Esercitazione di laboratorio #3

# Risposta di sistemi del primo ordine a ingressi canonici

$a)\ G_1(s) = \frac{10}{s-5}$ $b)\ G_2(s) = \frac{10}{s}$ $c) G_3(s\ ) = \frac{10}{s+5}$ $d) G_4(s) = \frac{10}{s+20}$

| | $G_1(s) = \frac{10}{s-5}$ | $G_2(s) = \frac{10}{s}$ | $G_3(s) = \frac{10}{s+5}$ | $G_4(s) = \frac{10}{s+20}$ |
|---|---|---|---|---|
| Polo (p) | +5 | 0 | -5 | -20 |
| Cost. di tempo $\tau = -1/p$ | - | – | 0.2s | 0.05s |
| Valore a regime all'impulso unitario | – | 10 | 0 | 0 |
| Valore a regime al gradino unitario | – | – | 2 | 0.5 |
| Tempo di salita | - | – | 0.44s | 0.1097s |

Applicando il teorema del valore finale: ( $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$ )

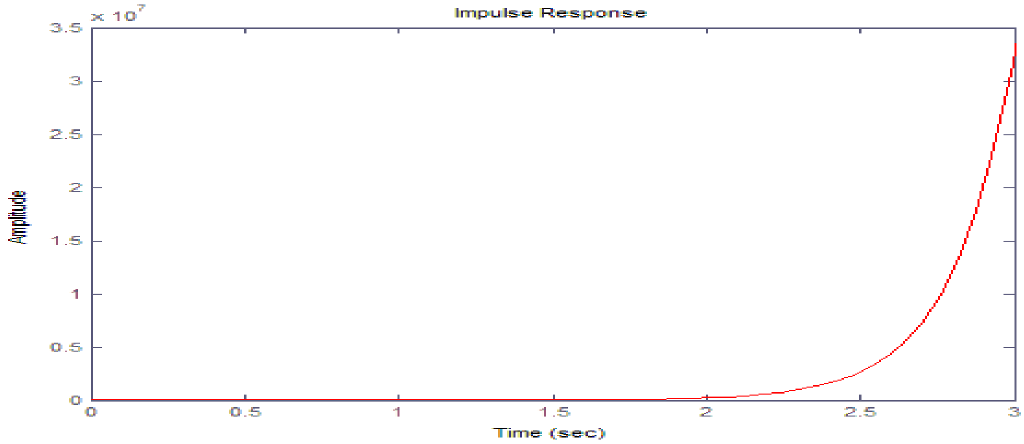
si ottengono i seguenti valori:

b)$\lim_{s\to 0} G_2(s) = \frac{s*10}{s} * 1 = 10$ c) $\lim_{s\to 0} G_3(s) = \frac{s10}{(s+5)} * 1$ =0 d) $\lim_{s\to 0} G_1(s) = \frac{s*10}{(s+20)} * 1 = 0$

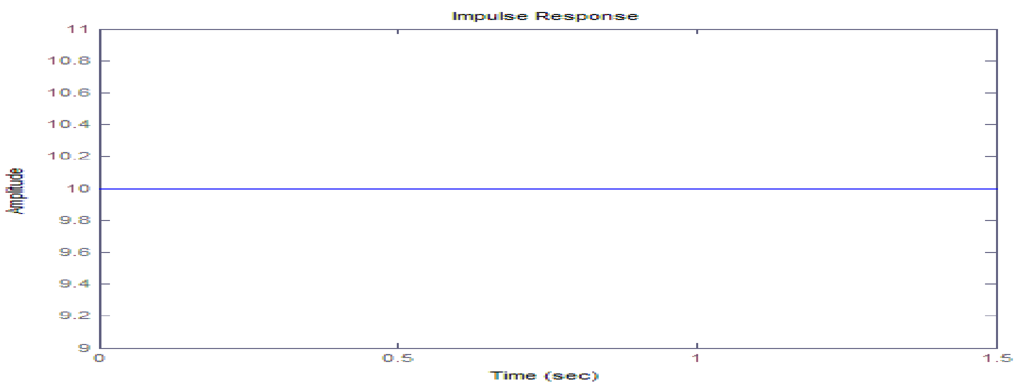
(dove '1' è la trasformata dell'impulso unitario)

- # Risposta all'impulso unitario

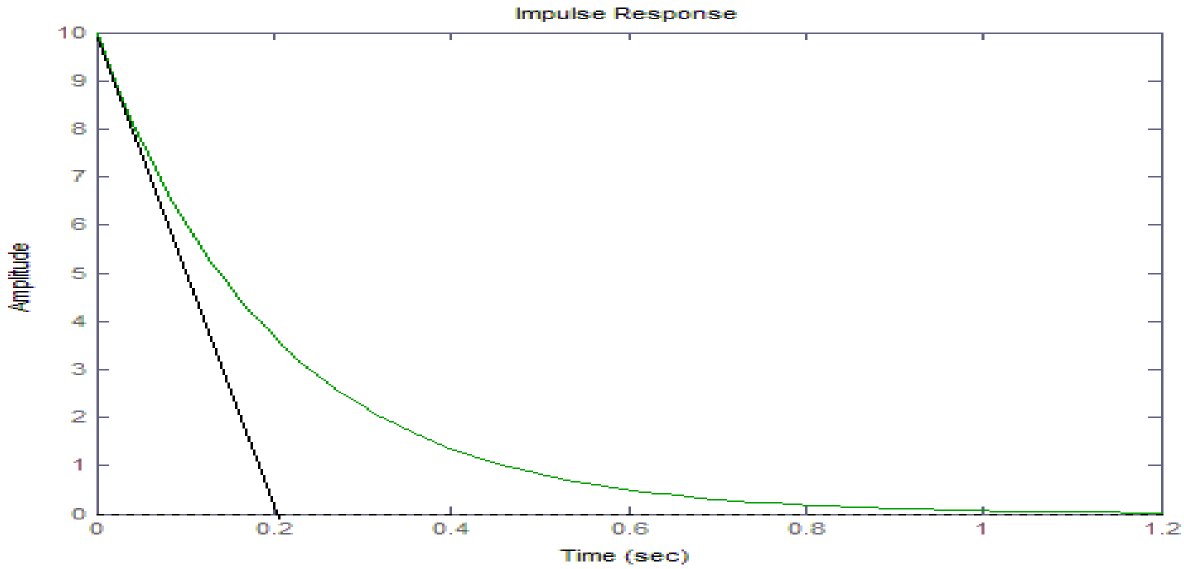
a) In questo caso non si può parlare di regime permanente perché la funzione di trasferimento ha un polo nel semipiano destro, quindi la sua risposta diverge.



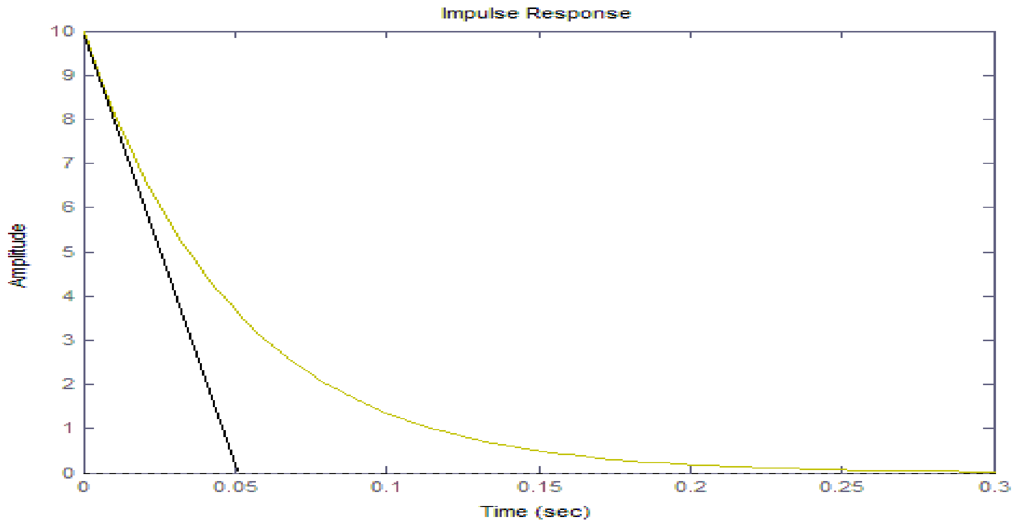

b) Il sistema ha un polo nell'origine e quindi **non** è BIBO stabile; tuttavia l'ingresso di tipo impulsivo **non** è limitato e infatti la risposta all'impulso è costante 10.




c) La funzione di trasferimento presenta un polo nel semipiano sinistro[s+5=0;p= -5] La costante di tempo è $\tau$=-1/p = 0.2s. Dal grafico si osserva che il valore a regime è nullo. La costante di tempo e data dal piede della tangente alla risposta alla risposta iniziale.




a) La funzione di trasferimento ha un polo p=-20,(>0), quindi è BIBO stabile. La costante di tempo τ=-1/p =0.05s.
Dal grafico si vede che il valore a regime è nullo anche in questo caso.

