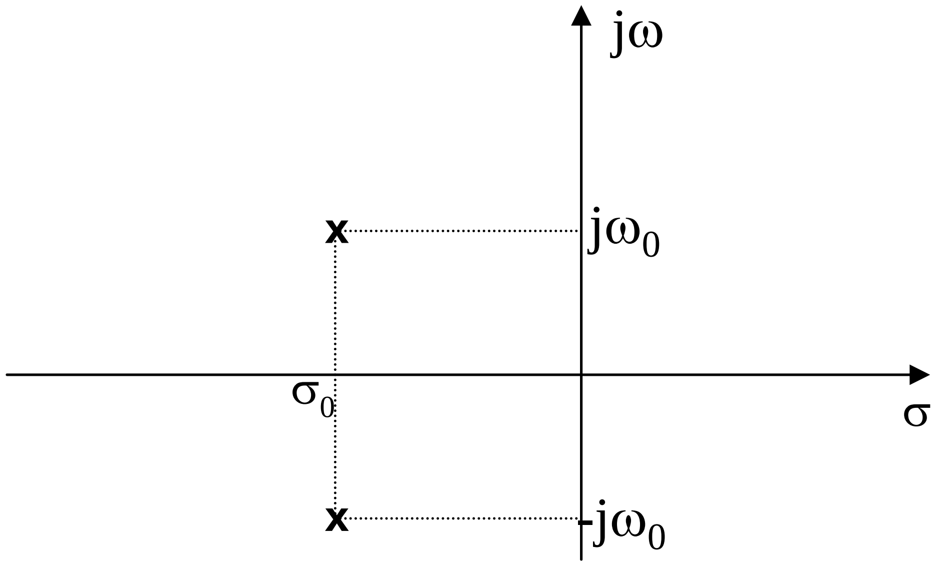
$$K_{\infty} = \lim_{s \to \infty} s^{n-m} H(s)$$

Forme fattorizzate della funzione di trasferimento 2/2

- **Forma *fattorizzata di Bode* (forma *fattorizzata in costanti di tempo*)**
  - Sarà introdotta e studiata nel modulo di Controlli Automatici

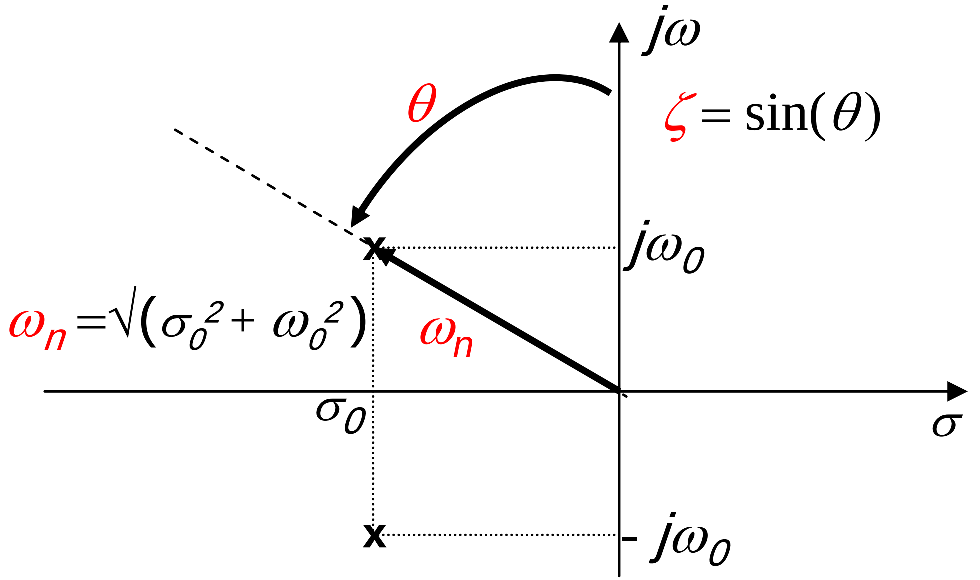
Rappresentazione di singolarità complesse 1/4