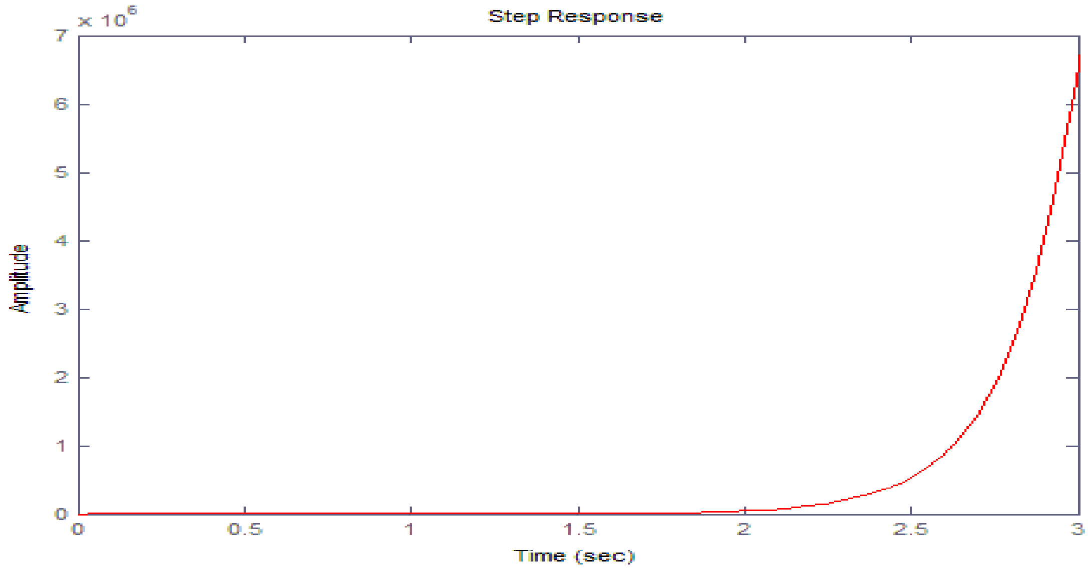



- **Risposta al gradino unitario**

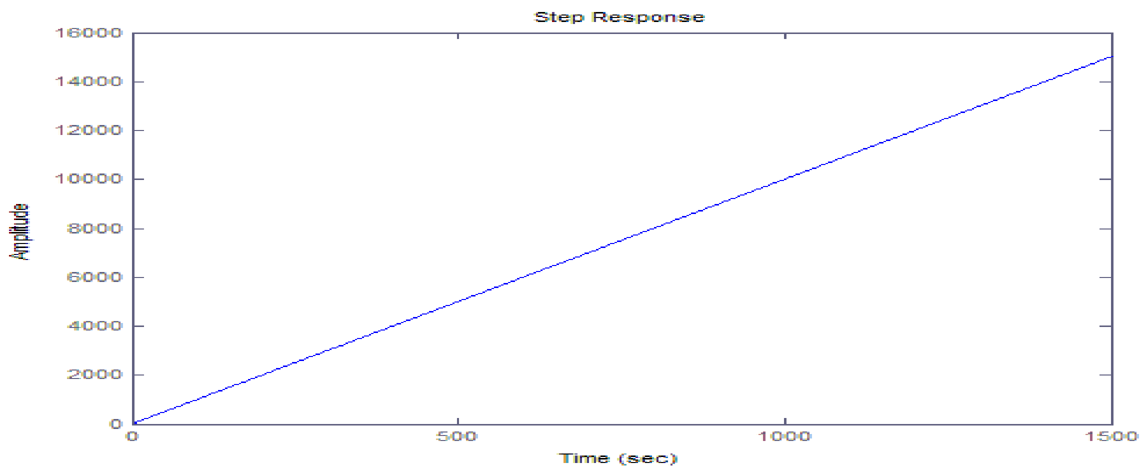
$\lim_{s\to 0} s * G(s) * \frac{1}{s}$ Dove $\frac{1}{s}$ È la trasformata del gradino unitario

c)$\lim_{s\to 0} G_3(s) = \frac{s10}{(s+5)} * \frac{1}{s} = 2$ d) $\lim_{s\to 0} G_4(s) = \frac{s10}{(s+20)} * \frac{1}{s} = 0.5$

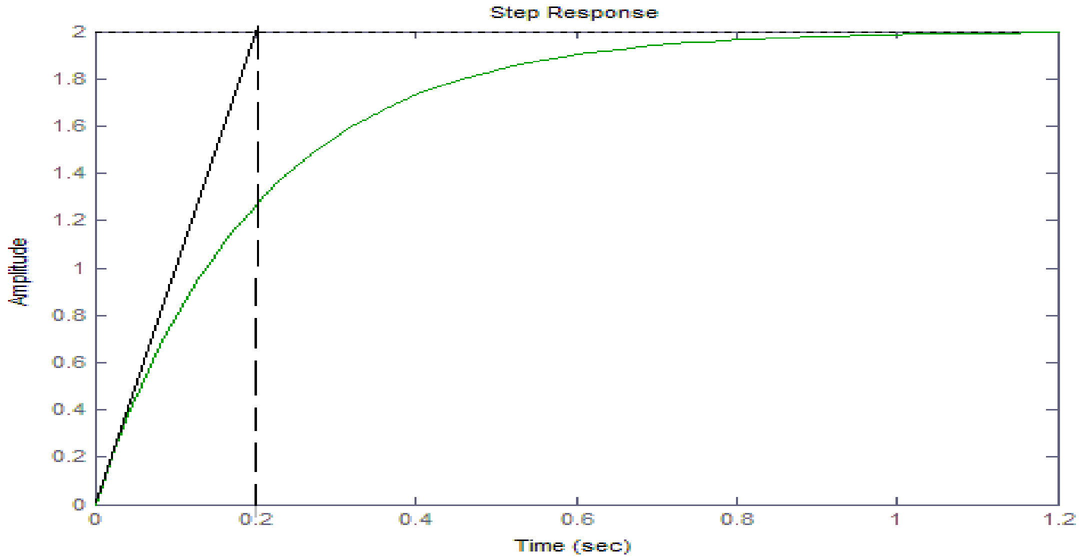
La risposta al gradino unitario diverge perché il sistema **non** è BIBO-stabile.



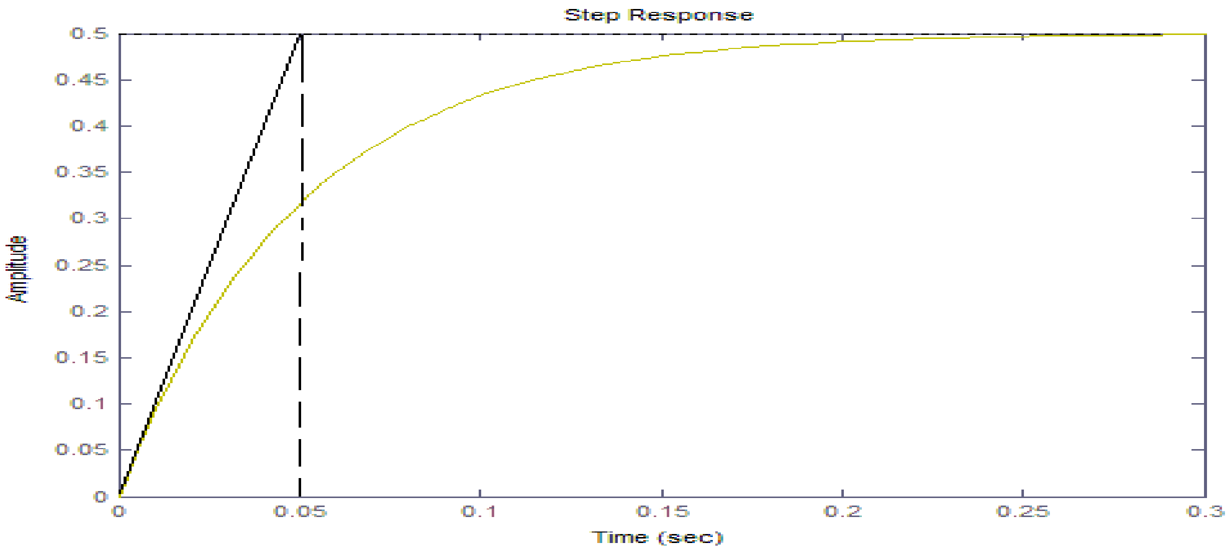

b) Anche in questo caso il sistema **non** è BIBO-stabile quindi la risposta al gradino diverge.




c) Il sistema ha un polo in -5. Si può calcolare la costante di tempo $\tau = -1/p = 0.2s$. Graficamente $\tau$ e data dall'intersezione della tangente alla risposta iniziale $y_0$ con la retta orizzontale tangente alla risposta finale $y_\infty$. Dal grafico si vede che il valore finale è 2.




d) Il sistema ha un polo in -20 quindi è BIBO-stabile. La costante di tempo $\tau$=-1/p= 0.05s. Anche in questo caso $\tau$ e data dall'intersezione della tangente alla risposta iniziale $y_0$ con la retta orizzontale tangente alla risposta finale $y_\infty$. Dal grafico si vede che il valore finale è 0.5.