- $p(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s - \sigma_0 - j\omega_0)(s - \sigma_0 + j\omega_0)$ → polinomio di secondo grado con radici complesse coniugate $s_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0$.
- σ_0 e ω_0 → parte reale e immaginaria → rappresentazione cartesiana delle radici



Radici complesse coniugate (2/4)

- Pulsazione naturale (ω_n) e smorzamento (ζ) di una coppia di radici complesse coniugate



- $\sigma_0 = -\zeta\omega_n$ $\qquad$ $\omega_0 = \omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)}$
- $\omega_n = \sqrt{(\sigma_0^2+\omega_0^2)}$ $\qquad$ $\zeta = -\sigma_0/\sqrt{(\sigma_0^2+\omega_0^2)}$
- $\omega_n > 0$ $\quad$ $|\zeta| < 1$ per una coppia di radici complesse coniugate

Rappresentazione di singolarità complesse 3 / 4

- Rappresentazione di un trinomio di 2° grado in funzione di smorzamento e pulsazione naturale

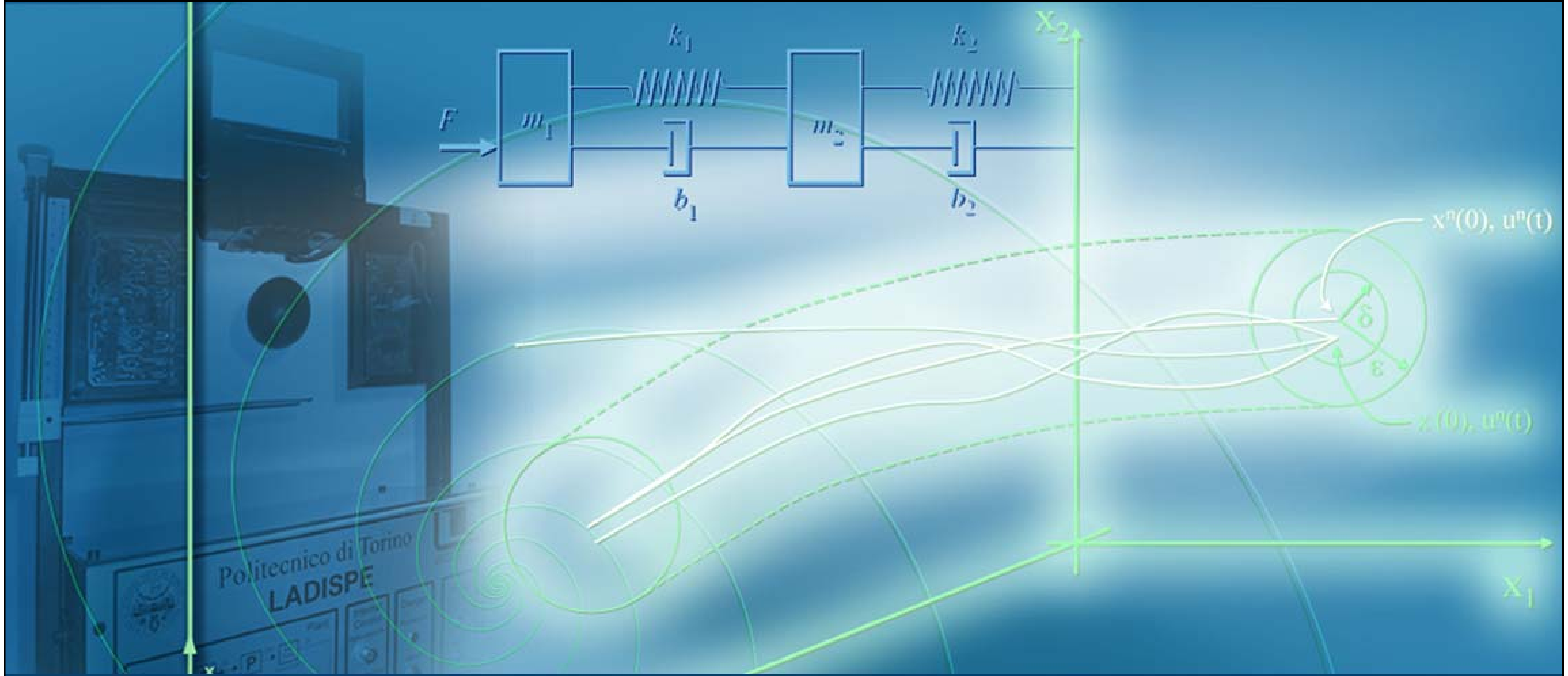
$$\boxed{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Rappresentazione di singolarità complesse 4/4