- ## Script Matlab

```
s= tf('s');
```

Si definisce la variabile "s"

```
G1=10/(s-5);
G2= 10/(s+0);
G3=10/(s+5);
G4=10/(s+20);
close all;
```

```
%Simulazione della risposta all'impulso
figure (1),impulse(G1,'r'),
figure (2),impulse(G2,'b'),
figure (3),impulse (G3,'g'),
%figure (4),impulse(G4,'y'),

%Simulazione della risposta al gradino
figure (1),step(G1,'r'),
figure (2),step(G2,'b'),
figure (3),step (G3,'g'),
figure (4),step(G4,'y')
```

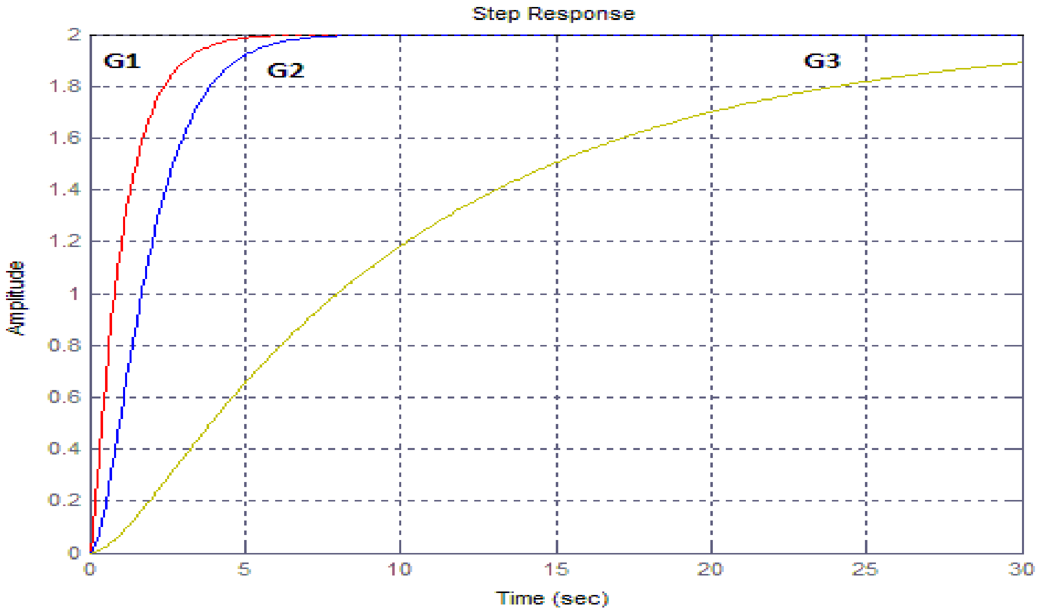
## Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine con due poli reali e nessuno zero

a) $G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+10)}$ Poli in -1 e -10 $\longrightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 0.1s$

b) $G_2(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$ Poli in -1 e -1 $\longrightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 1s$

c) $G_3(s) = \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)}$ Poli in -1 e -0.1 $\longrightarrow \tau_1 = 1s$ e $\tau_2 = 10s$

| | $G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+10)}$ | $G_2(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$ | $G_3(s) = \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)}$ |
|---|---|---|---|
| Poli (p) | -1 e- 10 | -1 e -1 | -1 e -0.1 |
| Cost. di tempo $\tau = -1/p$ | 1s 0.1s | 1s | 1s e 10s |
| Valore a regime al gradino unitario | 2 | 2 | 2 |
| Tempo di salita | 0.48s | 3.37s | 22.07s |




Dal grafico si osserva che diminuendo il valore del secondo polo (di una decade),la risposta diventa sempre più lenta,ovvero il sistema impiega più tempo a raggiungere il valore a regime. SI nota che Il valore finale di tutti i sistemi è 2. Quest' osservazione è confermata da i calcoli analitici usando Il teorema del valore finale: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$

$\lim_{\, s\to 0} s * G(s) * \frac{1}{s}$ Dove $\frac{1}{s}$ È la trasformata del gradino unitario

a) $\lim_{s\to 0} G_1(s) = \frac{20}{(0+1)(0+10)} = 2$

b) b) $\lim_{s\to 0} G_2(s) = \frac{2}{(0+1)(0+1)} = 2$

$$c)\ \lim_{s\to 0} G_3(s) = \frac{0.2}{(0+1)(0+0.1)} = 2$$

- ## Tempo di salita

Il tempo di salita rappresenta un parametro che determina la prontezza di risposta del sistema avente come ingresso un gradino unitario.
Esso è definito nel seguente modo:

$$\boldsymbol{t_s = t_{90\%} - t_{10\%}}$$

Ovvero il tempo necessario affinché la risposta del sistema passi per la prima volta dal 10% al 90% del valore finale . In questo caso bisogna calcolare il tempo quando l'ampiezza della funzione di trasferimento è tra 0.2 e 1.8.

`Dai grafici si ottengono I seguenti valori:`

a) $ts_1$=2.4 -1.92 =0.48s b) $ts_2$ =3.9-0.53 =3.37s c) $ts_3$ =24-1.93=22.07s

Si nota che diminuendo il valore del secondo polo, Il tempo di salita aumenta.

Cioè il sistema diventa più lento.

# Sistema con due poli reali ed uno zero reale

$$G_4(s) = \frac{5}{-z}\frac{s-z}{(s+1)(s+5)}$$

Al cambiare del parametro ‘z’ cambierà anche la risposata del sistema avente come ingresso un gradino unitario.

- **Tempo di salita**

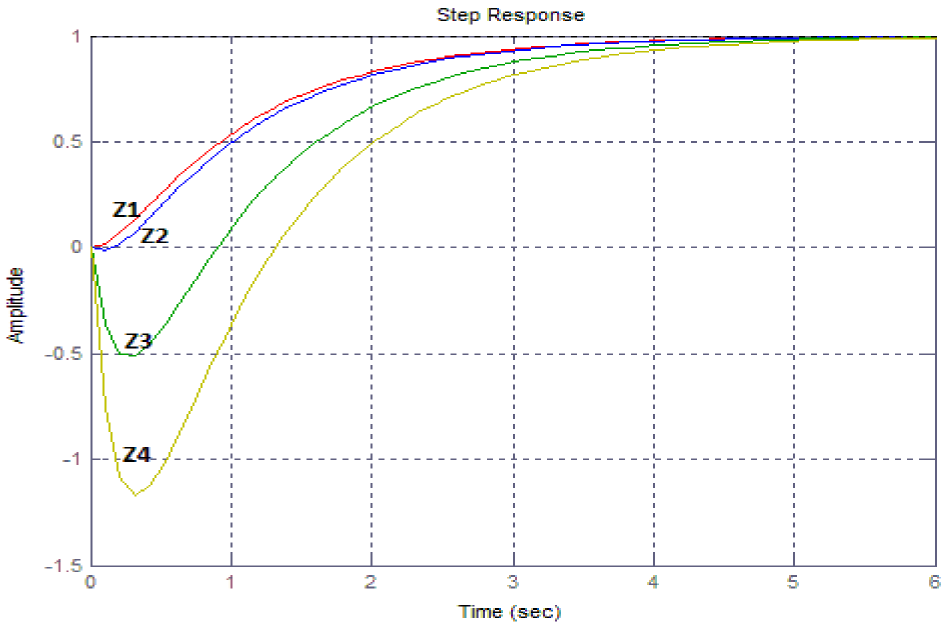
Sotto sono riportati I valori di tempi di salita al variare del parametro Z.

a) ts1=2.53-0.263 = 2.267s $Z_1$=100

ts2=2.63-0.356= 2.274s $Z_2$=10

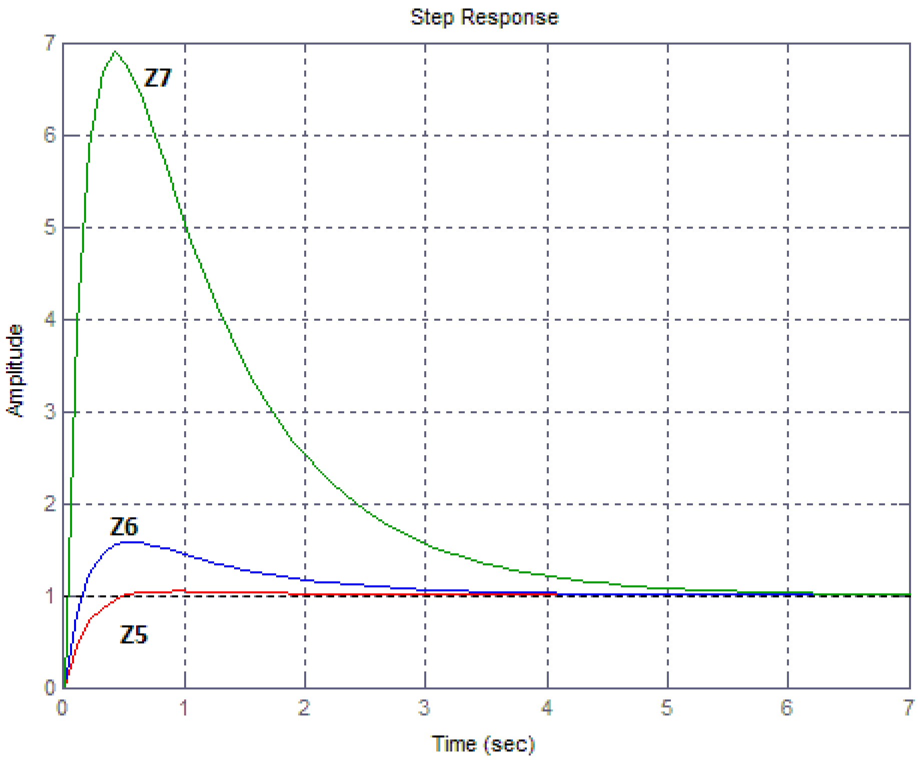
ts3=3.22-1.01 =2.21s $Z_3$=1

ts4=3.62-1.43 =2.19s $Z_4$=0.5




Dal grafico si vede che per i valori di ‘z’ positivi il sistema ha una sottoelongazione. Questo è più evidente per z<5.

b)




5) $\hat{s} = \frac{1.04-1}{1}$ =0.04 ts=0.35 -0.0221 =0.3279s $z_5 = -0.9$

6) $\hat{s} = \frac{1.58-1}{1} = 0.58$ ts=0.125-0.0104 =0.1146s $z_6 = -0.5$

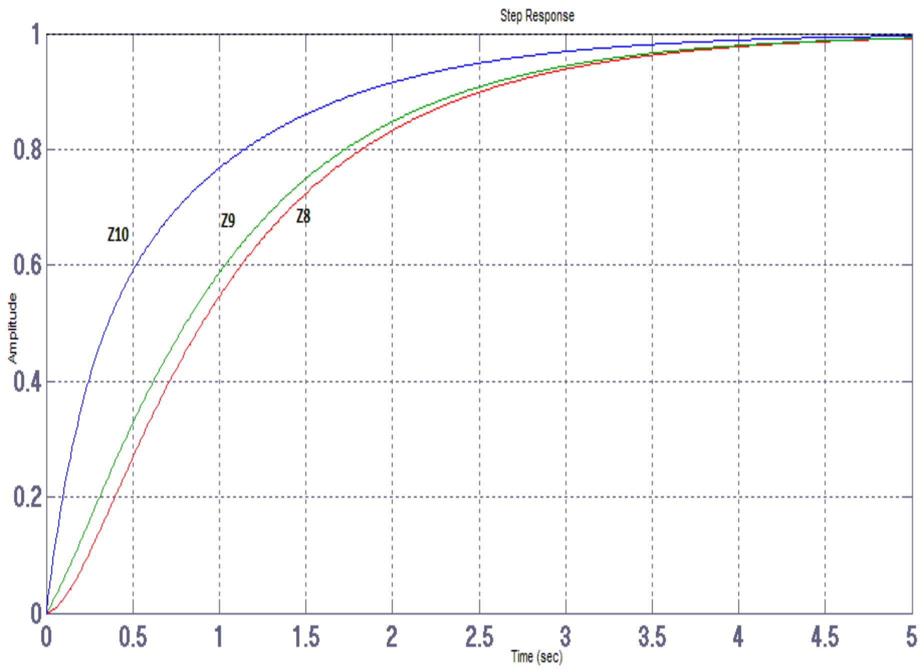
7) $\hat{s} = \frac{6.89-1}{1} = 5.89$ ts=0.0244-0.00273 =0.02167s $z_7 = -0.1$

Si osserva che la sovraelongazione più alta si ha per Z= - 0.1. Il tempo di salita diminuisce al diminuire ( in modulo) del valore di Z. Si può dedurre che più è veloce il sistema più è grande la sovra elongazione.

b) $ts_8$=2.48-0.246 =2.234s $z_8$= -100

$ts_9$=2.51-0.165 =2.345s $z_9$= -10

$ts_{10}$=1.83-0.0442 =1.7858s $z_{10}$= -2



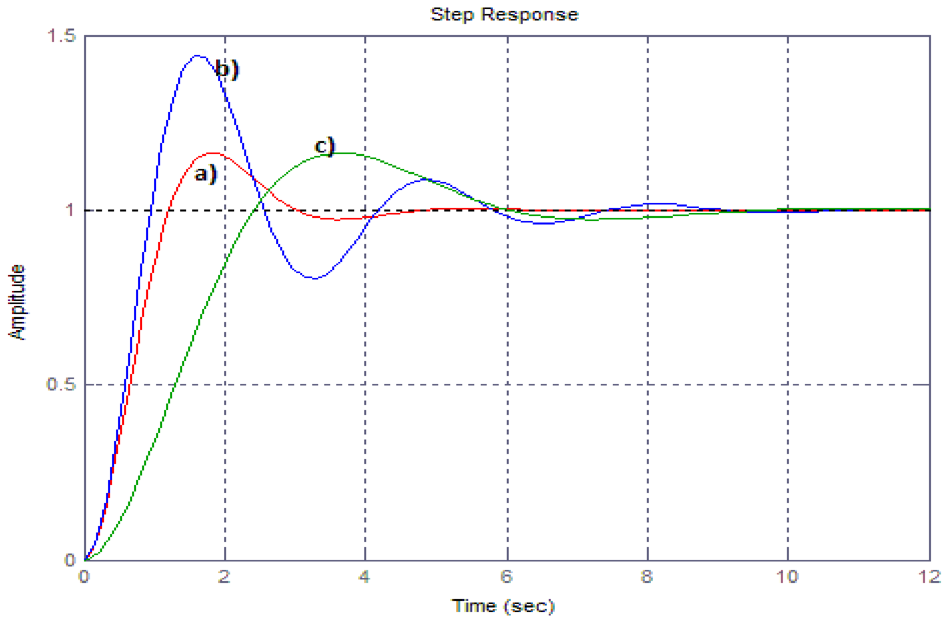

Dal grafico si nota che diminuendo il valore del parametro Z (in modulo)

Diminuisce anche il tempo di salita del sistema e diventa più veloce.

---

# Sistema con due poli complessi coniugati e nessuno zero

$$G_5(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$




Dal grafico si nota che il valore finale dei sistemi è pari a 1

Valori ricavati dai grafici                                        Valori teorici

a) $t_s = 1.212\text{s}$    $\hat{s} = \frac{1.16-1}{1} = 0.16$    1.2092 s    0.163

b) $t_s = 0.9417\text{s}$    $\hat{s} = \frac{1.44-1}{1} 0.44$    0.9416 s    0.4443

c) $t_s = 2.425\text{s}$    $\hat{s} = \frac{1.16-1}{1} = 0.16$    2.1631 s    0.163

Si osserva che questi valori non si discostano molto da quelli teorici.