- Funzione di trasferimento nella forma "zeri e poli"

$$H(s) = K_\infty \frac{\prod_{i=1}^{m_r}(s - z_i)\prod_{i=1}^{m_c}(s^2 + 2\zeta_{z,i}\omega_{nz,i}s + \omega_{nz,i}^2)}{\prod_{i=1}^{n_r}(s - p_i)\prod_{i=1}^{n_c}(s^2 + 2\zeta_{p,i}\omega_{np,i}s + \omega_{np,i}^2)}$$

- m_r → # zeri reali, m_c → # coppie zeri complessi coniugati → $m_r + 2 \cdot m_c = m$
- n_r → # poli reali, n_c → # coppie poli complessi coniugati → $n_r + 2 \cdot n_c = n$
- K_∞ → "guadagno infinito"



Soluzione nel dominio del tempo

La formula di Lagrange
Movimento libero
Movimento forzato

Descrizione di sistemi dinamici LTI TC

- Il comportamento dinamico di un sistema LTI TC è descritto dalle equazioni di ingresso – stato – uscita:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}}$$

- Si ricorda che:
  - $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$
  - $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxp}$, $C \in \mathbb{R}^{qxn}$, $D \in \mathbb{R}^{qxp}$

Il movimento di sistemi dinamici LTI TC

- Utilizzando le equazioni di stato:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

si vuole calcolare la soluzione $x(t)$ a partire da uno stato iniziale $x(t = 0_-) = x_0$ noto e a fronte di un andamento dell'ingresso $u(t)$ noto $\forall t \geq 0$.

- la soluzione $x(t)$ si indica con il termine **movimento dello stato.**

La formula di Lagrange per il calcolo di *x*(*t*)

- L'espressione di $x(t)$ si calcola con la **formula di Lagrange:**

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{e^{At}x(0_-)}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\int_{0_-}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{x_f(t)} = \\ &= x_\ell(t) + x_f(t) \end{aligned}}$$

- Il movimento dello stato $x(t)$ è la somma di due contributi:
  - $x_\ell(t)$ **movimento libero** → dipende solo da $x(0_-)$
  - $x_f(t)$ **movimento forzato** → dipende solo da $u(t)$

Calcolo del movimento dell'uscita

- L'andamento di $y(t)$, detto **movimento dell'uscita**, si ottiene dalla relazione statica:

$$\boxed{y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)}$$

dopo avere sostituito per $x(t)$ l'espressione ottenuta dalla formula di Lagrange:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0\_)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{C\int_{0\_}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{y_f(t)} =$$

$$= y_\ell(t) + y_f(t)$$

Calcolo del movimento dell'uscita

- Anche il movimento dell'uscita $y(t)$ detto anche **risposta del sistema** è la somma di due contributi:
  - $y_\ell(t)$ **risposta libera** → dipende solo da $x(0_-)$
  - $y_f(t)$ **risposta forzata** → dipende solo da $u(t)$

Utilizzo della trasformata di Laplace

- L'impiego diretto della formula di Lagrange richiede però l'utilizzo di procedimenti di calcolo integrale
- Al fine di semplificare tali procedimenti, risulta più utile fare ricorso alla **trasformata di Laplace**, giustificando in tal modo la soluzione nel dominio della frequenza "s"