Per calcolare $t_{a,5\%}$ Bisogna osservare quando il grafico entra in una fascia [0.95 ; 1.05] definitivamente. Si ricavano i seguenti valori:

a) $t_{a,5\%} = 2.65s$ b) $t_{a,5\%}$=5.39s    c) $t_{a,5\%} = 5.29s$

# Script Matlab

```
% Esercizio 2: Risposta al gradino di sistemi del II ordine
t1=0:0.1:30;
s= tf('s');
G1=20/((s+1)*(s+10));
G2= 2/((s+1)^2);
G3=0.2/((s+1)*(s+0.1));
```

```
close all;
% Risposta al gradino
figure (1),step(G1,'r',G2,'b',G3,'y',t1),grid on,

%----------------------------------------------------------------------

z1=100; z2=10; z3=1; z4=0.5;

G41=(5*(s-z1)) / ((-z1)*(s+1)*(s+5));
G42=(5*(s-z2)) / ((-z2)*(s+1)*(s+5));
G43=(5*(s-z3)) / ((-z3)*(s+1)*(s+5));
G44=(5*(s-z4)) / ((-z4)*(s+1)*(s+5));
% Risposta al gradino
figure (2),step(G41,'r',G42,'b', G43,'g',G44,'y'),grid on,


z5=-0.9; z6=-0.5; z7=-0.1;
G45=(5*(s-z5)) / ((-z5)*(s+1)*(s+5));
G46=(5*(s-z6)) / ((-z6)*(s+1)*(s+5));
G47=(5*(s-z7)) / ((-z7)*(s+1)*(s+5));

% Risposta al gradino
figure (3),step(G45,'r',G46,'b', G47,'g'),grid on,

z8=-100; z9=-10; z10=-2;
G48=(5*(s-z8)) / ((-z8)*(s+1)*(s+5));
G49=(5*(s-z9)) / ((-z9)*(s+1)*(s+5));
G410=(5*(s-z10)) / ((-z10)*(s+1)*(s+5));

% Risposta al gradino
figure (4),step(G48,'r',G49,'b', G410,'g'),grid on,

%-------------------------------------------------------

w1=2; sigma1=0.5; sigma2=0.25; w2=1;
G51= (w1^2)/((s^2)+(2*sigma1*w1*s)+(w1^2));
G52= (w1^2)/((s^2)+(2*sigma2*w1*s)+(w1^2));
G53= (w2^2)/((s^2)+(2*sigma1*w2*s)+(w2^2));

% Risposta al gradino
figure (4),step(G51,'r',G52,'b', G53,'g'),grid on,
se1=exp(-pi*sigma1/sqrt(1-sigma1^2))

se2=exp(-pi*sigma2/sqrt(1-sigma2^2))

se3=exp(-pi*sigma1/sqrt(1-sigma1^2))

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=(sqrt(1-sigma1^2))/sigma1;
b=(sqrt(1-sigma2^2))/sigma2;

ts1=(1/(w1*sqrt(1-sigma1^2)))*(pi- atan(a))

ts2=(1/(w1*sqrt(1-sigma2^2)))*(pi- atan(b))
ts3=(1/(w2*sqrt(1-sigma2^2)))*(pi- atan(a))
```

---

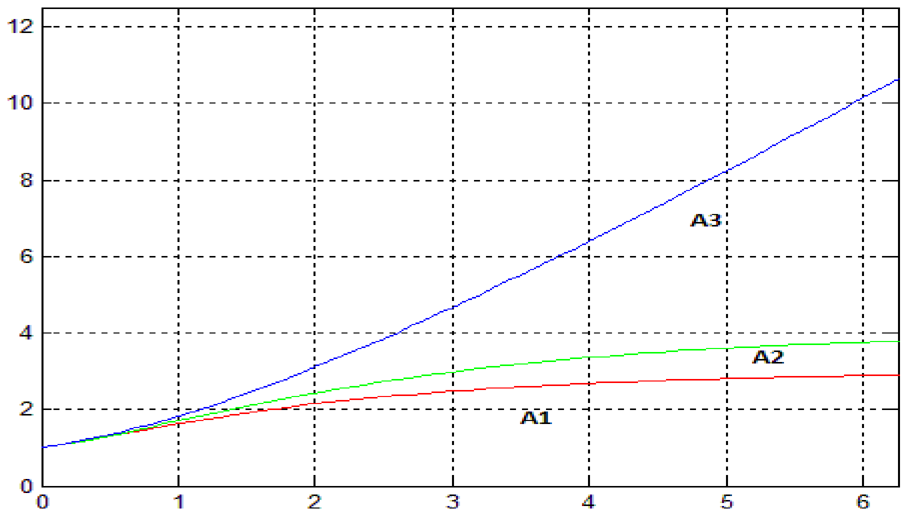
- # Stabilià di sistemi dinamici LTI

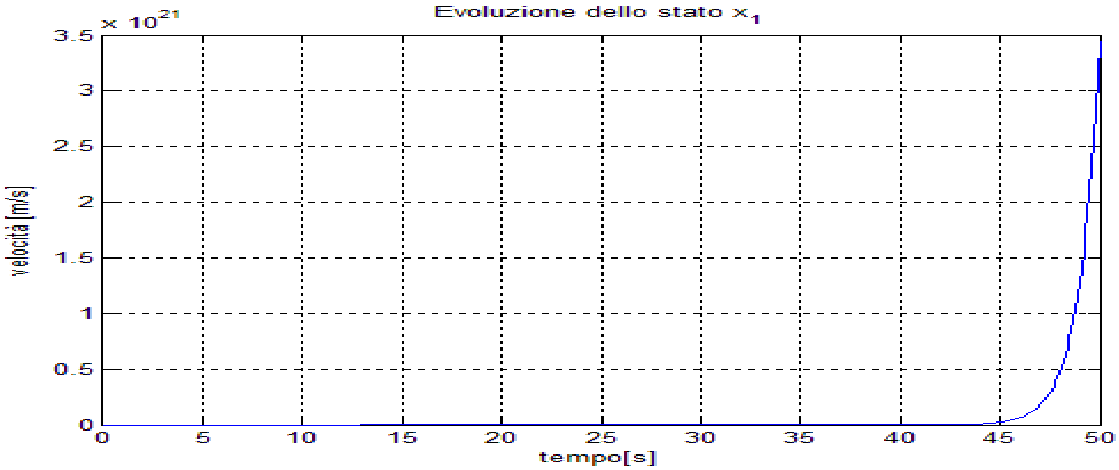
Le matrici sono triangolari quindi gli autovalori sono i coeficienti della diagonale principale.

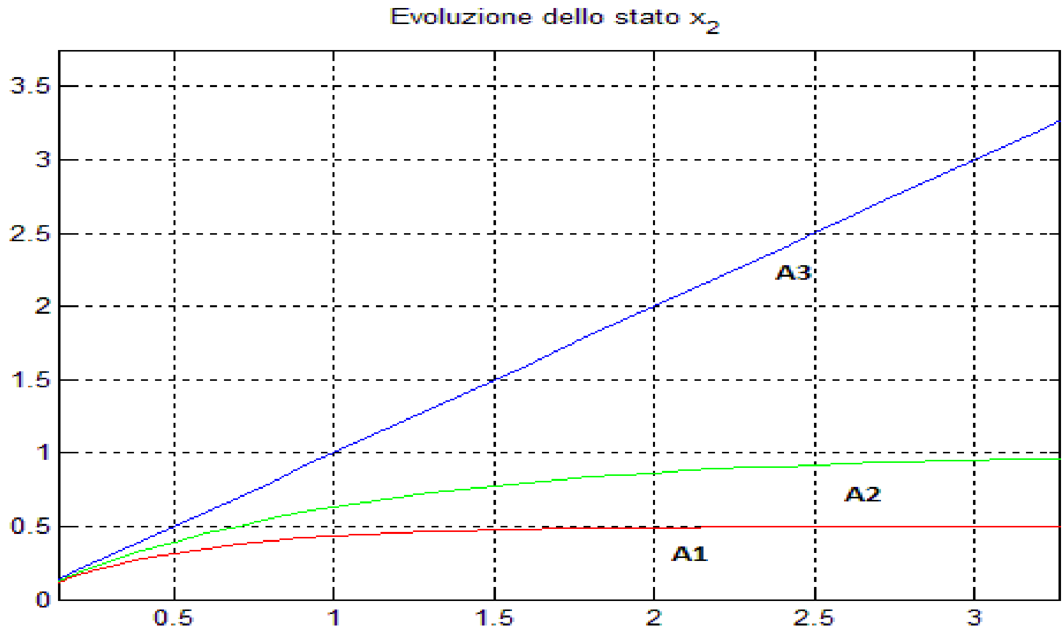
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Autovalori | -0.5 e -2 | -0.5 e -1 | -0.5 e 0 | -0.5 e 1 |
| Stabilità tempo continuo | Assintoticamente stabile | Assintoticamente stabile | Instabile | Instabile |
| Stabilità tempo discreto | Instabile | Instabile | Assintoticamente stabile | Semplicemente stabile |

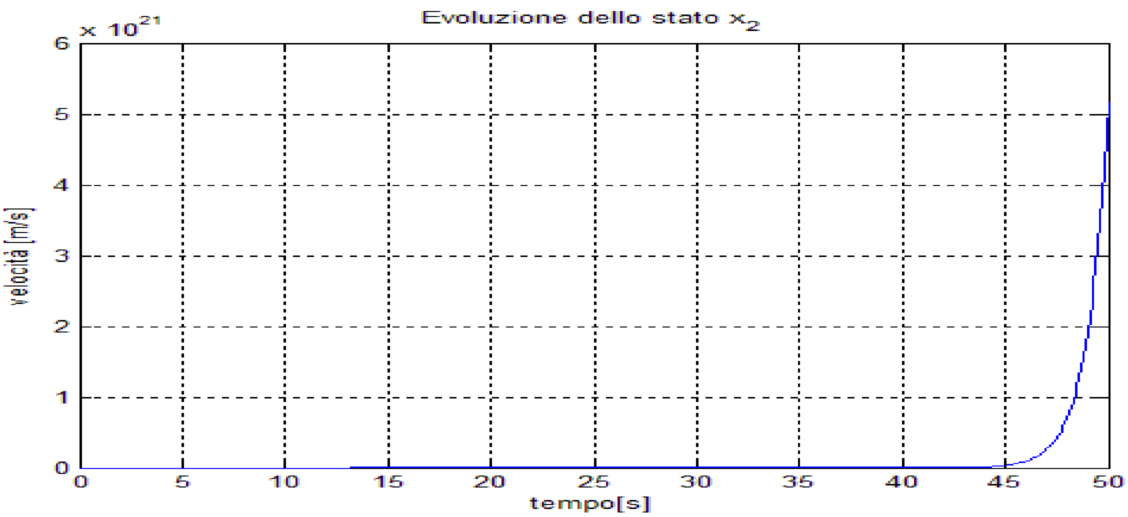
- # Tempo continuo

Le seguenti osservazioni sono fatte per l'evoluzione dello stato $X_1$ e $X_2$. L'evoluzione degli stati relativi alle matrici $A_1$ e $A_2$ è assintoticamente stabile. Questo perché i rispettivi autovalori sono strettamente minori di zero. Dato che $A_3$ ha un autovalore nullo il sistema può essere o semplicemente stabile o instabile. Dal grafico si vede che il sistema diverge.La matrice $A_4$ ha un autovalore positivo quindi il sistema diverge.





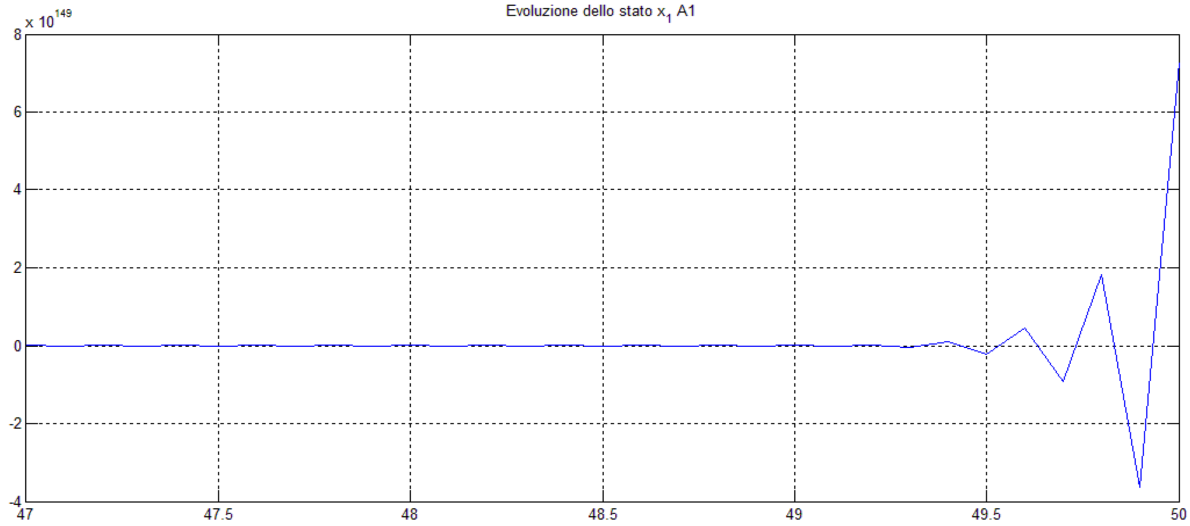



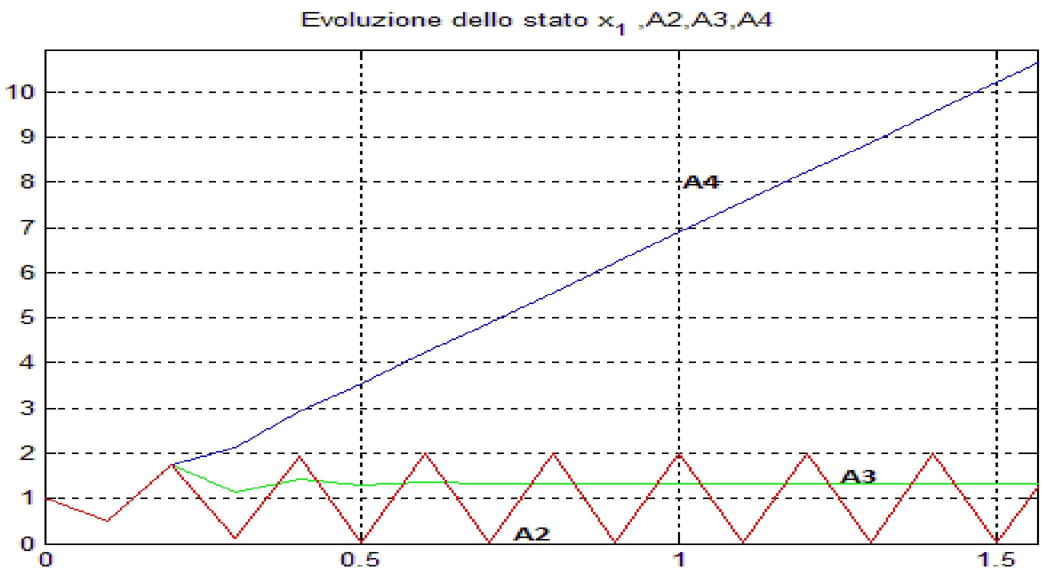



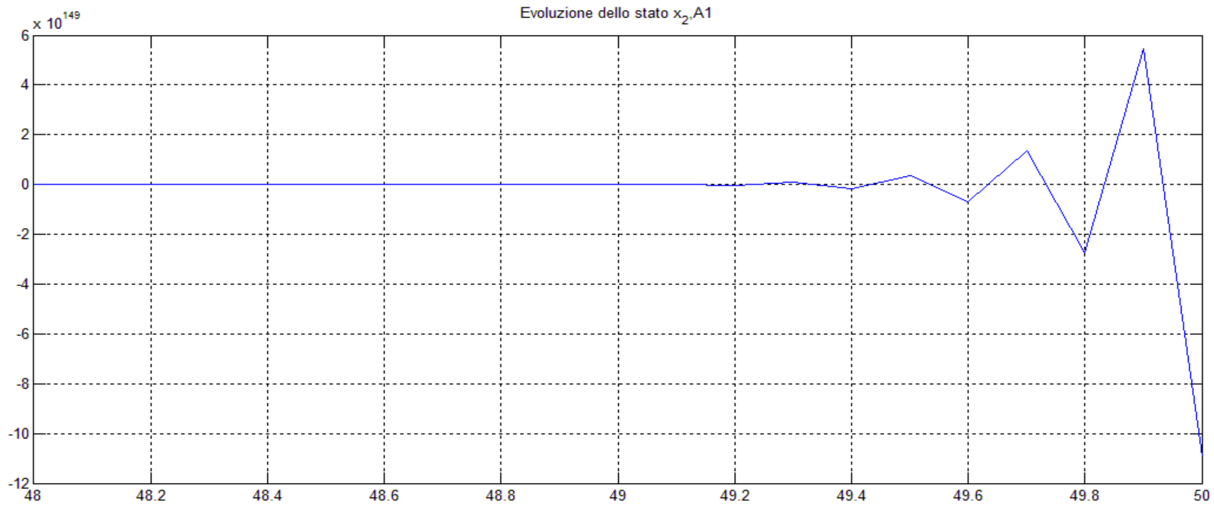

Si nota che l'evoluzione degli stati $X_1$ e $X_2$(rosso e verde) è stabile solo per le matrici $A_1$ e $A_2$

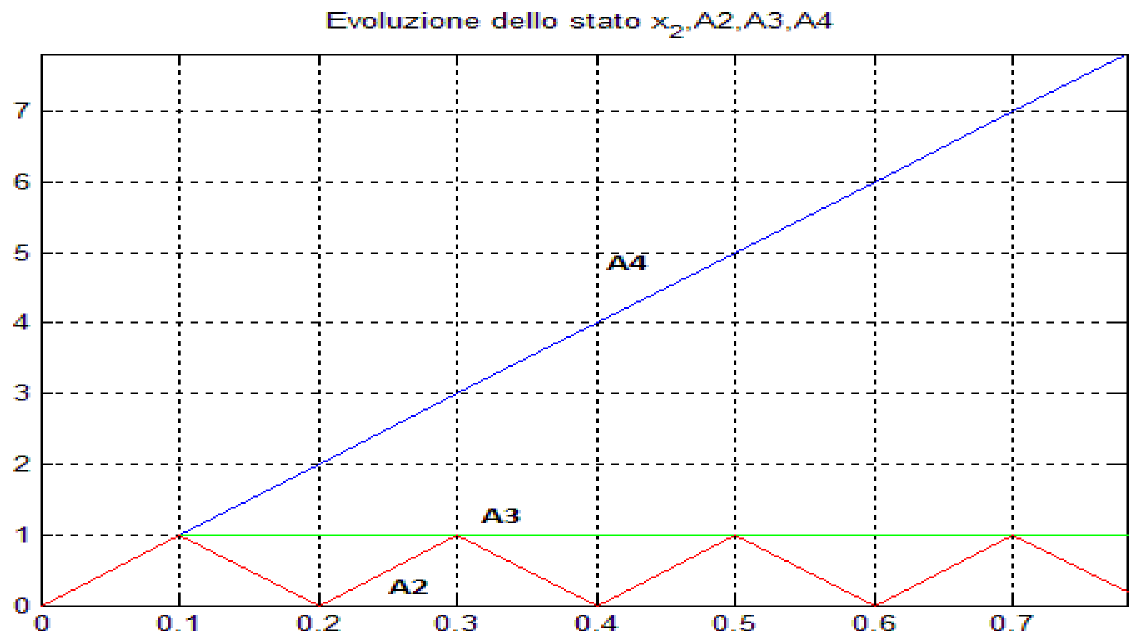
- ## Tempo dicreto

Le seguenti osservazioni sono fatte per l'evoluzione dello stato $X_1$ e $X_2$. Si nota che gli stati divergono perché la matrice $A_1$ ha un autovalore (-2) maggiore( in modulo) di uno. Dato che la matrice $A_4$ ha un autovalore pari a uno, il sistema può essere o semplicemente stabile o instabile. Dal grafico si vede che in questo caso il sistema è instabile. Gli stati relativi alle matrici $A_2$ e $A_3$ sono asintoticamente stabili perché i rispettivi autovalori sono strettamente minori di uno.



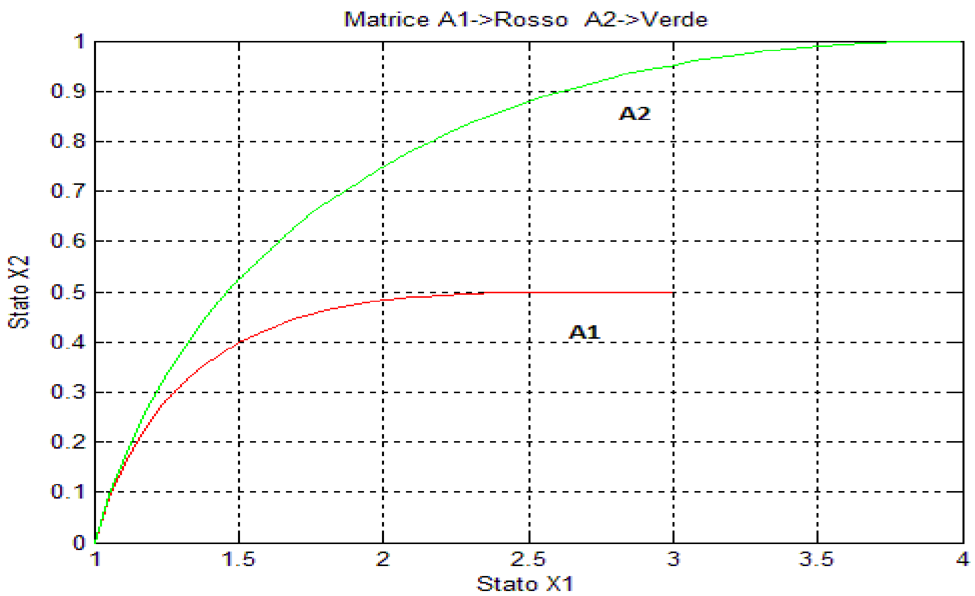



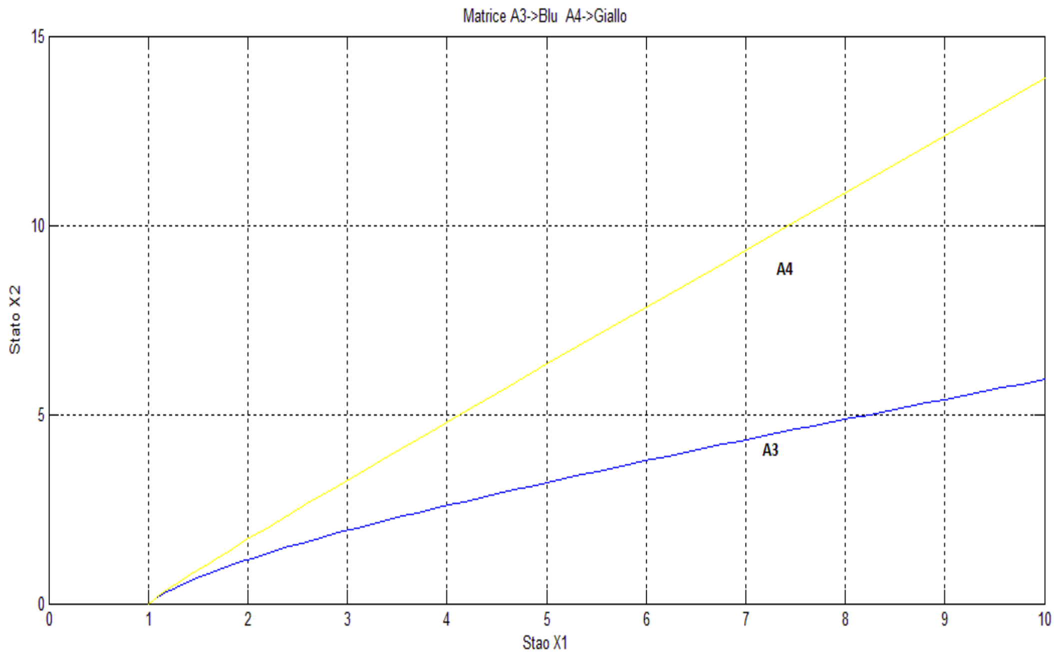


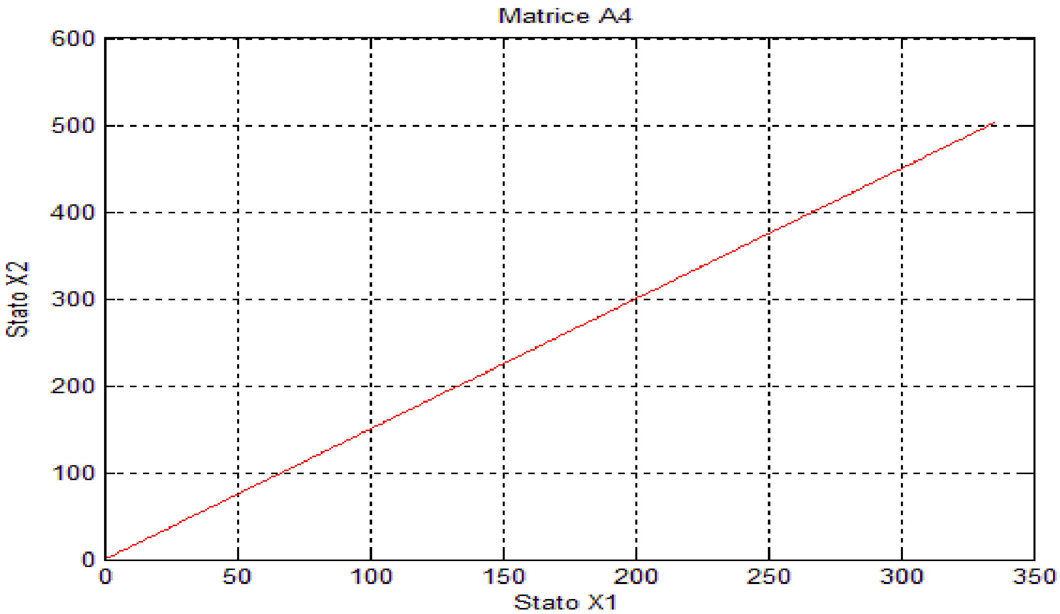

- **Proiezione dello stato $X_1$ su $X_2$ (tempo continuo)**

  Dai grafici si vede che le proiezioni dello stato $X_1$ e $X_2$ sono stabili nei casi cui era sodisfata la condizione di assintotica stabilità. Cioè per i sistemi aventi come matrici di stato $A_1$ e $A_2$ .

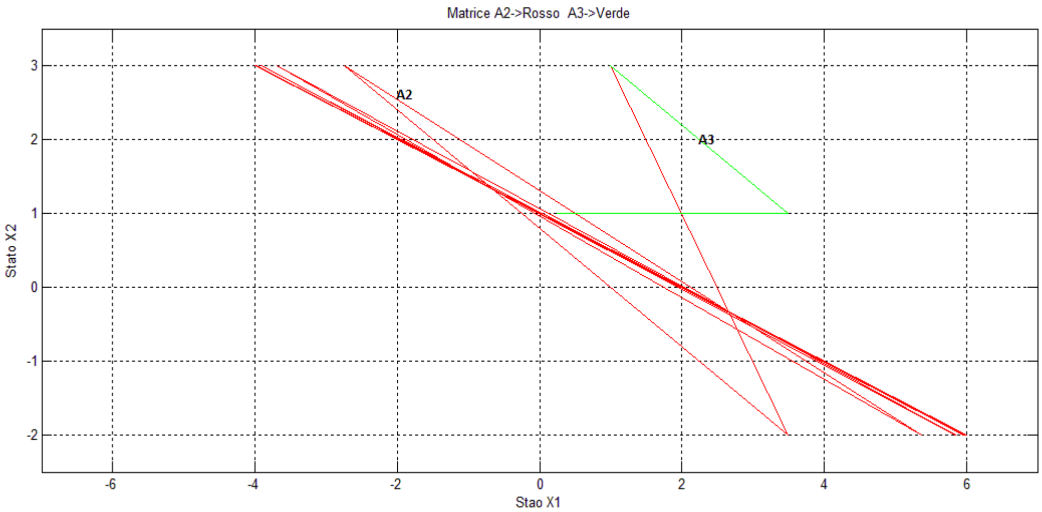


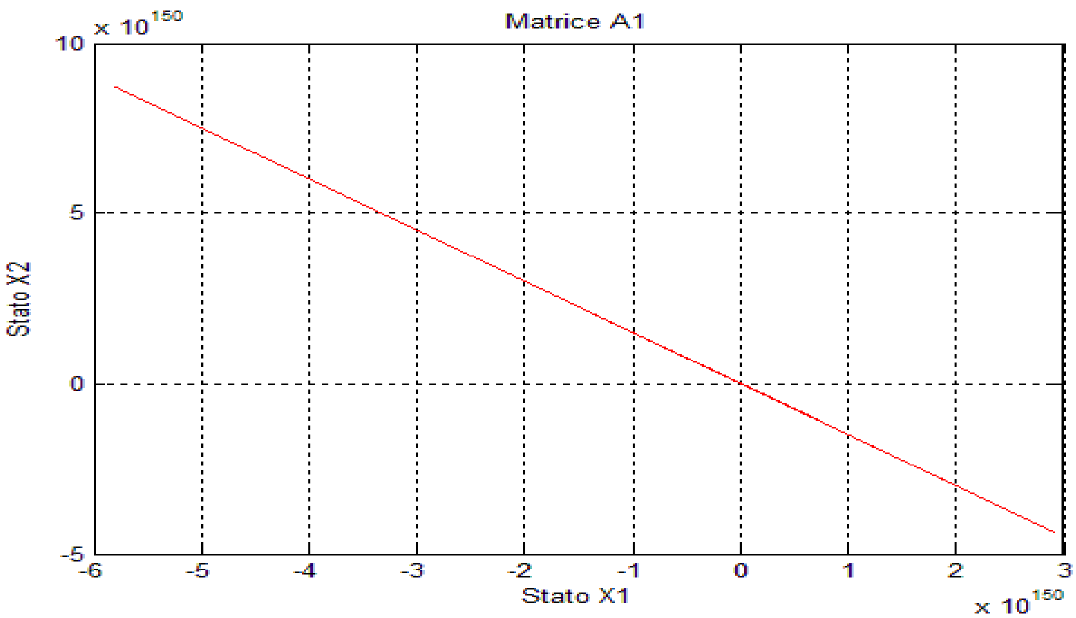

- **Proiezione dello stato $X_1$ su $X_2$ (tempo discreto)**
  Dai grafici si vede che le proiezioni dello stato $X_1$ e $X_2$ sono stabili nei casi cui era sodisfata la condizione di assintotica stabilità. Cioè per i sistemi aventi come matrici di stato $A_2$ e $A_3$. In questo caso si vede che i grafici sono limitati.



Matrice A4
Stato X2
Stato X1
0
50
100
150
200
250
300
350
100
200
300
400
500
600

Matrice A2->Rosso A3->Verde
A2
A3
Stato X2
Stao X1

Matrice A1
x 10^150
Stato X2
Stato X1
x 10^150

- **Script Matlab**

```
% Esercizio 3: Stabilità di sistemi dinamici LTI

B=[1;1];
C=[1 3];
D=[0];
x0=[1;0];

A1=[-0.5 1 ; 0 -2];
A2=[-0.5 1 ; 0 -1];
A3=[-0.5 1 ; 0 0];
A4=[-0.5 1 ; 0 1];

T=0:0.1:50;
U=1+(0*T);



SYS=ss(A1,B,C,D);
%%%% Per il sistema a tempo discreto
%SYS=ss(A1,B,C,D,-1);

[YS,TS,XS]=LSIM(SYS,U,T,x0)
figure(1), plot(TS,XS(:,1)), grid on, zoom on, title('Evoluzione dello stato
x_1'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

figure(2), plot(TS,XS(:,2)), grid on, zoom on, title('Evoluzione dello stato
x_2'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

%-------------------------------------------------------------------------
SYS2=ss(A2,B,C,D);
[YS2,TS2,XS2]=LSIM(SYS2,U,T,x0)
figure(3), plot(TS2,XS2(:,1)), grid on, zoom on, title('Evoluzione dello stato
x_1'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

figure(4), plot(TS2,XS2(:,2)), grid on, zoom on, title('Evoluzione dello stato
x_2'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),
%-------------------------------------------------------------------------
SYS3=ss(A3,B,C,D);
[YS3,TS3,XS3]=LSIM(SYS3,U,T,x0)
figure(5), plot(TS3,XS3(:,1)), grid on, zoom on, title('Evoluzione dello stato
x_1'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

figure(6), plot(TS3,XS3(:,2)), grid on, zoom on, title('Evoluzione dello stato
x_2'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

%-------------------------------------------------------------------------
```

```
SYS4=ss(A4,B,C,D);
[YS4,TS4,XS4]=LSIM(SYS4,U,T,x0)
figure(7), plot(TS4,XS4(:,1)), grid on, zoom on, title('Evoluzione dello stato
x_1'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),

figure(8), plot(TS4,XS4(:,2)), grid on, zoom on, title('Evoluzione dello stato
x_2'),
xlabel('tempo[s]'), ylabel('velocità [m/s]'),


% Proiezione di X2 su x1
  figure (13),plot(XS(:,1),XS(:,2),'r',XS2(:,1),XS2(:,2),'g'),grid on,title
('Matrice A1->Rosso  A2->Verde'),
 xlabel ('Stato X1'), ylabel ('Stato X2'),

figure (14),plot (XS3(:,1),XS3(:,2),'b',XS4(:,1),XS4(:,2),'y') ,grid on
,title('Matrice A3->Blu  A4->Giallo'),
  xlabel ('Stao X1'), ylabel ('Stato X2'),
```